Torsion, Dilaton
und
2-Form-Eichfeld der Raum-Zeit

Diplomarbeit von

Thorsten Feldmann

Hauptgutachter: Prof. Dr. Robert Graham
Zweitgutachter: Priv. Doz. Dr. Axel Pelster

vorgelegt dem
Fachbereich Physik der
Universität Duisburg Essen
im September 2005

Ich versichere, daß ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Hillfsmittel angefertigt habe.

Essen, den 19.09.2005

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist, die Wechselwirkungen zwischen Materie und neuartigen Feldern, die durch die Stringtheorie vorhergesagt werden und als Torsion der Raum-Zeit aufgefasst werden können, zu untersuchen, damit die Existenz der neuen Felder experimentell verifiziert werden kann.

Durch die Allgemeine Relativitätstheorie [2–6] wird die Gravitationskraft als differentialgeometrische Eigenschaft der Raum-Zeit, nämlich als Krümmung beschrieben. Die Raum-Zeit ist dabei eine vierdimensionale Pseudo-Riemann-Manigfaltigkeit. Durch Feldgleichungen wird beschrieben, wie sich die Materie in der Raum-Zeit und die Geometrie der Raum-Zeit wechselseitig beeinflussen.

Durch die Einführung von Antisymmetrien im Paralelltransport von Vektoren in der Manigfaltigkeit erzeugt man die differentialgeometrische Eigenschaft Torsion und verallgemeinert die bekannte Riemann-Differentialgeometrie zur Riemann-Cartan-Differentialgeometrie [1,11,15,18,20,21]. Im zweiten Kapitel wird erläutert, wie die formale Struktur einer Manigfaltigkeit, die sowohl mit Krümmung, als auch mit Torsion ausgestattet ist, aufgebaut wird und wie physikalische Objekte auf der Manigfaltigkeit nun zu handhaben sind. Es wird gezeigt, welche Bedingungen an physikalische Felder gestellt werden müssen, damit sie differentialgeometrisch als Torsion der Raum-Zeit beschrieben werden können. Dabei wird auch das neuartige anholonome Abbildungsprinzip von H. Kleinert und A. Pelster [7,29,30,27] vorgestellt, das das Prinzip der allgemeinen Kovarianz auf Gravitationstheorien mit Torsion erweitert, wodurch man in die Lage versetzt ist, auch in einer Riemann-Cartan-Manigfaltigkeit Bewegungsgleichungen in gewohnter Weise aus Wirkungen herzuleiten.

Im nächsten Kapitel machen wir kurz deutlich, daß der Versuch, die elektromagnetische Wechselwirkung als Torsion der Raum-Zeit aufzufassen [32], nicht erfolgreich sein kann, da dies unweigerlich zu Widersprüchen führt. Die differentialgeometrische Interpretation des Elektromagnetismus ist somit gescheitert, beziehungsweise nicht mit dem Torsionsbegriff möglich.

Aus dem niederenergetischen Limes der Stringtheorie [8,9] folgt eine Gravitationstheorie, bei der neben der Metrik noch zusätzliche Felder auftreten, die als Kalb-Ramond- und Dilaton-

Feld bezeichnet werden. Wir zeigen im vierten Kapitel, daß die gesamte Wirkung dieser Gravitationstheorie durch den Krümmungsskalar der Riemann-Cartan-Differentialgeometrie gegeben ist. Dabei werden das total antisymmetrische Kalb-Ramond- und das skalare Dilaton-Feld mit der Torsion der Raum-Zeit identifiziert. Es zeigt sich dabei, daß die Näherung einer ungekrümmten Riemann-Cartan-Raum-Zeit mit Dilaton-Torsion der Newtonschen Gravitationstheorie entspricht. Außerdem wird deutlich, daß es für das Kalb-Ramond-Feld aufgrund seiner totalen Antisymmetrie im Rahmen der relativistischen Mechanik egal ist, ob es als Torsion oder einfach als Hintergrundfeld, analog zum elektromagnetischen Feld, angesehen wird, da es die Bewegungsgleichungen strukturloser Testteilchen nicht beeinflusst. Erst im Rahmen der quantenmechanischen Beschreibung von Spin-1/2-Teilchen durch die Dirac-Gleichung [13,14,22,28] tritt eine Kopplung zwischen Kalb-Ramond-Torsion und Spin des Teilchens auf.

Im fünften Kapitel der Arbeit wird untersucht, welche Auswirkungen das Kalb-Ramond-Feld auf eine quantenmechanische Materie-Probeverteilung hat. Dabei wird die Tatsache ausgenutzt, daß die Bewegungsgleichungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie direkt aus der lokalen Energie-Impulserhaltung folgen. Am Beispiel einer punktförmigen elektrischen Ladung im elektromagnetischen Feld, deren Bewegungsgleichung bekannt ist, wird zuvor deutlich gemacht, wie man nur durch die Kenntnis der Raum-Zeit-Wirkung eines Systems zu Bewegungsgleichungen gelangt.

Als Nebenprodukt ergibt sich eine Feldgleichung für Spin-1/2-Teilchen im Kalb-Ramond-Feld. Allerdings ist diese so aufgebaut, daß die Spin-1/2-Teilchen nicht die Quellen eines im Raum propagierenden Feldes sein können. Daher behandeln wir auch die Bewegung eines klassischen, nichtquantisierten Strings im Kalb-Ramond-Feld und gelangen damit zu einer Feldgleichung mit Quellterm.

Durch das Noether-Theorem wird ein Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen in einer flachen Raum-Zeit hergestellt. Insbesonders stellt die Eichinvarianz eines Feldes eine Symmetrie dar, die mit der Ladungserhaltung verknüpft ist. Dies machen wir uns im sechsten Kapitel zunutze und berechnen die erhaltene Ladung des Kalb-Ramond-Feldes, das ein 2-Form-Eichfeld ist, in der Näherung einer ungekrümmten Raum-Zeit.

Um das Kalb-Ramond-Feld experimentell zu bestätigen, liegt es auf der Hand, Messungen am Spin eines quantenmechanischen Systems vorzunehmen, da das Feld an diesen koppelt. Beschleunigerexperimente [35,36] mit Myonen, die dazu dienen, die Kopplungsstärke zwischen Spin und elektromagnetischem Feld präzise nachzuweisen, ergeben eine Abweichung vom theoretisch berechneten Wert des Standardmodells der Elementarteilchen und sind Anlaß zu Spekulationen über neue Physik jenseits des Standardmodells. Wir versuchen im siebten Kapitel die Abweichung durch ein eventuell auf der Erde vorhandenes Kalb-Ramond-Feld zu erklären und können anhand der experimentellen Daten der Beschleunigerexperimente eine Abschätzung der Größenordnung geben. Dazu entwickeln wir aus den Bewegungsgleichungen des fünften Kapitels eine Gleichung für die Spin-Präzessionsfrequenz eines Spin-1/2-Teilchens im Kalb-Ramond-Feld.

Zum Abschluss dieser Arbeit entwickeln wir den Energie-Operator für Spin-1/2-Teilchen im elektromagnetischen Feld und im Kalb-Ramond-Feld im nichtrelativistischen Limes mit der Pauli-Näherungsmethode. Mit diesem Hamilton-Operator und der Heisenbergschen Bewegungsgleichung werden unsere Berechnungen in Bezug auf die Spin-Präzession im nichtrelativistischen Limes bestätigt.

In dieser Arbeit sind die Einheiten so definiert, daß alle Naturkonstanten (Plancksches Wirkungsquantum, Lichtgeschwindigkeit, relativistische Gravitationskonstante $\kappa = G/4\pi$) gleich eins gesetzt werden ($\hbar = c = \kappa = 1$), damit die Rechnungen von diesen befreit werden können. In diesem System natürlicher Einheiten ist die Geschwindigkeit dimensionslos. Außerdem verwenden wir für die Metrik der flachen Minkowski-Raum-Zeit die Konvention $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Kapitel 2

Riemann-Cartan-Differentialgeometrie

2.1 Koordinatenbasis-Formalismus

Im folgenden betrachten wir ein 4-dimensionales Kontinuum von Punkten mit den Koordinaten x^μ, das mit einer Metrik sowie einem affinen Zusammenhang ausgestattet ist. Mit Hilfe der affinen Verbindung lassen sich Tensoren kovariant ableiten, mit der Metrik werden die Indizes der Tensoren herauf- bzw. heruntergezogen. Für die Komponenten eines Vektors bedeutet dies

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}{}^\nu V^\alpha, \tag{2.1}$$

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu. \tag{2.2}$$

Dabei ist die Metrik $g_{\mu\nu}$ symmetrisch, also $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

Aus der allgemeinen Relativitätstheorie [2–6] sind die Riemann-Mannigfaltigkeiten bekannt, bei denen die affine Verbindung durch das sogenannte Cristoffel-Symbol

$$\Gamma_{\alpha\mu}{}^\nu = \{_{\alpha\mu}{}^\nu\} \tag{2.3}$$

repräsentiert wird. Im weiteren Text wird es mit ${}^0\Gamma_{\alpha\mu}{}^\nu$ bezeichnet und ist durch

$${}^0\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha}) \tag{2.4}$$

gegeben. Dann kommutieren die beiden Operationen, also:

$$\nabla_\mu (g_{\alpha\beta} V^\beta) = g_{\alpha\beta}(\nabla_\mu V^\beta). \tag{2.5}$$

Es folgt hieraus

$$\nabla_\mu (g_{\alpha\beta} V^\beta) = \underbrace{V^\beta(\nabla_\mu g_{\alpha\beta})}_{=0} + g_{\alpha\beta}(\nabla_\mu V^\beta), \tag{2.6}$$

d.h. es gilt die Metrizitätsbedingung

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.7}$$

die besagt, daß die Länge von Vektoren unter der Paralellverschiebung erhalten ist.

Der Riemannsche Krümmungstensor ergibt sich aus dem Kommutator zweier kovarianter Ableitungen

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda \;=\; {}^0R_{\mu\nu\kappa}{}^\lambda V^\kappa \tag{2.8}$$

und beschreibt die Eigenschaft der Riemann-Manigfaltigkeit, dass infinitesimale Parallelogramme gekrümmt sein können.

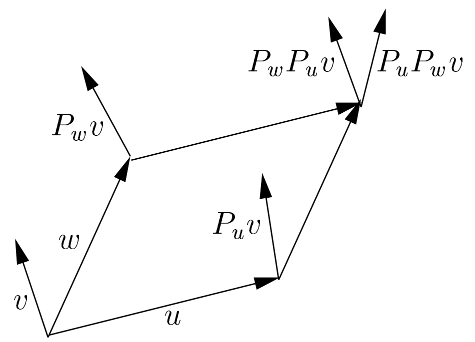

Abbildung 2.1: Krümmung

Die Abbildung 2.1 zeigt das differentialgeometrische Konzept der Krümmung. Die Vektoren u und w spannen ein infinitesimales Paralellogramm auf. Die Verschiebung des Vektors v längs w und anschliessend längs u ($P_u P_w v$) ergibt einen anderen Vektor als die Parallelverschiebung zuerst längs u und dann längs w ($P_w P_u v$). Die Differenz zwischen den Vektoren $P_w P_u v$ und $P_u P_w v$ ist die Krümmung.

Mit Hilfe von Gleichung (2.8) lässt sich der Krümmungstensor durch die affine Verbindung ausdrücken, wobei diese einzig und allein durch ${}^0\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ gegeben ist:

$${}^0R_{\beta\mu\nu}{}^\sigma \;=\; \partial_\beta\, {}^0\Gamma_{\mu\nu}{}^\sigma - \partial_\mu\, {}^0\Gamma_{\beta\nu}{}^\sigma + {}^0\Gamma_{\beta\alpha}{}^\sigma\, {}^0\Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha - {}^0\Gamma_{\mu\alpha}{}^\sigma\, {}^0\Gamma_{\beta\nu}{}^\alpha. \tag{2.9}$$

Die Tatsache, dass die affine Verbindung in den beiden unteren Indizes symmetrisch sein soll, also durch das Christoffel-Symbol dargestellt wird, bedeutet eine grosse Einschränkung an die Freiheitsgrade der Mannigfaltigkeit. Das gleiche gilt auch für die Symmetrieforderung an die Metrik.

Im weiteren soll nun eine Riemann-Cartan-Mannigfaltigkeit [1] angenommen werden. Dann enthält die affine Verbindung einen antisymmetrischen Teil, die Forderung einer symmetrischen Metrik und die Metrizitätsbedingung haben aber weiterhin Bestand.

Der antisymmetrische Teil der affinen Verbindung

$$S_{\mu\nu}{}^{\alpha} \quad = \quad \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}{}^{\alpha}) \tag{2.10}$$

charakterisiert die neue Eigenschaft, daß infinitesimale Parallelogramme nicht geschlossen sein müssen. Diese Tatsache wird als Torsion [11,15,18–21] bezeichnet und $S_{\mu\nu\lambda}$ heisst Riemann-Cartan-Torsionstensor.

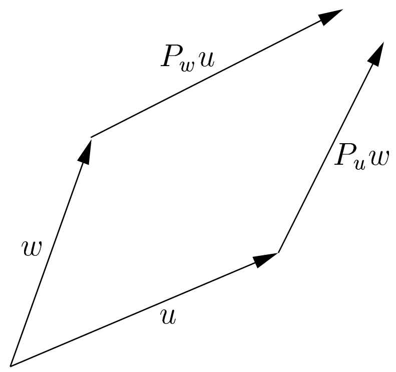

Abbildung 2.2: Torsion

Die Abbildung 2.2 zeigt die differentialgeometrische Vorstellung der Torsion. Verschiebt man den infinitesimalen Vektor u längs w und den Vektor w längs u, so fallen die Endpunkte der Vektoren $P_u w$ und $P_w u$ nicht zusammen, so daß das von u und w aufgespannte Paralellogramm nicht geschlossen ist.

Wir definieren nun die kovariante Ableitung, die mit der erweiterten affinen Verbindung mit antisymmetrischem Anteil gebildet wird als $\overset{(K)}{\nabla}_{\mu}$. Damit gilt auch in einem Raum mit Torsion die Metrizitätsbedingung

$$\overset{(K)}{\nabla}_{\mu} g_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.11}$$

Wenn man sie in ihren Bestandteilen ausschreibt

$$\overset{(K)}{\nabla}_{\mu} g_{\nu\lambda} \quad = \quad \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}{}^{\kappa} g_{\kappa\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}{}^{\kappa} g_{\nu\kappa} = 0, \tag{2.12}$$

zeigt sich durch eine zyklische Vertauschung der Indizes μ, ν, λ, dass die affine Verbindung in zwei Teile zerlegt werden kann:

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}{}^{\kappa} g_{\kappa\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}{}^{\kappa} g_{\nu\kappa} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\kappa} g_{\kappa\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}{}^{\kappa} g_{\mu\kappa} \\ &\quad - \partial_\nu g_{\lambda\mu} + \Gamma_{\nu\lambda}{}^{\kappa} g_{\kappa\mu} + \Gamma_{\nu\mu}{}^{\kappa} g_{\lambda\kappa} \\ &= \quad \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu} + \Gamma_{\nu\lambda\mu} - \Gamma_{\lambda\nu\mu} + \Gamma_{\nu\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu\lambda} + (-\Gamma_{\mu\lambda\nu} - \Gamma_{\lambda\mu\nu}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Unter Beachtung von (2.4) und (2.10) folgt dann

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} \quad = \quad {}^{0}\Gamma_{\lambda\mu\nu} + K_{\lambda\mu\nu}, \tag{2.14}$$

wobei ${}^0\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ das Christoffel-Symbol ist und $K_{\lambda\mu\nu}$ als Kontortionstensor bezeichnet wird. Er setzt sich zusammen aus

$$K_{\lambda\mu\nu} = S_{\lambda\mu\nu} + S_{\nu\lambda\mu} - S_{\mu\nu\lambda}. \tag{2.15}$$

Es gilt

$$K_{\lambda\mu\nu} = -K_{\lambda\nu\mu}. \tag{2.16}$$

Vektoren können nun kovariant mit

$$\nabla^{(K)}_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \left({}^0\Gamma_{\mu\alpha}{}^\nu + K_{\mu\alpha}{}^\nu\right) V^\alpha = \nabla_\mu V^\nu + K_{\mu\alpha}{}^\nu V^\alpha \tag{2.17}$$

abgeleitet werden[1], so daß sich in der Riemann-Cartan-Mannigfaltigkeit, die sowohl durch eine Krümmung als auch durch eine Torsion charakterisiert ist, ein verallgemeinerter Krümmungstensor definieren lässt: Ausgehend von (2.8) erhält man unter Berücksichtigung von (2.14) die Relation

$$[\nabla^{(K)}_\mu, \nabla^{(K)}_\nu] V^\lambda = R_{\mu\nu\kappa}{}^\lambda V^\kappa - 2S_{\mu\nu}{}^\kappa \nabla_\kappa V^\lambda, \tag{2.18}$$

mit dem Krümmungstensor

$$R_{\beta\mu\nu}{}^\sigma = \partial_\beta \Gamma_{\mu\nu}{}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}{}^\sigma + \Gamma_{\beta\alpha}{}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}{}^\sigma \Gamma_{\beta\nu}{}^\alpha. \tag{2.19}$$

Dabei nimmt (2.19) in Torsions- und Krümmungsanteile zerlegt die Form

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = {} & {}^0R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \partial_\alpha K_{\beta\gamma\delta} - \partial_\beta K_{\alpha\gamma\delta} + g^{\kappa\lambda}(K_{\alpha\gamma\kappa}K_{\beta\delta\lambda} - K_{\alpha\delta\kappa}K_{\beta\gamma\lambda} \\ & + K_{\alpha\gamma\kappa}{}^0\Gamma_{\beta\delta\lambda} - K_{\alpha\delta\kappa}{}^0\Gamma_{\beta\gamma\lambda} + {}^0\Gamma_{\alpha\gamma\kappa}K_{\beta\delta\lambda} - {}^0\Gamma_{\alpha\delta\kappa}K_{\beta\gamma\lambda}) \end{aligned} \tag{2.20}$$

an [1].

Der verallgemeinerte Krümmungstensor hat nur die algebraischen Antisymmetrien

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}, \tag{2.21}$$

im Gegensatz zu ${}^0R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, der zusätzlich die Antisymmetrie

$${}^0R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -{}^0R_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{2.22}$$

besitzt.

Da nun Vektoren in der Riemann-Cartan-Mannigfaltigkeit kovariant mit (2.17) abgeleitet werden können, erhält man als Bewegungsgleichung für ein punktförmiges strukturloses Testteilchen:

$$\frac{D^{(K)}}{D\tau} u^\mu = 0. \tag{2.23}$$

[1] Im weiteren Text werden kovariante Ableitungen mit Torsion immer in der Form $\nabla^{(\dots)}$ angegeben, während Ableitungen, die nur das Christoffel-Symbol enthalten (2.1), witerhin durch ∇ gekennzeichnet werden.

Rein geometrisch ausgedrückt bedeutet dies für den Paralleltransport des Geschwindigkeitsvektors die Gleichung

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \left({}^0\Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu + 2S^\mu{}_{\alpha\beta}\right) u^\alpha u^\beta \;=\; 0. \tag{2.24}$$

Sie wird als Autoparallelen-Gleichung bezeichnet [7] und unterscheidet sich von der bekannten Geodäten-Gleichung

$$0 \;=\; \frac{D}{D\tau}u^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} +^0 \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu u^\alpha u^\beta. \tag{2.25}$$

um einen zusätzlichen Torsionsterm. Es sei erwähnt, dass die Geodäte die kürzeste Verbindung und die Autoparallele die geradeste Verbindung in der Mannigfaltigkeit darstellt.

Der Torsionsterm $2S^\mu{}_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$ in der Autoparallelen-Gleichung (2.24) stellt eine zusätzliche Kraft zur Gravitation dar, die die Gravitationskraft verallgemeinert. Dies wirft die Frage auf, ob es sich dabei um eine physikalische Bewegungsgleichung handelt, da die Geodäten-Gleichung nicht nur dem Ausschreiben der kovarianten Eigenzeitableitung entspringt, sondern auch durch Variationsrechnung aus einer Wirkung hergeleitet werden kann. Deshalb ist es wichtig zu klären, ob auch die Autoparallelen-Gleichung aus einem Variationsprinzip gewonnen werden kann.

2.2 Vierbein-Formalismus

Um diese Frage so einfach wie möglich zu beantworten, ist es nötig, als ersten Schritt den Vierbein-Formalismus [2] einzuführen, der die weiteren Schritte erst verständlich erscheinen läßt. Dieser Formalismus ermöglicht entsprechend dem Einsteinschen Äquivalenzprinzip, an jedem Punkt einer Manigfaltigkeit lokale Lorentz-Transformationen durchzuführen, was gleichbedeutend mit der Verbindung von spezieller und allgemeiner Relativitätstheorie ist. Auf diese Weise lassen sich auch quantenmechanische Objekte wie beispielsweise Spinoren oder Dirac-Matrizen in die Rieman-Cartan-Manigfaltigkeit einbinden.

Im zuvor vorgestellten Koordinatenbasis-Formalismus existieren lokal an jedem Punkt P der Raum-Zeit Basisvektoren des Tangentenraums an P, die durch

$$\underline{e}_{(\mu)} \;=\; \partial_\mu \tag{2.26}$$

gegeben sind, sowie Basisvektoren des Kotangentenraums, die durch

$$\hat{\theta}^{(\mu)} \;=\; dx^\mu \tag{2.27}$$

bezeichnet werden. Kontravariante Vektoren schreiben sich also als $V = V^\mu\partial_\mu$, kovariante Vektoren, also Eins-Formen, als $\omega = \omega_\mu dx^\mu$. Am Punkt P kann nun eine beliebige Basis $\underline{e}_{(a)}$ gewählt werden. Die Tensorindizes in dieser neuen Basis werden durch lateinische Buchstaben gekennzeichnet. Die Koordinaten-Basisvektoren hängen mit der neuen Basis durch

$$\underline{e}_{(\mu)} \;=\; e^a{}_\mu \, \underline{e}_{(a)} \tag{2.28}$$

zusammen. Die Basis $\underline{e}_{(a)}$ sollen nun so gewählt werden, daß sie am Punkt P ein pseudoeuklidisches Orthonormalsystem bilden. Aus dieser Forderung folgt, daß die Vierbeine die Relation

$$e^a{}_\mu \, e^b{}_\nu \, \eta_{ab} \;=\; g_{\mu\nu} \tag{2.29}$$

erfüllen. Das reziproke Vierbein

$$e_a{}^\mu \;=\; \eta_{ab} \, g^{\mu\nu} \, e^b{}_\nu \tag{2.30}$$

befriedigt entsprechend die Bedingung

$$e_a{}^\mu \, e_b{}^\nu \, g_{\mu\nu} \;=\; \eta_{ab}. \tag{2.31}$$

Somit kann die neue Basis als

$$\underline{e}_{(a)} \;=\; e_a{}^\mu \, \underline{e}_{(\mu)} \tag{2.32}$$

dargestellt werden. Die Komponenten des Vierbeins $e^a{}_\mu$ bilden also eine invertierbare $n \times n$-Matrix und erfüllen damit die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen

$$e_a{}^\mu \, e^a{}_\nu \;=\; \delta^\mu{}_\nu \tag{2.33}$$

$$e_a{}^\mu e^b{}_\mu \;=\; \delta_a{}^b. \tag{2.34}$$

Am Punkt P wurde somit eine lokale Minkowski-Basis definiert. Die Komponenten von Vektoren lauten in der neuen Basis

$$V^a \;=\; e^a{}_\mu V^\mu. \tag{2.35}$$

Es sind gemischte Tensoren höherer Stufe mit lateinischen und griechischen Indizes möglich. Lateinische Indizes werden mit der Minkowski-Metrik η_{ab} herauf- und heruntergezogen. Jetzt existieren lokale Lorentz-Transformationen

$$V^{b'} \;=\; \Lambda^{b'}{}_a V^a \tag{2.36}$$

am Punkt P. Bei der kovarianten Ableitung von Tensoren wird die affinen Verbindung für lateinische Indizes durch die Spin-Verbindung $\omega_\mu{}^a{}_b$ ersetzt. Die kovariante Ableitung eines Vektors ist also durch

$$\overset{(K)}{\nabla} V \;=\; \left(\overset{(K)}{\nabla}_\mu V^a\right) dx^\mu \otimes \underline{e}_{(a)} = \left(\partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b\right) dx^\mu \otimes \underline{e}_{(a)} \tag{2.37}$$

gegeben. Um den Zusammenhang zwischen affiner Verbindung und Spin-Verbindung zu berechnen, drückt man nun die Gleichung (2.37) mit Hilfe der Vierbeine in der Koordinatenbasis aus [2]

$$\begin{aligned}
\overset{(K)}{\nabla} V &= \left[\partial_\mu \left(e^a{}_\nu V^\nu\right) + \omega_\mu{}^a{}_b \, e^b{}_\lambda V^\lambda\right] dx^\mu \otimes \left(e_a{}^\sigma \, \partial_\sigma\right) \\
&= e_a{}^\sigma \left[e^a{}_\nu \, \partial_\mu V^\nu + \left(\partial_\mu \, e^a{}_\nu\right) V^\nu + \omega_\mu{}^a{}_b \, e^b{}_\lambda V^\lambda\right] dx^\mu \otimes \partial_\sigma \\
&= \left[\partial_\mu V^\nu + e_a{}^\nu \left(\partial_\mu \, e^a{}_\lambda\right) V^\lambda + e_a{}^\nu \, e^b{}_\lambda \, \omega_\mu{}^a{}_b V^\lambda\right] dx^\mu \otimes \partial_\nu
\end{aligned} \tag{2.38}$$

und vergleicht mit der bekannten Darstellung

$$\overset{(K)}{\nabla} V \;=\; \left(\partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\nu V^\lambda\right) dx^\mu \otimes \partial_\nu . \tag{2.39}$$

Es ist also

$$\Gamma_{\mu\lambda}{}^\nu \;=\; e_a{}^\nu \left(\partial_\mu\, e^a{}_\lambda\right) + e_a{}^\nu\, e^b{}_\lambda\, \omega_\mu{}^a{}_b \tag{2.40}$$

und umgekehrt

$$\omega_\mu{}^a{}_b \;=\; e^a{}_\nu\, e_b{}^\lambda\, \Gamma_{\mu\lambda}{}^\nu - e_b{}^\lambda \left(\partial_\mu\, e^a{}_\lambda\right). \tag{2.41}$$

Da die kovariante Ableitung die Metrizitätsbedingung in der lokalen Minkowski-Basis erfüllen muß, findet sich durch

$$\overset{(K)}{\nabla}_\mu \eta_{ab} \;=\; \partial_\mu \eta_{ab} - \omega_\mu{}^c{}_a\, \eta_{cb} - \omega_\mu{}^c{}_b\, \eta_{ac} \tag{2.42}$$

die Antisymmetrie der Spin-Verbindung

$$\omega_{\mu ab} \;=\; -\omega_{\mu ba} \tag{2.43}$$

in den lateinischen Indizes. In (2.10) ist nun (2.40) einzusetzen, so daß sich in der lokalen Minkowski-Basis

$$S_{\mu\nu}{}^\lambda \;=\; \frac{1}{2}\, e_a{}^\lambda \left(\partial_\mu\, e^a{}_\nu - \partial_\nu\, e^a{}_\mu + \omega_\mu{}^a{}_b\, e^b{}_\nu - \omega_\nu{}^a{}_b\, e^b{}_\mu\right) \tag{2.44}$$

als Ausdruck des Torsionstensors ergibt. Setzt man in Gleichung (2.41) die Zerlegung der affinen Verbindung in Christoffel- und Torsionsteil (2.14) ein, kann man eine solche Zerlegung ebenfalls für die Spinverbindung angeben:

$$\begin{aligned}\omega_\mu{}^a{}_b \;&=\; e^a{}_\nu\, e_b{}^\lambda \left({}^0\Gamma_{\mu\lambda}{}^\nu + K_{\mu\lambda}{}^\nu\right) - e_b{}^\lambda \left(\partial_\mu\, e^a{}_\lambda\right) \\ &=\; {}^0\omega_\mu{}^a{}_b + K_{\mu b}{}^a .\end{aligned} \tag{2.45}$$

Die kovariante Ableitung des Vierbeins selbst ist gegeben durch

$$\overset{(K)}{\nabla}_\mu e^a{}_\nu \;=\; \partial_\mu\, e^a{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda\, e^a{}_\lambda + \omega_\mu{}^a{}_b\, e^b{}_\nu . \tag{2.46}$$

Drückt man nun die Spin-Verbindung wieder mit (2.45) aus, zeigt sich, daß die kovariante Ableitung des Vierbeins verschwindet

$$\overset{(K)}{\nabla}_\mu e^a{}_\nu \;=\; \partial_\mu\, e^a{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda\, e^a{}_\lambda + e^a{}_\kappa\, e_b{}^\rho\, \Gamma_{\mu\rho}{}^\kappa\, e^b{}_\nu - e_b{}^\kappa \left(\partial_\mu\, e^a{}_\kappa\right) e^b{}_\nu \;=\; 0, \tag{2.47}$$

so daß auch das Vierbein eine Art metrische Kompatibilität besitzt.

2.3 Kovariante Ableitung von Spinoren

Wir betrachten noch einmal die kovariante Ableitung eines Vektors im lokalen Vierbeinsystem

$$\nabla_\mu^{(K)} V^a \;=\; \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b. \tag{2.48}$$

Dabei beschreibt die Spin-Verbindung, wie die Komponenten des Vektors in ein benachbartes Vierbeinsystem transformieren. Allen Vierbeinsystemen liegen lokale Lorentz-Basen zugrunde, so daß sie im pseudoeuklidischen Sinne gegeneinander verdreht sind. In Gleichung (2.48) kann dies zum Ausdruck gebracht werden, indem man sie als

$$\nabla_\mu^{(K)} V^a \;=\; \partial_\mu V^a - \frac{i}{2}\,\omega_{\mu cd}(L^{cd})^a{}_b V^b \tag{2.49}$$

schreibt, wobei $(L^{cd})^a{}_b$ die Generatoren der Lorentz-Gruppe

$$(L^{cd})^a{}_b \;=\; i\left[\eta^{ca}\eta^d{}_b - \eta^{da}\eta^c{}_b\right] \tag{2.50}$$

sind. Die Spin-Verbindung kann also als infinitesimaler Drehwinkel in der (c,d)-Ebene bei infinitesimaler Verschiebung des Vektors in μ-Richtung aufgefaßt werden.

Die Generatoren der Lorentzgruppe (2.50) erfüllen die Antikommutatorrelation

$$\left(\left[L^{ab}, L^{cd}\right]\right)^i{}_j \;=\; (L^{ab})^i{}_k (L^{cd})^k{}_j - (L^{cd})^i{}_k (L^{ab})^k{}_j \;=\; iC^{abcd}{}_{lm}(L^{lm})^i{}_j \tag{2.51}$$

mit den Strukturkonstanten der Lorentz-Algebra

$$C^{abcd}{}_{lm} \;=\; \eta^{ad}\eta^b{}_l\eta^c{}_m + \eta^{bc}\eta^a{}_l\eta^d{}_m - \eta^{ac}\eta^b{}_l\eta^d{}_m - \eta^{bd}\eta^a{}_l\eta^c{}_m. \tag{2.52}$$

Die kovariante Ableitung (2.49) lässt sich nun auf beliebige Tensoren oder Felder Ψ, die in einer lokalen Minkowski-Basis definiert sind, verallgemeinern:

$$\nabla_\mu^{(K)} \Psi^A \;=\; \partial_\mu \Psi^A - \frac{i}{2}\,\omega_{\mu cd}(N^{cd})^A{}_B \Psi^B. \tag{2.53}$$

Die Indizierung mit lateinischen Großbuchstaben ist als Multi-Indizierung

$$\Psi^A \;=\; \Psi^{\sigma(1)\cdots\,\sigma(k)} \tag{2.54}$$

zu verstehen. Die $(N^{cd})^A{}_B$ sind die Darstellungung der Generatoren der Lorentz-Gruppe im Raum der Felder Ψ. In ihrer jeweiligen Darstellung haben sie die Lorentz-Algebra (2.51) zu erfüllen, damit (2.53) richtig ist.

Die Dirac-Gleichung im Minkowski-Raum ist gegeben durch

$$i\gamma^a\partial_a\psi - m\psi \;=\; 0. \tag{2.55}$$

Sie wurde geschaffen, um mit dem Dirac-Spinor ψ

$$\psi \;=\; \begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}, \qquad \psi^+ \;=\; (\psi_0,\psi_1,\psi_2,\psi_3)^*, \qquad \bar\psi \;=\; \psi^+\gamma^0 \tag{2.56}$$

relativistische Spin-1/2-Teilchen, wie etwa Elektronen, zu beschreiben. m bezeichnet die Ruhemasse des Teilchens, γ^a sind die Dirac-Matrizen, die zum Beispiel mit Hilfe der Pauli-Spin-Matritzen

$$\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

gemäß

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{(j)} \\ -\sigma^{(j)} & 0 \end{pmatrix}, \qquad j = 1,2,3 \tag{2.58}$$

konstruiert werden können. Sie erfüllen die Clifford-Algebra

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = -2\eta^{ab}. \tag{2.59}$$

Als Dirac-Operator bezeichnet man den Ausdruck

$$D = \gamma^a \partial_a. \tag{2.60}$$

Die Bewegungsgleichung für masselose Spin-1/2-Teilchen lautet:

$$D\psi = 0. \tag{2.61}$$

Um den Dirac-Operator in einer Riemann-Cartan-Raum-Zeit anzugeben, müssen neue Dirac-Matritzen

$$\gamma^\mu = e_a{}^\mu \gamma^a \tag{2.62}$$

mit der Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2g^{\mu\nu} \tag{2.63}$$

eingeführt werden. Außerdem muß die partielle Ableitung durch die kovariante Ableitung ersetzt werden, so daß man den neuen Dirac-Operator

$$\mathcal{D}^{(K)} = \gamma^\mu \overset{(K)}{\nabla}_\mu \tag{2.64}$$

erhält. Die Darstellung der Generatoren der Lorentz-Algebra im Spinorraum ist gegeben durch den Kommutator

$$N^{ab} = \frac{i}{4}[\gamma^a, \gamma^b], \tag{2.65}$$

der auch der Spin-Operator[2] der Dirac-Teilchen ist:

$$N^{ab} = S^{ab}. \tag{2.66}$$

[2] $S^{\alpha\beta}$ darf nicht mit dem Torsions-Tensor verwechselt werden, da dieser drei Indizes trägt.

Mit Gleichung (2.53) findet man

$$\begin{aligned}\nabla^{(K)}_\mu \psi &= \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\,\omega_{\mu ab} N^{ab}\psi \;=\; \partial_\mu\psi + \frac{1}{8}\,\omega_{\mu ab}[\gamma^a,\gamma^b]\psi \\ &= \partial_\mu\psi + \frac{1}{4}\,\omega_{\mu ab}\gamma^{[a}\gamma^{b]}\psi. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Der Dirac-Operator (2.64) kann nun also explizit als

$$\mathcal{D}^{(K)} = \gamma^\mu \nabla^{(K)}_\mu = \gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\,\omega_{\mu ab}\gamma^{[a}\gamma^{b]}\right) = \mathcal{D} - \frac{1}{4}\,K_{\mu ab}\gamma^\mu\gamma^{[a}\gamma^{b]} \tag{2.68}$$

angegeben werden [28]. Es ist

$$\mathcal{D} = \gamma^\mu\nabla_\mu = \gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\,{}^0\omega_{\mu ab}\gamma^{[a}\gamma^{b]}\right) \tag{2.69}$$

der Dirac-Operator im gekrümmten Raum, ohne Berücksichtigung der Torsion.

2.4 Anholonomes Abbildungsprinzip

Die Vierbein-Matritzen definieren an jedem Punkt P ein lokal ebenes Minkowski-Koordinatensystem. Die Koordinatendifferentiale dx^μ in der ursprünglichen Basis hängen mit den Koordinatendifferentialen $d\xi^a$ in der lokalen Basis durch

$$d\xi^a = e^a{}_\mu\, dx^\mu \tag{2.70}$$

zusammen. Durch die Spin-Verbindung (2.41) sind die einzelnen Systeme miteinander verknüpft. Beim Paralleltransport eines Vektors in der Raum-Zeit werden sowohl seine Komponenten, als auch die Vierbeine geändert. Die einzelnen Vierbeinsysteme sind gegeneinander im pseudoeuklidischen Sinne verdreht, so daß wegen der Definitionsgleichung für Lorentz-Transformationen

$$\Lambda_c{}^a\,\Lambda_d{}^b\,\eta_{ab} = \eta_{cd} = \Lambda_c{}^a\,\Lambda_d{}^b\,e_a{}^\mu\,e_b{}^\nu\,g_{\mu\nu} \tag{2.71}$$

und der Transformationsvorschrift für Koordinatendifferentiale

$$d\xi'^a = \Lambda^a{}_b\,d\xi^b = \Lambda^a{}_b\,e^b{}_\mu\,dx^\mu = e'^a{}_\mu\,dx^\mu \tag{2.72}$$

zwischen den Vierbeinen an den Punkten P und P' die Beziehung

$$e'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b\,e^b{}_\mu \tag{2.73}$$

besteht.

Wir wollen nun einen Punkt P der Mannigfaltigkeit auswählen und dort das spezielle Vierbeinsystem $\hat{e}^a{}_\mu$ einführen. Die Punkte x in der Raum-Zeit sollen auf die Punkte ξ im durch die Einheitsvektoren $\underline{e}_{(a)} = \hat{e}_a{}^\mu(P)\,\partial_\mu|_{x=P}$ aufgespannten flachen Raum durch die globale Transformation

$$\xi^\mu = \xi^\mu(x) \tag{2.74}$$

abgebildet werden. Wegen der Tranformationsvorschrift der Koordinatendifferentiale (2.70) stellt sich ein im flachen Raum mit τ parametrisierter Pfad $\xi(\tau)$ in der Raum-Zeit als

$$x^\mu(\tau) = x^\mu(\tau_0) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} d\tau'\,\hat{e}_a{}^\mu(x(\tau'))\,\dot{\xi}^a(\tau') \tag{2.75}$$

dar [29]. Die Gleichung

$$\hat{e}^a{}_\mu\,\hat{e}^b{}_\nu\,\eta_{ab} = g_{\mu\nu} \tag{2.76}$$

und die Orthogonalitätsrelationen

$$\hat{e}_a{}^\mu\,\hat{e}^a{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \tag{2.77}$$

$$\hat{e}_a{}^\mu\hat{e}^b{}_\mu = \delta_a{}^b \tag{2.78}$$

sollen ihre Gültigkeit behalten. Vektoren transformieren sich so wie die Koordinatendifferentiale

$$V^b = \hat{e}^b{}_\mu\,V^\mu \tag{2.79}$$

und die Basisvektoren hängen über

$$\partial_a = \hat{e}_a{}^\nu\,\partial_\nu \tag{2.80}$$

zusammen, so daß man für die Ableitung eines Vektors im flachen Raum die Relation

$$\partial_a V^b = \hat{e}_a{}^\nu\partial_\nu\left(\hat{e}^b{}_\mu\,V^\mu\right) = \hat{e}_a{}^\nu\left(\partial_\nu\,\hat{e}^b{}_\mu\right)V^\mu + \hat{e}_a{}^\nu\,\hat{e}^b{}_\mu\,\partial_\nu\,V^\mu. \tag{2.81}$$

erhält. Die partielle Ableitung in der flachen Raum-Zeit muß die Transformation der kovarianten Ableitung in der verallgemeinerten Raum-Zeit sein:

$$\partial_a V^b = \hat{e}_a{}^\nu\,\hat{e}^b{}_\mu\,\overset{(K)}{\nabla}_\nu V^\mu. \tag{2.82}$$

Bevor Gleichung (2.81) auf diese Form gebracht werden kann, ist mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation (2.34) die partielle Ableitung $\partial_\nu\,e^b{}_\mu$ umzuschreiben. Leitet man (2.34) ab, so ergibt sich

$$0 = \partial_\nu\,\delta_a{}^b = \partial_\nu\left(\hat{e}_a{}^\lambda\,\hat{e}^b{}_\lambda\right) = \hat{e}^b{}_\lambda\,\partial_\nu\,\hat{e}_a{}^\lambda + \hat{e}_a{}^\lambda\,\partial_\nu\,\hat{e}^b{}_\lambda. \tag{2.83}$$

Daraus liest man die Identitäten

$$\partial_\nu\,\hat{e}_a{}^\mu = -\hat{e}_b{}^\mu\,\hat{e}_a{}^\lambda\,\partial_\nu\,\hat{e}^b{}_\lambda \tag{2.84}$$

$$\partial_\nu\,\hat{e}^b{}_\mu = -\hat{e}^a{}_\mu\,\hat{e}^b{}_\lambda\,\partial_\nu\,\hat{e}_a{}^\lambda \tag{2.85}$$

ab. Mit (2.85) wird (2.81) zu

$$\partial_a V^b \;=\; \hat{e}^b{}_\mu\, \hat{e}_a{}^\nu\, \partial_\nu\, V^\mu - \hat{e}^c{}_\lambda\, \hat{e}^b{}_\mu\, \hat{e}_a{}^\nu\, (\partial_\nu\, \hat{e}_c{}^\mu)\; V^\lambda. \tag{2.86}$$

Der Vergleich mit (2.82) führt zur kovarianten Ableitung [29]

$$\overset{(K)}{\nabla}_\nu V^\mu \;=\; \partial_\nu V^\mu - \hat{e}^c{}_\lambda\, (\partial_\nu\, \hat{e}_c{}^\mu)\, V^\lambda \;=\; \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}{}^\mu V^\lambda. \tag{2.87}$$

Die affine Verbindung als Funktion der Transformationsmatritzen von der flachen Raum-Zeit in die Raum-Zeit mit verallgemeinerter Geometrie ist also gegeben durch

$$\Gamma_{\nu\lambda}{}^\mu \;=\; -\hat{e}^c{}_\lambda\, (\partial_\nu\, \hat{e}_c{}^\mu) \tag{2.88}$$

Unter Verwendung von (2.84) kann dies auch als

$$\Gamma_{\nu\lambda}{}^\mu \;=\; \hat{e}_c{}^\mu\, (\partial_\nu\, \hat{e}^c{}_\lambda) \tag{2.89}$$

geschrieben werden. Der Torsions-Tensor (2.10) besitzt in dieser Darstellung die Form

$$S_{\nu\lambda}{}^\mu \;=\; \frac{1}{2}\, \hat{e}_c{}^\mu\, (\partial_\nu\, \hat{e}^c{}_\lambda - \partial_\lambda\, \hat{e}^c{}_\nu) \tag{2.90}$$

und entspricht der Verletzung der Schwarzschen-Integrabilitätsbedingung:

$$\partial_\nu\, \hat{e}^c{}_\lambda - \partial_\lambda\, \hat{e}^c{}_\nu \;\neq\; 0. \tag{2.91}$$

Lokal am Punkt P lassen sich die Basisvektoren $\hat{e}^a{}_\mu$ als Jacobi-Matrix

$$\hat{e}^a{}_\mu \;=\; \frac{\partial \xi^a(x)}{\partial x^\mu} \;=\; \partial_\mu \xi^a(x) \tag{2.92}$$

schreiben. Dort gilt

$$\partial_\mu\, \hat{e}^a{}_\nu - \partial_\nu\, \hat{e}^a{}_\mu \;=\; \partial_\mu \partial_\nu \xi^a(x) - \partial_\nu \partial_\mu \xi^a(x) \;=\; 0. \tag{2.93}$$

Im Allgemeinen sind die Transformationen $\xi^\mu = \xi^\mu(x)$ aber nicht mehr eindeutig bestimmt, da ihre zweiten Ableitungen nicht kommutieren:

$$(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu)\, \xi^\lambda(x) \;\neq\; 0. \tag{2.94}$$

Der Kontortions-Tensor (2.15) hat die Gestalt

$$K_{\nu\lambda\mu} \;=\; \frac{1}{2}\left[\hat{e}_{c\mu}\, (\partial_\nu\, \hat{e}^c{}_\lambda - \partial_\lambda\, \hat{e}^c{}_\nu) + \hat{e}_{c\lambda}\, (\partial_\mu\, \hat{e}^c{}_\nu - \partial_\nu\, \hat{e}^c{}_\mu) - \hat{e}_{c\nu}\, (\partial_\lambda\, \hat{e}^c{}_\mu - \partial_\mu\, \hat{e}^c{}_\lambda)\right]. \tag{2.95}$$

Aus Gleichung (2.14) kann das Christoffel-Symbol bestimmt werden:

$$\begin{aligned} {}^0\Gamma_{\nu\lambda\mu} \;&=\; \Gamma_{\nu\lambda\mu} - K_{\nu\lambda\mu} \\ &=\; \frac{1}{2}\left[\hat{e}_{c\mu}\, (\partial_\nu\, \hat{e}^c{}_\lambda + \partial_\lambda\, \hat{e}^c{}_\nu) + \hat{e}_{c\lambda}\, (\partial_\nu\, \hat{e}^c{}_\mu - \partial_\mu\, \hat{e}^c{}_\nu) + \hat{e}_{c\nu}\, (\partial_\lambda\, \hat{e}^c{}_\mu - \partial_\mu\, \hat{e}^c{}_\lambda)\right]. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Dasselbe Ergebnis findet man natürlich auch, wenn man (2.76) in (2.4) einsetzt:

$$
\begin{aligned}
{}^0\Gamma_{\nu\lambda\mu} &= \frac{1}{2}\,\eta_{ab}\left[\partial_\nu\left(\hat{e}^a{}_\lambda\,\hat{e}^b{}_\mu\right) - \partial_\mu\left(\hat{e}^a{}_\nu\,\hat{e}^b{}_\lambda\right) + \partial_\lambda\left(\hat{e}^a{}_\mu\,\hat{e}^b{}_\nu\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\,\eta_{ab}\left[\hat{e}^a{}_\lambda\left(\partial_\nu\hat{e}^b{}_\mu\right) + \hat{e}^b{}_\mu\left(\partial_\nu\hat{e}^a{}_\lambda\right) - \hat{e}^a{}_\nu\left(\partial_\mu\hat{e}^b{}_\lambda\right)\right. \\
&\quad \left. - \,\hat{e}^b{}_\lambda\left(\partial_\mu\hat{e}^a{}_\nu\right) + \hat{e}^a{}_\mu\left(\partial_\lambda\hat{e}^b{}_\nu\right) + \hat{e}^b{}_\nu\left(\partial_\lambda\hat{e}^a{}_\mu\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\hat{e}_{c\lambda}\left(\partial_\nu\hat{e}^c{}_\mu\right) + \hat{e}_{c\mu}\left(\partial_\nu\hat{e}^c{}_\lambda\right) - \hat{e}_{c\nu}\left(\partial_\mu\hat{e}^c{}_\lambda\right)\right. \\
&\quad \left. - \,\hat{e}_{c\lambda}\left(\partial_\mu\hat{e}^c{}_\nu\right) + \hat{e}_{c\mu}\left(\partial_\lambda\hat{e}^c{}_\nu\right) + \hat{e}_{c\nu}\left(\partial_\lambda\hat{e}^c{}_\mu\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\hat{e}_{c\mu}\left(\partial_\nu\,\hat{e}^c{}_\lambda + \partial_\lambda\,\hat{e}^c{}_\nu\right) + \hat{e}_{c\lambda}\left(\partial_\nu\,\hat{e}^c{}_\mu - \partial_\mu\,\hat{e}^c{}_\nu\right) + \hat{e}_{c\nu}\left(\partial_\lambda\,\hat{e}^c{}_\mu - \partial_\mu\,\hat{e}^c{}_\lambda\right)\right]. \qquad (2.97)
\end{aligned}
$$

Falls die Torsion verschwindet, ergibt sich aus $K_{\nu\lambda\mu} = 0$ die Identität

$$
\hat{e}_{c\nu}\left(\partial_\lambda\,\hat{e}^c{}_\mu - \partial_\mu\,\hat{e}^c{}_\lambda\right) = \hat{e}_{c\mu}\left(\partial_\nu\,\hat{e}^c{}_\lambda - \partial_\lambda\,\hat{e}^c{}_\nu\right) + \hat{e}_{c\lambda}\left(\partial_\mu\,\hat{e}^c{}_\nu - \partial_\nu\,\hat{e}^c{}_\mu\right), \qquad (2.98)
$$

mit der man für das Christoffel-Symbol im torsionsfreien Raum

$$
{}^0\Gamma_{\nu\lambda\mu} = \hat{e}_{c\mu}\left(\partial_\nu\,\hat{e}^c{}_\lambda\right) = \Gamma_{\nu\lambda\mu} \qquad (2.99)
$$

erhält. Umgekehrt ergibt sich in einer Raum-Zeit ohne Krümmung, aber mit Torsion, aus ${}^0\Gamma_{\nu\lambda\mu} = 0$ die Identität

$$
\hat{e}_{c\nu}\left(\partial_\lambda\,\hat{e}^c{}_\mu - \partial_\mu\,\hat{e}^c{}_\lambda\right) = -\hat{e}_{c\mu}\left(\partial_\nu\,\hat{e}^c{}_\lambda + \partial_\lambda\,\hat{e}^c{}_\nu\right) - \hat{e}_{c\lambda}\left(\partial_\mu\,\hat{e}^c{}_\nu - \partial_\nu\,\hat{e}^c{}_\mu\right), \qquad (2.100)
$$

womit in diesem Fall

$$
K_{\nu\lambda\mu} = \hat{e}_{c\mu}\left(\partial_\nu\,\hat{e}^c{}_\lambda\right) = \Gamma_{\nu\lambda\mu} \qquad (2.101)
$$

gilt. Die Darstellungen (2.88) und (2.89) gelten also allgemein, unabhängig davon, ob die Raum-Zeit mit Krümmung, Torsion oder beidem ausgestattet ist.

Der bisher vorgestellte Formalismus impliziert jedoch von vornherein aufgrund der Orthogonalitätsrelationen (2.77) und (2.78) die Symmetrie der Metrik und wegen

$$
\nabla^{(K)}_\lambda\,\hat{e}^a{}_\mu = \partial_\lambda\,\hat{e}^a{}_\mu - \Gamma_{\lambda\mu}{}^\kappa\,\hat{e}^a{}_\kappa = \partial_\lambda\,\hat{e}^a{}_\mu - \underbrace{\hat{e}_c{}^\kappa\left(\partial_\lambda\,\hat{e}^c{}_\mu\right)e^a{}_\kappa}_{\partial_\lambda\,\hat{e}^a{}_\mu} = 0 \qquad (2.102)
$$

die Metrizitätsbedingung (2.7), denn mit (2.102) gilt auch

$$
\nabla^{(K)}_\lambda\left(\hat{e}^a{}_\mu\,\hat{e}^b{}_\nu\,\eta_{ab}\right) = 0. \qquad (2.103)
$$

Wir wollen nun nach (2.19) den Riemann-Cartan-Krümmungstensor berechnen:

$$
\begin{aligned}
R_{\beta\mu\nu}{}^\sigma &= \partial_\beta\left(\hat{e}_c{}^\sigma\,\partial_\mu\,\hat{e}^c{}_\nu\right) - \partial_\mu\left(\hat{e}_c{}^\sigma\,\partial_\beta\,\hat{e}^c{}_\nu\right) + \hat{e}_c{}^\sigma\left(\partial_\beta\,\hat{e}^c{}_\kappa\right)\hat{e}_d{}^\kappa\left(\partial_\mu\,\hat{e}^d{}_\nu\right) \\
&\quad - \hat{e}_c{}^\sigma\left(\partial_\mu\,\hat{e}^c{}_\kappa\right)\hat{e}_d{}^\kappa\left(\partial_\beta\,\hat{e}^d{}_\nu\right) \\
&= \left(\partial_\beta\,\hat{e}_c{}^\sigma\right)\left(\partial_\mu\,\hat{e}^c{}_\nu\right) + \hat{e}_c{}^\sigma\partial_\beta\partial_\mu\,\hat{e}^c{}_\nu - \left(\partial_\mu\,\hat{e}_c{}^\sigma\right)\left(\partial_\beta\,\hat{e}^c{}_\nu\right) - \hat{e}_c{}^\sigma\partial_\mu\partial_\beta\,\hat{e}^c{}_\nu \\
&\quad + \hat{e}_c{}^\sigma\left(\partial_\beta\,\hat{e}^c{}_\kappa\right)\hat{e}_d{}^\kappa\left(\partial_\mu\,\hat{e}^d{}_\nu\right) - \hat{e}_c{}^\sigma\left(\partial_\mu\,\hat{e}^c{}_\kappa\right)\hat{e}_d{}^\kappa\left(\partial_\beta\,\hat{e}^d{}_\nu\right). \qquad (2.104)
\end{aligned}
$$

Durch die Verwendung der Identität (2.85) erreicht man, daß nur noch

$$R_{\beta\mu\nu}{}^{\sigma} \;=\; \hat{e}_c{}^{\sigma}\,(\partial_\beta\partial_\mu - \partial_\mu\partial_\beta)\,\hat{e}^c{}_\nu \tag{2.105}$$

übrigbleibt [29]. Das bedeutet, daß die $\hat{e}^c{}_\nu$ selbst, auch bei verschwindender Torsion, die Schwarzsche Integrabilitätsbedingung verletzen:

$$(\partial_\beta\partial_\mu - \partial_\mu\partial_\beta)\,\hat{e}^c{}_\nu \;\neq\; 0. \tag{2.106}$$

Dies kommt daher, daß ein gekrümmter und ein flacher Raum nicht eindeutig aufeinander abgebildet werden können. Die $\hat{e}^c{}_\nu$ werden deshalb als anholonome Basis-Tetraden bezeichnet. Sie erweisen sich als äußerst nützliches Hilfsmittel, da sie das Prinzip der allgemeinen Kovarianz der allgemeinen Relativitätstheorie auf verallgemeinerte metrische Raum-Zeiten mit Torsion erweitern.

Das Prinzip der allgemeinen Kovarianz besagt, daß ein physikalisches Gesetz im Gravitationsfeld gilt, falls es bei Abwesenheit von Gravitationsfeldern gilt und wenn es kovariant geschrieben werden kann. Unter kovarianter Schreibweise ist die Ersetzung der partiellen Ableitungen durch kovariante Ableitungen mit Christoffel-Symbol und der Minkowski-Metrik durch die allgemeine Metrik zu verstehen.

Nach dem neuen anholonomen Abbildungsprinzip gilt ein physikalisches Gesetz in der Riemann-Cartan-Raum-Zeit, falls seine anholonome Abbildung in eine flache Raum-Zeit als physikalisches Gesetz gilt.

Hierbei ist allerdings zu beachten, daß dieses Prinzip uneingeschränkt nur für wirkliche physikalische Ausdrücke gilt, also solche, die wirklich messbar sind. Als Beispiel betrachte man das elektromagnetische Feld. Der Feldstärke-Tensor transformiert sich nach

$$F_{ab} \;=\; \hat{e}_a{}^{\mu}\,\hat{e}_b{}^{\nu}\,F_{\mu\nu}. \tag{2.107}$$

Im flachen Raum kann er aus einem Vektorpotential hergeleitet werden:

$$F_{ab} \;=\; \partial_a A_b - \partial_b A_a. \tag{2.108}$$

Transformiert man diese Gleichung, ergibt sich unter Verwendung von (2.88)

$$\begin{aligned} F_{ab} &= \hat{e}_a{}^{\mu}\,\partial_\mu \hat{e}_b{}^{\nu}\,A_\nu - \hat{e}_b{}^{\nu}\,\partial_\nu \hat{e}_a{}^{\mu}\,A_\mu \\ &= \hat{e}_a{}^{\mu}\,\hat{e}_b{}^{\nu}\,\partial_\mu A_\nu - \hat{e}_b{}^{\nu}\,\hat{e}_a{}^{\mu}\,\partial_\nu A_\mu + \hat{e}_a{}^{\mu}(\partial_\mu \hat{e}_b{}^{\nu})A_\nu - \hat{e}_b{}^{\nu}(\partial_\nu \hat{e}_a{}^{\mu})A_\mu \\ &= \hat{e}_a{}^{\mu}\,\hat{e}_b{}^{\nu}\left(F_{\mu\nu} + 2S_{\nu\mu}{}^{\lambda}A_\lambda\right). \end{aligned} \tag{2.109}$$

Man erhält ein unterschiedliches Ergebnis. Gleichung (2.109) kann aber nicht richtig sein, denn das elektromagnetische Feld ist als Eichfeld in der Raum-Zeit definiert, also invariant unter der Transformation

$$A'_\mu \;=\; A_\mu + \partial_\mu f \tag{2.110}$$

mit der beliebigen skalaren Funktion f, denn es beschreibt masselose Photonen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Die richtige Transformation ist (2.108) und (2.109) ist durch

$$F_{ab} \;=\; \hat{e}_a{}^{\mu}\,\hat{e}_b{}^{\nu}\,\partial_\mu A_\nu - \hat{e}_b{}^{\nu}\,\hat{e}_a{}^{\mu}\,\partial_\nu A_\mu \tag{2.111}$$

zu ersetzen. Die tatsächliche physikalische Größe ist der Feldstärke-Tensor, denn er wird aus den messbaren elektrischen und magnetischen Feldern $\vec{E}$ und $\vec{B}$ konstruiert. Das Vektorpotential ist nur ein mathematisches Hilfsmittel. Aus Gleichung (2.109) muß gefolgert werden, daß Ausdrücke der Form $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}A_{\lambda}$ immer verschwinden:

$$S_{\mu\nu}{}^{\lambda}A_{\lambda} \;=\; 0. \tag{2.112}$$

2.5 Autoparallelen-Gleichung und Variationsprinzip

Im völlig feldfreien flachen Raum bewegen sich Testteilchen auf Geraden. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d}{d\tau}\dot{\xi}^b \;=\; \dot{\xi}^a\partial_a\dot{\xi}^b \;=\; 0. \tag{2.113}$$

Nach dem anholonomen Abbildungsprinzip muß sich dies als

$$\hat{e}^a{}_\alpha\,\dot{x}^\alpha\,\hat{e}_a{}^\beta\,\partial_\beta\,\hat{e}^b{}_\lambda\,\dot{x}^\lambda \;=\; u^\alpha\,\partial_\alpha\,\hat{e}^b{}_\lambda\,u^\lambda \;=\; 0 \tag{2.114}$$

transformieren. Aus Gleichung (2.82) kann man entnehmen, daß man dafür auch

$$u^\alpha\,\hat{e}^b{}_\lambda\,\overset{(K)}{\nabla}_\alpha u^\lambda \;=\; \hat{e}^b{}_\lambda\,\frac{\overset{(K)}{D}}{D\tau}\,u^\lambda \;=\; 0 \tag{2.115}$$

schreiben kann. Dies ist die Autoparallelen-Gleichung (2.24).

Das anholonome Abbildungsprinzip ermöglicht es uns jetzt, diese Gleichung durch Variation aus einer Wirkung herzuleiten, und damit zu beweisen, daß sie in einer Riemann-Cartan-Raum-Zeit tatsächlich die korrekte physikalische Bewegungsgleichung ist.

Zunächst wollen wir aber betrachten, wie die Geodätengleichung (2.25) gewonnen wird. Diese erhält man durch die Forderung, daß das Wirkungsintegral S über eine Weltlinie minimal werden muß: $\delta S = 0$. Mit der totalen Änderung der Bogenlänge $ds = \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$ lautet die Wirkung [2–6]

$$S \;=\; \int_A^B ds \;=\; \int_A^B \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \;=\; \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \;=\; \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau\, L, \tag{2.116}$$

wobei die Koordinaten x^μ mit τ parametrisiert sind und $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$. Die Langrange-Funktion ist also durch

$$L(\dot{x}(\tau), x(\tau)) \;=\; \sqrt{-g_{\mu\nu}(x(\tau))\,\dot{x}^\mu(\tau)\,\dot{x}^\nu(\tau)} \;=\; 1 \tag{2.117}$$

gegeben. Sie ist auf eins normiert, da sie die invariante Länge des Vierergeschwindigkeitsvektors darstellt, die gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Die Variation der Wirkung bezüglich der Koordinaten x^λ liefert

$$\delta S \;=\; \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda}\,\delta\dot{x}^\lambda + \frac{\partial L}{\partial x^\lambda}\,\delta x^\lambda\right\} \;=\; 0. \tag{2.118}$$

Es kann angenommen werden, daß Zeitableitung und Variation vertauschen, denn es gilt ja

$$\delta \dot{x}^\lambda = \frac{\partial \dot{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}\, \delta x^\sigma = \left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\,\frac{dx^\lambda}{d\tau}\right) \delta x^\sigma = \left(\frac{d}{d\tau}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\sigma}\right) \delta x^\sigma = \frac{d}{d\tau}\,\delta x^\lambda, \tag{2.119}$$

da die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten und die Ableitung nach dem Eigenzeitparameter τ miteinander vertauschen. Wir verwenden dies in (2.118) und führen eine partielle Integration durch:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda}\,\frac{d}{d\tau}\,\delta x^\lambda + \frac{\partial L}{\partial x^\lambda}\,\delta x^\lambda \right\} \\ &= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left\{ \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda}\,\delta x^\lambda\right) - \left(\frac{d}{d\tau}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda}\right)\delta x^\lambda + \frac{\partial L}{\partial x^\lambda}\,\delta x^\lambda \right\} \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda}\,\delta x^\lambda\right]_{\tau_A}^{\tau_B} + \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left\{ -\frac{d}{d\tau}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} + \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} \right\} \delta x^\lambda. \end{aligned} \tag{2.120}$$

Der erste Term verschwindet, weil der Anfangs- und Endpunkt der Weltlinie fest sind und die Variation dort verschwindet. Also muß das übrigbleibende Integral identisch null sein. Da aber die Variationen auf der Weltlinie beliebig gewählt werden können, muß der Integrand verschwinden. Dadurch ergeben sich die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{d\tau}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} - \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = 0. \tag{2.121}$$

Mit (2.117) erhält man schliesslich die Geodätengleichung:

$$\ddot{x}^\lambda + {}^0\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \tag{2.122}$$

Auch, wenn anstelle von (2.117) das Quadrat der Länge des Vierergeschwindigkeisvektors

$$L = -\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -\frac{1}{2}\,(\dot{x})^2 \tag{2.123}$$

verwendet wird, kommt man zu diesem Ergebnis. Außerdem liefern die Euler-Lagrange-Gleichungen (2.121) für allgemeinere Lagrange-Funktionen, die zusätzliche Potentiale enthalten

$$L(\dot{x}(\tau), x(\tau), \tau) = -m\sqrt{-g_{\mu\nu}(x(\tau))\,\dot{x}^\mu(\tau)\,\dot{x}^\nu(\tau)} - V(\dot{x}(\tau), x(\tau), \tau) \tag{2.124}$$

die korrekten Bewegungsgleichungen im gekrümmten Raum

$$\ddot{x}^\lambda + {}^0\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = f^\lambda. \tag{2.125}$$

Die Bewegungsgleichungen können nur für gekrümmte Räume gelten, da die Lagrange-Funktion durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ lediglich Informationen über die Krümmung enthält, aber nicht andere differentialgeometrische Eigenschaften beinhaltet.

Wir stellen uns nun das Wegelement gemäß dem anholonomen Abbildungsprinzip als Abbild des Wegelementes in einer flachen Raum-Zeit vor [29]. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= -\hat{e}^a{}_\mu \, \hat{e}^b{}_\nu \, \eta_{ab} \, \hat{e}_c{}^\mu \, d\xi^c \, \hat{e}_d{}^\nu \, d\xi^d \\
&= -\delta^a{}_c \, \delta^b{}_d \, \eta_{ab} \, d\xi^c \, d\xi^d \;=\; -\eta_{ab} \, d\xi^a \, d\xi^b. \qquad (2.126)
\end{aligned}
$$

Daher sind die Lagrange-Funktionen (2.117) und (2.123) in der Riemann-Cartan-Raum-Zeit weiterhin gültig. Da $x^\mu(\tau)$ aber durch die Integralgleichung (2.75) gegeben ist, ergibt die Variation

$$
\delta x^\mu(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \, \delta\{\hat{e}_a{}^\mu(x(\tau')) \, \dot{\xi}^a(\tau')\} = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \{\dot{\xi}^a \, \delta\hat{e}_a{}^\mu + \hat{e}_a{}^\mu \, \delta\dot{\xi}^a\} \qquad (2.127)
$$

als Abbildung der Variation der flachen Koordinaten. Obwohl nun gefordert wird, daß die Variationen in der flachen Raum-Zeit an gewissen Punkten $\xi(\tau_A)$ und $\xi(\tau_B)$ verschwinden, gilt dies nun nicht mehr für die Bildpunkte $x(\tau_A)$ und $x(\tau_B)$. Trotzdem kommutieren aber Variationsableitung und Eigenzeitableitung. Die Vierergeschwindigkeit ist ein Vektor, deswegen ist die Variation durch

$$
\delta \dot{x}^\mu = \delta\{\hat{e}_a{}^\mu \, \xi^a\} \qquad (2.128)
$$

gegeben. Leitet man (2.127) nach der Eigenzeit ab, erhält man dasselbe:

$$
\frac{d}{d\tau} \delta x^\mu = \delta\{\hat{e}_a{}^\mu \, \xi^a\}. \qquad (2.129)
$$

Es ist nützlich, die Hilfsvariationen

$$
\bar{\delta} x^\mu = \hat{e}_a{}^\mu \, \delta\xi^a \qquad (2.130)
$$

einzuführen, die im Gegensatz zu (2.127) an den Endpunkten verschwindet, dafür aber nicht mit der Eigenzeitableitung kommutiert, denn es ist

$$
\frac{d}{d\tau}(\hat{e}_a{}^\mu \, \delta\xi^a) \neq \hat{e}_a{}^\mu \, \frac{d}{d\tau} \delta\xi^a. \qquad (2.131)
$$

Wir bezeichnen den Unterschied zwischen anholonomer Variation (2.127) und Hilfsvariation (2.130) als

$$
\delta b^\mu = \delta x^\mu - \bar{\delta} x^\mu. \qquad (2.132)
$$

Jetzt führen wir die anholonome Variation der mit der Lagrange-Funktion (2.123) gebildeten

Wirkung durch:

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left\{ g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \frac{d}{d\tau}\,\delta x^\mu + \frac{1}{2}\,(\partial_\mu g_{\lambda\kappa})\dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa \delta x^\mu \right\} \\
&= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \Big\{ g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \frac{d}{d\tau}\,\bar{\delta} x^\mu + \frac{1}{2}\,(\partial_\mu g_{\lambda\kappa})\dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa \bar{\delta} x^\mu \\
&\qquad + g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \frac{d}{d\tau}\,\delta b^\mu + \frac{1}{2}\,(\partial_\mu g_{\lambda\kappa})\dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa \delta b^\mu \Big\} \\
&= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \Big\{ - g_{\mu\nu}(\ddot{x}^\nu + {}^0\Gamma_{\lambda\kappa}{}^\nu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa)\bar{\delta} x^\mu \\
&\qquad + g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \frac{d}{d\tau}\,\delta b^\mu + \frac{1}{2}\,(\partial_\mu g_{\lambda\kappa})\dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa \delta b^\mu \Big\}. \qquad (2.133)
\end{aligned}
$$

Mit $g_{\mu\nu} = \hat{e}^a{}_\mu\, \hat{e}^a{}_\nu$ und (2.89) folgt $\partial_\mu g_{\nu\lambda} = \Gamma_{\mu\nu\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda\nu}$, so daß wir

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \Big\{ - g_{\mu\nu}(\ddot{x}^\nu + {}^0\Gamma_{\lambda\kappa}{}^\nu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa)\bar{\delta} x^\mu \\
&\qquad + g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \frac{d}{d\tau}\,\delta b^\mu + \Gamma_{\mu\lambda\kappa}\dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa \delta b^\mu \Big\} \qquad (2.134)
\end{aligned}
$$

erhalten. Die Eigenzeitableitung der anholonomen Variation (2.127) stellt sich als

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\,\delta x^\mu &= \dot{\xi}^a \delta \hat{e}_a{}^\mu + \hat{e}_a{}^\mu\, \delta \dot{\xi}^a \;=\; \dot{\xi}^a \delta \hat{e}_a{}^\mu + \hat{e}_a{}^\mu\, \frac{d}{d\tau}(\hat{e}^a{}_\nu\, \bar{\delta} x^\nu) \\
&= \dot{\xi}^a \delta \hat{e}_a{}^\mu + \hat{e}_a{}^\mu \left(\frac{d}{d\tau} \hat{e}^a{}_\nu \right) \bar{\delta} x^\nu + \frac{d}{d\tau}\,\bar{\delta} x^\mu \qquad (2.135)
\end{aligned}
$$

dar. Jetzt setzen wir

$$
\delta \hat{e}_a{}^\mu = (\partial_\lambda \hat{e}_a{}^\mu)\delta x^\lambda = \hat{e}_a{}^\nu\, \hat{e}^a{}_\nu (\partial_\lambda \hat{e}_a{}^\mu)\delta x^\lambda = -\hat{e}_a{}^\nu \Gamma_{\lambda\nu}{}^\mu \delta x^\lambda \qquad (2.136)
$$

und

$$
\frac{d}{d\tau}\,\hat{e}^a{}_\nu = \dot{x}^\lambda \partial_\lambda\, \hat{e}^a{}_\nu = \hat{e}^a{}_\mu \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \dot{x}^\lambda \qquad (2.137)
$$

ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\,\delta x^\mu &= -\Gamma_{\lambda\nu}{}^\mu \dot{x}^\nu (\delta b^\lambda + \bar{\delta} x^\lambda) + \Gamma_{\lambda\nu}{}^\mu \dot{x}^\lambda \bar{\delta} x^\nu + \frac{d}{d\tau}\,\bar{\delta} x^\mu \\
&= -\Gamma_{\lambda\nu}{}^\mu \dot{x}^\nu \delta b^\lambda + 2S_{\lambda\nu}{}^\mu \dot{x}^\lambda \bar{\delta} x^\nu + \frac{d}{d\tau}\,\bar{\delta} x^\mu. \qquad (2.138)
\end{aligned}
$$

Auf diese Weise ergibt sich

$$
\frac{d}{d\tau}\,\delta b^\mu = \frac{d}{d\tau}\,\delta x^\mu - \frac{d}{d\tau}\,\bar{\delta} x^\mu = -\Gamma_{\lambda\nu}{}^\mu \dot{x}^\nu \delta b^\lambda + 2S_{\lambda\nu}{}^\mu \dot{x}^\lambda \bar{\delta} x^\nu, \qquad (2.139)
$$

so daß von (2.134) nur

$$
\begin{aligned}
\delta S &= -\int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau g_{\mu\nu}(\ddot{x}^\nu + {}^0\Gamma_{\lambda\kappa}{}^\nu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa + 2S^\nu{}_{\lambda\kappa}\dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa)\bar{\delta} x^\mu \\
&= -\int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau g_{\mu\nu}(\ddot{x}^\nu + \Gamma_{\lambda\kappa}{}^\nu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa)\bar{\delta} x^\mu
\end{aligned}
\tag{2.140}
$$

übrigbleibt. Die Hilfvariationen $\bar{\delta} x^\mu$ verschwinden an den Endpunkten und mit $\delta S = 0$ ergibt sich die Autoparallelengleichung (2.24).

Wir können jetzt dazu übergehen, die Euler-Lagrange-Gleichungen (2.124) zu verallgemeinern, wenn wir die Wirkung direkt nach den Hilfsvariationen variieren. Dem Hamiltonschen Prinzip $\delta S = 0$ wird man nämlich schon dadurch gerecht, daß man die Variationen als infinitesimale Abweichungen von der tatsächlichem Trajektorie ansieht. Wir erhalten in gewohnter Weise

$$
\delta S = \int d\tau \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} \bar{\delta} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} \bar{\delta} x^\lambda \right\} = 0. \tag{2.141}
$$

In einem Raum mit Torsion kommutieren Hilfsvariation und Zeitableitung nicht, sondern es gilt [7,29]

$$
\bar{\delta} \frac{dx^\lambda}{d\tau} - \frac{d}{d\tau} \bar{\delta} x^\lambda = 2S_{\mu\nu}{}^\lambda \dot{x}^\mu \bar{\delta} x^\nu. \tag{2.142}
$$

Um dies einzusehen leiten wir (2.130) nach der Eigenzeit ab und erhalten

$$
\frac{d}{d\tau} \bar{\delta} x^\mu = (\partial_\nu \, \hat{e}_a{}^\mu) \dot{x}^\nu \delta \xi^a + \hat{e}_a{}^\mu \, \delta \xi^a. \tag{2.143}
$$

Die Hilfsvariation der Geschwindigkeit ergibt

$$
\bar{\delta} \dot{x}^\mu = \bar{\delta}(\hat{e}_a{}^\lambda \, \dot{\xi}^a) = (\partial_\nu \, \hat{e}_a{}^\mu) \dot{\xi}^a \bar{\delta} x^\nu + \hat{e}_a{}^\mu \, \bar{\delta} \dot{\xi}^a. \tag{2.144}
$$

Die Bildung des Kommutators ergibt letztendlich

$$
\bar{\delta} \dot{x}^\mu - \frac{d}{d\tau} \bar{\delta} x^\mu = (\partial_\nu \, \hat{e}_a{}^\mu) \dot{\xi}^a - (\partial_\nu \, \hat{e}_a{}^\mu) \dot{x}^\nu \delta x^a = 2S_{\nu\lambda}{}^\mu \dot{x}^\nu \bar{\delta} x^\lambda, \tag{2.145}
$$

und führt damit auf (2.142). Damit erhält man schließlich

$$
\delta S = \int d\tau \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} \frac{d}{d\tau} \bar{\delta} x^\lambda + 2S_{\mu\nu}{}^\lambda \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} \dot{x}^\mu \bar{\delta} x^\nu + \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} \bar{\delta} x^\lambda \right\} = 0, \tag{2.146}
$$

so daß

$$
\frac{\partial L}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} = 2S_{\lambda\mu}{}^\nu \dot{x}^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} \tag{2.147}
$$

gilt. Durch Einsetzten von (2.117) in (2.147) folgt die Autoparallelen-Gleichung (2.24). Bei Verwendung von Lagrange-Funktionen, die geschwindigkeitsabhängige Potentiale enthalten, sind Überlegungen analog zu (2.108) und (2.109) anzustellen, um keine falschen Ergebnisse zu erhalten.

2.6 Physikalische Felder als Torsion

Der bisher vorgestellte Formalismus soll nun mit physikalischem Gehalt gefüllt werden. So wie die Krümmung einer Mannigfaltigkeit dazu benutzt wird, Gravitationskräfte zu beschreiben, soll die Torsion dazu dienen, weiteren Kraftfeldern eine geometrische Interpretation zu geben. Wir betrachten dazu die Einstein-Hilbert-Wirkung

$$S_{\mathrm{EH}} \;=\; \int d^4x\sqrt{-g}\left({}^0R + L_{\mathrm{T}} + L_{\mathrm{F}}\right). \tag{2.148}$$

Durch den Krümmungs-Skalar ${}^0R$, der aus dem Ricci-Tensor

$${}^0R_{\mu\nu} \;=\; {}^0R_{\sigma\mu\nu}{}^{\sigma} \tag{2.149}$$

durch

$${}^0R \;=\; g^{\mu\nu}\,{}^0R_{\mu\nu} \tag{2.150}$$

gebildet wird, werden die Gravitationskräfte beschrieben, die Lagrange-Funktion L_{T} beschreibt massive Materieteilchen in der Raum-Zeit, L_{F} enthält zusätzliche Kraftfelder. Man kann $L_{\mathrm{T}} + L_{\mathrm{F}} = L_{\mathrm{Mat}}$ zu einer Gesamtfunktion zusammenfassen, die das Verhalten der Materie in der Raum-Zeit beschreibt. Durch Variation dieser Wirkung (2.148) erhält man die Einstein-Feldgleichungen der Gravitation

$${}^0R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,{}^0R \;=\; \kappa T_{\mu\nu}, \tag{2.151}$$

wobei der Energie-Impuls-Tensor durch

$$T_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta S_{\mathrm{Mat}}}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.152}$$

mit

$$S_{\mathrm{Mat}} \;=\; \int d^4x\sqrt{-g}L_{\mathrm{Mat}} \tag{2.153}$$

gegeben ist.

Geht man aus von einem Raum mit Torsion, so ist (2.148) durch die Riemann-Cartan-Wirkung

$$S_{\mathrm{RC}} \;=\; \int d^4x\sqrt{-g}\,(R + L_{\mathrm{Mat}}) \tag{2.154}$$

zu ersetzen, in der anstelle des Riemann-Krümmungs-Skalars der Riemann-Cartan-Krümmungs-Skalar, der unter Verwendung des Riemann-Cartan-Krümmungs-Tensors (2.19) aus dem verallgemeinerten Ricci-Tensor

$$R_{\mu\nu} \;=\; R_{\sigma\mu\nu}{}^{\sigma} \tag{2.155}$$

durch

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{2.156}$$

gewonnen wird und explizit die Form [11]

$$R = {}^0R + 4(\nabla_\sigma S^\sigma - S^\sigma S_\sigma) + S_{\alpha\beta\gamma} S^{\alpha\beta\gamma} - 2S_{\alpha\beta\gamma} S^{\beta\gamma\alpha}. \tag{2.157}$$

besitzt. Hierbei nennt man $S^\sigma = S^{\sigma\mu}{}_\mu$ den Torsionsvektor.

Bei der Berechnung lassen sich die Koordinaten als Riemann-Normalkoordinaten wählen. Dies ist lokal immer möglich. Wir haben es dann mit einem Koordinatensystem zu tun, in dem die ersten partiellen Ableitungen der Metrik verschwinden. Somit gelangt man über (2.19) und (2.155) direkt zu

$$R_{\mu\nu} = {}^0R_{\mu\nu} + \partial_\sigma K_{\mu\nu}{}^\sigma + 2\partial_\mu S_\nu - 2S_\alpha K_{\mu\nu}{}^\alpha - K_{\mu\alpha}{}^\sigma K_{\sigma\nu}{}^\alpha, \tag{2.158}$$

mit $K_{\sigma\alpha}{}^\sigma = -2S_\alpha$. In allgemeinen Koordinaten werden die partiellen Ableitungen wieder zu kovarianten Ableitungen:

$$R_{\mu\nu} = {}^0R_{\mu\nu} + \nabla_\sigma K_{\mu\nu}{}^\sigma + 2\nabla_\mu S_\nu - 2S_\alpha K_{\mu\nu}{}^\alpha - K_{\mu\alpha}{}^\sigma K_{\sigma\nu}{}^\alpha. \tag{2.159}$$

Mit (2.156) und $K_\sigma{}^{\sigma\alpha} = 2S^\alpha$ gelangt man zu

$$R = {}^0R + 4(\nabla_\sigma S^\sigma - S^\sigma S_\sigma) - K_{\mu\alpha\sigma} K^{\sigma\mu\alpha} \tag{2.160}$$

und nach einer weiteren Vereinfachung des letzten Terms findet man letztlich den Ausdruck (2.157).

Sollen nun physikalische Felder durch Torsion der Raum-Zeit erklärt werden, muß der Torsions-Tensor von der Form sein, daß die Torsionsterme in (2.157) in der Wirkung (2.154) die richtigen Ausdrücke der Felder liefern. Außerdem darf die Autoparallelen-Gleichung (2.24) nicht einer bereits bekannten Bewegungsgleichung widersprechen.

Kapitel 3

Torsion und Elektrodynamik

Da die Gravitation als Krümmung der Raum-Zeit beschrieben wird, ist es ein verlockender Gedanke, die am zweitdeutlichsten die physikalische Realität beeinflussende Kraft, die elektromagnetische Wechselwirkung, geometrisch zu beschreiben [33]. Der Versuch, dies mit der Torsion zu bewerkstelligen [32], kann aber als gescheitert betrachtet werden, da dies zu widersprüchlichen Ergebnissen führt.

Wir zeigen nun kurz, warum die Torsion zu einer geometrischen Interpretation der Elektrodynamik ungeeignet ist. Die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens lautet

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} - \frac{q}{m} F^{\mu\nu} u_\nu \quad = \quad 0. \tag{3.1}$$

Hierbei ist $F^{\mu\nu}$ der Feldstärketensor, q die Ladung und m die Ruhemasse des Teilchens. Soll diese Gleichung aus der Autoparallelen-Gleichung (2.24) folgen, muß

$$S^\mu{}_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda \quad = \quad -\frac{q}{m} F^{\mu\nu} u_\nu \tag{3.2}$$

gelten. Dies ist offensichtlich mit

$$S_{\mu\nu}{}^\lambda \quad = \quad -\frac{q}{2m} F_{\mu\nu} u^\lambda \tag{3.3}$$

der Fall, da $u^\lambda u_\lambda = -1$ gilt. Allergings ergibt sich hiermit und (2.157) die Riemann-Cartan-Wirkung

$$S_{\text{RC}} \quad = \quad \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ {}^0R - \frac{q^2}{4m^2} \left(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\alpha\beta} F_{\beta\gamma} u_\alpha u^\gamma \right) \right\}. \tag{3.4}$$

Störender noch als der Vorfaktor q^2/m^2 ist die Tatsache, daß der letzte Term, der die Vierergeschwindigkeiten enthält, in einer korrekten elektromagnetischen Raum-Zeit-Wirkung nichts zu suchen hat.

Alle Erweiterungen von (3.3), mit verschiedenen Permutationen der Indizes, die zur richtigen Lorentzkraft (3.1) führen, enthalten ebenfalls solche Terme.

Auf der anderen Seite kann ein total antisymmetrischer Torsions-Tensor

$$S_{\mu\nu\lambda} \;=\; K_{\mu\nu\lambda} \;=\; F_{[\mu\nu}u_{\lambda]} \tag{3.5}$$

zwar die korrekte elektromagnetische Wirkung

$$S_{\mathrm{RC}} \;=\; S_{\mathrm{em}} \;=\; \int d^4x\sqrt{-g}\left({}^0R - F^{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{3.6}$$

erzeugen, aber keine Bewegungsgleichung liefern, denn total antisymmetrische Torsion fällt aus der Autoparallelen-Gleichung (2.24) heraus.

Diese Tatsache an sich wäre noch nicht weiter tragisch, denn die Bewegungsgleichungen können nun unabhängig zusätzlich gefordert werden, wie im normalen Fall, wenn kein Versuch zur geometrischen Interpretation des Maxwell-Feldes unternommen wird. Aber es ergeben sich unter der Annahme einer elektrodynamischen Torsion immer falsche quantenmechanische Kopplungsterme in der Dirac-Gleichung. Der Ansatz (3.5) führt zum Dirac-Operator

$$\mathcal{D}^{(\mathrm{H})} \;=\; \gamma^\mu\nabla_\mu^{(H)} \;=\; \gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\,\omega_{\mu ab}\gamma^{[a}\gamma^{b]}\right) - F_{\mu\alpha}u_\beta\gamma^{[\mu}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}, \tag{3.7}$$

mit dem unsinnigen Kopplungsterm

$$-F_{\mu\alpha}u_\beta\gamma^{[\mu}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}. \tag{3.8}$$

Es ist bekannt, daß ein Dirac-Teilchen über den eichinvarianten Impuls

$$p_\mu \;\rightarrow\; p_\mu + A_\mu \tag{3.9}$$

an das elektromagnetische Vektorpotential koppelt [14,22]. Der richtige Dirac-Operator lautet

$$\mathcal{D} \;=\; \gamma^\mu\nabla_\mu^{(H)} \;=\; \gamma^\mu\left(\partial_\mu - iA_\mu + \frac{1}{4}\,\omega_{\mu ab}\gamma^{[a}\gamma^{b]}\right). \tag{3.10}$$

Der Versuch, dem Maxwell-Feld über den Torsionsbegriff eine differentialgeometrische Interpretation zu geben, kann somit als fehlgeschlagen bezeichnet werden.

Kapitel 4

Kalb-Ramond- und Dilaton-Feld als Torsion

Aus der Stringtheorie erhält man die Wirkung in einem n-dimensionalen Raum [8]

$$S_{\mathrm{SW}} \;=\; \int d^n x \sqrt{-G}\, \mathrm{e}^{-2\Phi} \left[{}^0\mathcal{R} - \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma} + 4(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) \right] \tag{4.1}$$

mit pseudo-Riemannscher Metrik $G_{\mu\nu}$, Krümmungs-Skalar ${}^0\mathcal{R}$ und dem skalaren Feld Φ, sowie dem total antisymmetrischen Tensor

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma} \;=\; \partial_\alpha \mathcal{B}_{\beta\gamma} + \partial_\beta \mathcal{B}_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \mathcal{B}_{\alpha\beta}. \tag{4.2}$$

Das eichinvariante $\mathcal{H}$-Feld heisst Kalb-Ramond-Feld, Φ ist das Dilaton-Feld. Damit (4.2) wirklich total antisymmetrisch ist, muß für das Matrix-Potential natürlich

$$\mathcal{B}_{\alpha\beta} \;=\; -\mathcal{B}_{\beta\alpha} \tag{4.3}$$

gelten.

Aufgrund des konformen Faktors $\mathrm{e}^{-2\Phi}$ in der String-Wirkung und der Abweichung von vier Raum-Zeit-Dimensionen darf nicht von vornherein davon ausgegangen werden, daß es sich um eine Raum-Zeit im Sinne der Allgemeinen Relativitätstheorie handelt. Wir kennzeichnen deshalb die Metrik mit dem Großbuchstaben G und alle anderen Grössen mit kalligraphischen Buchstaben, um sie von tatsächlichen Raum-Zeit-Feldern zu unterscheiden.

4.1 String-Wirkung und Torsion

Wir zeigen nun, daß die zusätzlichen Felder als Torsion aufgefasst werden können, wenn man von der Riemann-Cartan-Wirkung im n-dimensionalen Riemann-Cartan-Raum

$$S_{\mathrm{RC}} = \int d^n x \sqrt{-G} \mathcal{R} = \int d^n x \sqrt{-G} \left[{}^0\mathcal{R} - 4\mathcal{S}^\sigma \mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{S}^{\alpha\beta\gamma} - 2\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{S}^{\beta\gamma\alpha} \right] \tag{4.4}$$

mit dem Torsionsansatz

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma} = c_1 \mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma} + c_2 \left(\partial_{[\alpha}\omega\right) G_{\beta]\gamma} \tag{4.5}$$

ausgeht und eine konforme Transformation der Metrik

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \mathrm{e}^{2\omega} G_{\mu\nu} \tag{4.6}$$

mit der dazugehörigen reziproken Metrik

$$\check{G}^{\mu\nu} = \mathrm{e}^{-2\omega} G^{\mu\nu} \tag{4.7}$$

durchführt, wobei ω proportional zum Dilaton Φ sein soll. Die Quadratwurzel der negativen Determinante der Metrik transformiert sich zu

$$\sqrt{-\tilde{G}} = \mathrm{e}^{n\omega}\sqrt{-G}, \tag{4.8}$$

und der konform transformierte Krümmungs-Skalar hat die Form

$${}^0\check{\mathcal{R}} = \mathrm{e}^{-2\omega}\left[{}^0\mathcal{R} - 2(n-1)\nabla_\sigma\nabla^\sigma\omega - (n-2)(n-1)(\partial_\sigma\omega)(\partial^\sigma\omega)\right]. \tag{4.9}$$

Das Herauf- und Herunterziehen der Tensorindizes erfolgt jetzt mit (4.6) und (4.6), so daß beispielsweise für einen Vektor

$$\tilde{G}_{\alpha\mu}V^\mu = \mathrm{e}^{2\omega}G_{\alpha\mu}V^\mu = \mathrm{e}^{2\omega}V_\alpha = \tilde{V}_\alpha \tag{4.10}$$

und

$$\check{G}^{\alpha\mu}V_\mu = \mathrm{e}^{-2\omega}G^{\alpha\mu}V_\mu = \mathrm{e}^{-2\omega}V^\alpha = \check{V}^\alpha \tag{4.11}$$

gilt. Das mit $\tilde{G}_{\mu\nu}$ gebildetet Christoffel-Symbol wird zu

$$\begin{aligned} {}^0\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\lambda &= \frac{1}{2}\check{G}^{\lambda\gamma}\left(\partial_\alpha\tilde{G}_{\beta\gamma} - \partial_\gamma\tilde{G}_{\alpha\beta} + \partial_\beta\tilde{G}_{\gamma\alpha}\right) \\ &= {}^0\Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda + (\partial_\alpha\omega)\delta_\beta{}^\lambda + (\partial_\beta\omega)\delta_\alpha{}^\lambda - G_{\alpha\beta}(\partial^\lambda\omega), \end{aligned} \tag{4.12}$$

so daß sich auch eine transformierte kovariante Ableitung

$$\bar{\nabla}_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + {}^0\bar{\Gamma}_{\mu\kappa}{}^\nu V^\kappa \tag{4.13}$$

ergibt. Damit und dem Torsionsvektor

$$\check{\mathcal{S}}^\sigma = \check{G}^{\sigma\alpha}\check{G}^{\beta\mu}\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta\mu} = \mathrm{e}^{-4\omega}G^{\sigma\alpha}G^{\beta\mu}\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta\mu} = \mathrm{e}^{-2\omega}\mathcal{S}^\sigma, \tag{4.14}$$

der mit Hilfe des transformierten Torsionstensors

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta\gamma} = \mathrm{e}^{2\omega}\left[c_1\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma} + c_2\left(\partial_{[\alpha}\omega\right)G_{\beta]\gamma}\right] = \mathrm{e}^{2\omega}\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma} \tag{4.15}$$

gebildet wird, kann nun der konform transformierte Riemann-Cartan-Krümmungsskalar angegeben werden:

$$\check{\mathcal{R}} = {}^0\check{\mathcal{R}} + 4(\bar{\nabla}_\sigma\,\mathrm{e}^{-2\omega}\mathcal{S}^\sigma - \mathrm{e}^{-2\omega}\mathcal{S}^\sigma\mathcal{S}_\sigma) + \mathrm{e}^{-2\omega}\left(\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{S}^{\alpha\beta\gamma} - 2\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{S}^{\beta\gamma\alpha}\right). \tag{4.16}$$

Mit dem Torsions-Vektor

$$\mathcal{S}^\sigma \;=\; \frac{c_2}{2}(n-1)\partial^\sigma\omega, \tag{4.17}$$

den Ausdrücken

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{S}^{\alpha\beta\gamma} - 2\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{S}^{\beta\gamma\alpha} \;=\; {c_2}^2(n-1)(\partial_\sigma\omega)(\partial^\sigma\omega) - {c_1}^2\mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma} \tag{4.18}$$

und

$$\mathcal{S}^\sigma\mathcal{S}_\sigma \;=\; \frac{{c_2}^2}{4}(n-1)^2(\partial^\sigma\omega)(\partial_\sigma\omega), \tag{4.19}$$

sowie

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_\sigma\,\mathrm{e}^{-2\omega}\mathcal{S}^\sigma \;&=\; (\partial_\sigma\,\mathrm{e}^{-2\omega})\mathcal{S}^\sigma + \mathrm{e}^{-2\omega}\bar{\nabla}_\sigma\mathcal{S}^\sigma \\ &=\; \mathrm{e}^{-2\omega}\left[\frac{c_2}{2}(n-1)(n-2)(\partial^\sigma\omega)(\partial_\sigma\omega) + \frac{c_2}{2}(n-1)\nabla_\sigma\partial^\sigma\omega\right]\end{aligned} \tag{4.20}$$

wird (4.16) zu

$$\begin{aligned}\check{\mathcal{R}} \;=\;& {}^0\check{\mathcal{R}} + \mathrm{e}^{-2\omega}\left[(2c_2 - {c_2}^2)(n-2)(n-1)(\partial^\sigma\omega)(\partial_\sigma\omega)\right.\\ &\left. + 2c_2(n-1)\nabla_\sigma\partial^\sigma\omega - {c_1}^2\mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma}\right],\end{aligned} \tag{4.21}$$

wobei die Identität $(n-1)^2 - (n-1) = (n-2)(n-1)$ verwendet wurde. Setzt man nun noch die explizite Form (4.9) des tranformierten Riemann-Krümmungsskalars ein, erhält man

$$\begin{aligned}\check{\mathcal{R}} \;=\;& \mathrm{e}^{-2\omega}\left[{}^0\mathcal{R} + (2c_2 - {c_2}^2 - 1)(n-2)(n-1)(\partial^\sigma\omega)(\partial_\sigma\omega)\right.\\ &\left. + 2(c_2-1)(n-1)\nabla_\sigma\partial^\sigma\omega - {c_1}^2\mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma}\right],\end{aligned} \tag{4.22}$$

Wir setzen dies nun in die konform transformierte Riemann-Cartan-Wirkung

$$\bar{S}_{\mathrm{RC}} \;=\; \int d^nx\sqrt{-\tilde{G}}\check{\mathcal{R}} \;=\; \int d^nx\sqrt{-G}\mathrm{e}^{n\omega}\check{\mathcal{R}} \tag{4.23}$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned}\bar{S}_{\mathrm{RC}} \;=\;& \int d^nx\sqrt{-G}\mathrm{e}^{(n-2)\omega}\left[{}^0\mathcal{R} - (c_2-1)^2(n-2)(n-1)(\partial^\sigma\omega)(\partial_\sigma\omega)\right.\\ &\left. + 2(c_2-1)(n-1)\nabla_\sigma\partial^\sigma\omega - {c_1}^2\mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma}\right].\end{aligned} \tag{4.24}$$

Jetzt behandeln wir den dritten Term mit partieller Integration

$$\begin{aligned}&\int d^nx\sqrt{-G}\mathrm{e}^{(n-2)\omega}\,2(c_2-1)(n-1)\nabla_\sigma\partial^\sigma\omega\\ =&\; -\int d^nx\sqrt{-G}(\partial_\sigma\mathrm{e}^{(n-2)\omega})2(c_2-1)(n-1)\partial^\sigma\omega\\ =&\; -\int d^nx\sqrt{-G}\mathrm{e}^{(n-2)\omega}\,2(c_2-1)(n-2)(n-1)(\partial^\sigma\omega)(\partial_\sigma\omega),\end{aligned} \tag{4.25}$$

wobei ausgenutzt wurde, daß aufgrund des Gaußschen-Satztes

$$\int d^n x\sqrt{-G}\,\nabla_\sigma\left[e^{(n-2)\omega}\,2(c_2-1)(n-1)\partial^\sigma\omega\right] \;=\; 0 \tag{4.26}$$

gilt, denn es handelt sich um einen Oberflächenterm. (4.24) nimmt jetzt die einfache Form

$$\begin{aligned}\bar{S}_{\mathrm{RC}} \;=\; & \int d^n x\sqrt{-G}e^{(n-2)\omega}\left[{}^0\mathcal{R}+(1-{c_2}^2)(n-2)(n-1)(\partial^\sigma\omega)(\partial_\sigma\omega)\right.\\ & \left.-{c_1}^2\mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma}\right]\end{aligned} \tag{4.27}$$

an. Um den richtigen konformen Faktor aus Wirkung (4.1) zu erhalten, muß

$$\omega \;=\; -\frac{2}{n-2}\Phi \tag{4.28}$$

gesetzt werden. Damit verändert sich (4.27) zu

$$\bar{S}_{\mathrm{RC}} \;=\; \int d^n x\sqrt{-G}e^{-2\Phi}\left[{}^0\mathcal{R}+4(1-{c_2}^2)\frac{n-1}{n-2}(\partial^\sigma\Phi)(\partial_\sigma\Phi)-{c_1}^2\mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma}\right]. \tag{4.29}$$

Die Konstante c_1 kann sofort mit

$$c_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{12}} \tag{4.30}$$

angegeben werden. Zur Bestimmung von c_2 muß die quadratische Gleichung

$$\frac{4(n-1)}{n-2}(1-{c_2}^2) \;=\; 4 \tag{4.31}$$

mit

$$c_2 \;=\; \pm\frac{1}{\sqrt{n-1}} \tag{4.32}$$

gelöst werden. Bedenkenlos kann man sich für die positive Lösung entscheiden und erhält damit letztendlich die String-Wirkung (4.1)

$$S_{\mathrm{SW}} \;=\; \bar{S}_{\mathrm{RC}}, \tag{4.33}$$

wobei der Torsions-Tensor die Form

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta\gamma} \;=\; e^{-\frac{4\Phi}{n-2}}\left[\frac{1}{12}\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma}-\frac{2}{(n-2)\sqrt{n-1}}\left(\partial_{[\alpha}\Phi\right)G_{\beta]\gamma}\right] \tag{4.34}$$

besitzt. Man erkennt daran, daß die durch das Dilaton-Feld hervorgerufene Gradienten-Torsion erst ab $n=3$ einen Sinn macht.

4.2 Kalb-Ramond- und Dilaton-Feld als Torsion in der Raum-Zeit

Es ist bereits darauf hingewiesen worden, daß durch die String-Wirkung (4.1) keine Gravitationstheorie im Sinne der Allgemeinen Relativitätstheorie definiert wird, da vor allen Feldern der konforme Faktor $\mathrm{e}^{-2\Phi}$ steht, so daß sich für jedes Φ eine neue Theorie ergibt. In der String-Theorie wird die Metrik $G_{\mu\nu}$ auch als Sigma-Modell-Metrik oder String-Metrik bezeichnet. Es ist jetzt also nötig, zuerst eine Transformation

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{e}^{2\chi} G_{\mu\nu} \tag{4.35}$$

durchzuführen, mit der die Wirkung (4.1) auf Einstein-Hilbert-Form gebracht werden kann, so daß die Metrik $g_{\mu\nu}$ die vertraute Einstein-Metrik ist. Dabei ist zu beachten, daß alle Indizes mit der alten Metrik heraufgezogen werden. Wir schreiben deshalb zunächst (4.1) als

$$S_{\mathrm{sw}} = \int d^n x \sqrt{-G}\, \mathrm{e}^{-2\Phi} \left[{}^0\mathcal{R} - \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma} G^{\mu\alpha} G^{\nu\beta} G^{\lambda\gamma} \mathcal{H}_{\mu\nu\lambda} + 4(\partial_\sigma \Phi) G^{\mu\sigma} (\partial_\mu \Phi) \right] . \tag{4.36}$$

Der Riemann-Krümmungsskalar wird nun analog zu (4.9) als

$$\begin{aligned} {}^0R &= \mathrm{e}^{-2\chi} \left[{}^0\mathcal{R} - 2(n-1)\nabla_\sigma \partial^\sigma \chi - (n-1)(n-2)(\partial_\sigma \chi)(\partial^\sigma \chi) \right] \\ &= \mathrm{e}^{-2\chi} \left[{}^0\mathcal{R} - 2(n-1)\nabla_\sigma G^{\mu\sigma} \partial_\mu \chi - (n-1)(n-2)(\partial_\sigma \chi) G^{\mu\sigma} (\partial_\mu \chi) \right] \end{aligned} \tag{4.37}$$

ausgedrückt. In der Wirkung (4.1) ist nun

$$\sqrt{-G} = \mathrm{e}^{-n\chi} \sqrt{-g} \tag{4.38}$$

und

$${}^0\mathcal{R} = \mathrm{e}^{2\chi} \left[{}^0R + (n-1)(n-2)(\partial_\sigma \chi)(\partial^\sigma \chi) \right] + 2(n-1)\nabla_\sigma \mathrm{e}^{2\chi} \partial^\sigma \chi \tag{4.39}$$

einzusetzten. Anhand des sich daraus ergebenden Ausdruckes

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{sw}} = \int d^n x \sqrt{-g}\, \mathrm{e}^{-n\chi - 2\Phi} \Big\{ \mathrm{e}^{2\chi} \Big[& {}^0R + (n-1)(n-2)(\partial_\sigma \chi)(\partial^\sigma \chi) \\ & - \mathrm{e}^{4\chi} \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma} + 4(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) \Big] + 2(n-1)\nabla_\sigma \mathrm{e}^{2\chi} \partial^\sigma \chi \Big\} \end{aligned} \tag{4.40}$$

lässt sich ablesen, daß

$$\chi = \frac{2\Phi}{2-n} \tag{4.41}$$

zu wählen ist, damit die Einstein-Hilbert-Form

$$\begin{aligned} S = \int d^n x \sqrt{-g} \Big[& {}^0R + 4\,\frac{n-1}{2-n}\, \mathrm{e}^{\frac{-4\Phi}{2-n}} \nabla_\sigma \mathrm{e}^{\frac{4\Phi}{2-n}} \partial^\sigma \Phi \\ & + \frac{12-8n}{2-n} (\partial_\sigma \Phi)(\partial^\sigma \Phi) - \mathrm{e}^{\frac{8\Phi}{2-n}} \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma} \Big] \end{aligned} \tag{4.42}$$

angenommen wird. Es ist zu beachten, daß die kovariante Ableitung mit der alten Metrik $G_{\mu\nu}$ gebildet wird und der Divergenzterm erst nach einer partiellen Integration als Oberflächenterm verschwindet:

$$
\begin{aligned}
& \int d^n x \sqrt{-g}\, 4\, \frac{n-1}{2-n}\, \mathrm{e}^{\frac{-4\Phi}{2-n}} \nabla_\sigma \mathrm{e}^{\frac{4\Phi}{2-n}} \partial^\sigma \Phi \\
= & \int d^n x \sqrt{-g}\, 4\, \frac{n-1}{2-n}\, \mathrm{e}^{\frac{-4\Phi}{2-n}}\, \frac{1}{\sqrt{-G}}\, \partial_\sigma \sqrt{-G}\, \mathrm{e}^{\frac{4\Phi}{2-n}} \partial^\sigma \Phi \\
= & \int d^n x \sqrt{-g}\, 4\, \frac{n-1}{2-n}\, \mathrm{e}^{-2\Phi}\, \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_\sigma \sqrt{-g}\, \mathrm{e}^{2\Phi} \partial^\sigma \Phi \\
= & \int d^n x \sqrt{-g}\, 8\, \frac{n-1}{2-n}\, (\partial_\sigma \Phi)(\partial^\sigma \Phi) + \int d^n x \sqrt{-g}\, 4\, \frac{n-1}{2-n}\, \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_\sigma \sqrt{-g}\, \partial^\sigma \Phi \\
= & \int d^n x \sqrt{-g}\, 8\, \frac{n-1}{2-n}\, (\partial_\sigma \Phi)(\partial^\sigma \Phi).
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

Es ergibt sich schließlich

$$
S = \int d^n x \sqrt{-g} \left[{}^0 R - \frac{4}{(n-2)} (\partial_\sigma \Phi)(\partial^\sigma \Phi) - \mathrm{e}^{\frac{8\Phi}{2-n}} \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma} \right]. \tag{4.44}
$$

Dies lässt sich nun ausgehend von der Wirkung

$$
S_{\mathrm{RC}} = \int d^n x \sqrt{-G} R = \int d^n x \sqrt{-G} \left[{}^0 R - 4 S^\sigma S_\sigma + S_{\alpha\beta\gamma} S^{\alpha\beta\gamma} - 2 S_{\alpha\beta\gamma} S^{\beta\gamma\alpha} \right] \tag{4.45}
$$

als Torsion in der Riemann-Cartan-Raum-Zeit interpretieren. Wir beginnen dazu mit dem Torsionsansatz

$$
S_{\alpha\beta\gamma} = c_1 H_{\alpha\beta\gamma} + c_2 \left(\partial_{[\alpha} \Phi \right) g_{\beta]\gamma}. \tag{4.46}
$$

Hierbei haben wir zur weiteren Vereinfachung das reskalierte Kalb-Ramond-Feld

$$
H_{\alpha\beta\gamma} = \mathrm{e}^{\frac{4\Phi}{2-n}} \frac{1}{\sqrt{12}} \mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma} \tag{4.47}
$$

mit dem entsprechenden Tensor-Potential

$$
H_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha B_{\beta\gamma} + \partial_\beta B_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma B_{\alpha\beta} \tag{4.48}
$$

eingeführt, so daß (4.44) die Gestalt

$$
S = \int d^n x \sqrt{-g} \left[{}^0 R - \frac{4}{(n-2)} (\partial_\sigma \Phi)(\partial^\sigma \Phi) - H_{\alpha\beta\gamma} H^{\alpha\beta\gamma} \right] \tag{4.49}
$$

annimmt. Die Riemann-Cartan-Wirkung (4.45) wird mit dem Torsionsvektor

$$
S^\sigma = \frac{c_2}{2} (n-1)\, \partial^\sigma \Phi \tag{4.50}
$$

und dem Ausdruck

$$
S_{\alpha\beta\gamma} S^{\alpha\beta\gamma} - 2 S_{\alpha\beta\gamma} S^{\beta\gamma\alpha} = {c_2}^2 (n-1) (\partial_\sigma \Phi)(\partial^\sigma \Phi) - {c_1}^2 H^{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma} \tag{4.51}
$$

zu

$$S_{\mathrm{RC}} = \int d^n x \sqrt{-G} \left[{}^0R - {c_2}^2 (n-1)(n-2)(\partial_\sigma \Phi)(\partial^\sigma \Phi) - {c_1}^2 H^{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma} \right]. \quad (4.52)$$

Durch die Wahl der Konstanten

$$c_1 = 1, \quad (4.53)$$

$$c_2 = \frac{2}{(n-2)\sqrt{n-1}} \quad (4.54)$$

entspricht (4.52) der Wirkung (4.49), wobei die Torsion in der Raum-Zeit durch

$$S_{\alpha\beta\gamma} = H_{\alpha\beta\gamma} + \frac{2}{(n-2)\sqrt{n-1}} \left(\partial_{[\alpha} \Phi \right) g_{\beta]\gamma} \quad (4.55)$$

gegeben ist. Setzt man dies in (2.24), erhält man als Bewegungsgleichung eines strukturlosen Testteilchens

$$\begin{aligned} \frac{du^\alpha}{d\tau} + {}^0\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha u^\beta u^\gamma &= \frac{2}{(n-2)\sqrt{n-1}} \left(u^\alpha u_\beta \partial^\beta + \partial^\alpha \right) \Phi \\ &= \frac{2}{(n-2)\sqrt{n-1}} \left(u^\alpha \dot{\Phi} + \partial^\alpha \Phi \right). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Das Kalb-Ramond-Feld trägt aufgrund seiner totalen Antisymmetrie nichts dazu bei.

Im lokalen Ruhesystem ($u = (1,0,0,0)$) hebt sich die Nullkomponente der Beschleunigung weg. Somit entspricht die Physik in einem flachen Raum mit Dilaton-Torsion der Newtonschen Gravitationstheorie.

Da die Gravitation aber besser durch die Raum-Zeit-Krümung beschrieben wird und keine experimentellen Hinweise für das Vorliegen einer zusätzlichen Kraft auf strukturlose Testmassen vorliegen, wollen wir zunächst annehmen, daß das Dilaton konstant oder verschwindend ist. Außerdem dient es in der String-Theorie zur Beschreibung von Kopplungsstärken [8,9], die wohl kaum als veränderlich angesehen werden sollten. Damit reduziert sich (4.55) auf

$$S_{\alpha\beta\gamma} = H_{\alpha\beta\gamma} = K_{\alpha\beta\gamma}. \quad (4.57)$$

Die Tatsache, daß die richtige Bewegungsgleichung nunmehr die Autoparallelen-Gleichung (2.24) ist, führt zu der Erkenntnis, daß es für klassische Materie in der Raum-Zeit möglich ist, das Kalb-Ramond-Feld sowohl als Torsion, als auch als zusätzliches Eichfeld in der Raum-Zeit, analog zum elektromagnetischen Feld, zu betrachten. Allerdings erhält man, wenn man vom Begriff der Torsion ausgeht und quantenmechanische Objekte beschreibt, aus (2.45) und (2.68) den Dirac-Operator

$$\mathcal{D}^{(\mathrm{H})} = \gamma^\mu \nabla^{(H)}_\mu = \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} {}^0\omega_{\mu ab} \gamma^{[a} \gamma^{b]} \right) - \frac{1}{4} H_{\mu\alpha\beta} \gamma^{[\mu} \gamma^\alpha \gamma^{\beta]}, \quad (4.58)$$

der einen Kopplungsoperator zwischen Dirac-Teilchen und Kalb-Ramond-Feld enthält.

Kapitel 5

Probemassen und Hintergrundfelder

In der allgemeinen Relativitätstheorie sind die Bewegungsgleichungen von Testmaterie eine direkte Folge der Erhaltung von Energie und Impuls. Das bedeutet, die Vier-Divergenz des Energie-Impuls-Tensors (2.152) verschwindet:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} \;=\; 0. \tag{5.1}$$

Diese Gleichung gilt auch in einem Raum mit der Kalb-Ramond-Torsion (4.57), denn die Torsionsterme heben sich wegen der totalen Antisymmetrie des Kalb-Ramond-Feldes in der Vier-Divergenz weg.

Im Falle von Testmaterie in Feldern setzt sich der Energie-Impuls-Tensor aus den Energie-Impuls-Tensoren der Probe ($T^{\mu\nu}_{\mathrm{P}}$) und der Hintergrundfelder ($T^{\mu\nu}_{\mathrm{HG}}$) zusammen. Es gilt also

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}_{\mathrm{P}} + \nabla_\nu T^{\mu\nu}_{\mathrm{HG}} \;=\; 0. \tag{5.2}$$

Da es sich um Probeteilchen handelt, werden die Hintergrundfelder und die Metrik in der Einstein-Hilbert-Wirkung (2.148) als gegeben vorausgesetzt, denn unter dem Begriff Probe soll eine lokal konzentrierte, im Vergleich zur Feldquelle kleine Materieverteilung verstanden werden, die die Felder und die Raumkrümmung selbst nicht nennenswert beeinflussen kann. Fasst man die Divergenz des Engergie-Impuls-Tensors der Hintergrundfelder als Kraftddichte auf ($\nabla_\nu T^{\mu\nu}_{\mathrm{HG}} = -F^\mu$), ergibt sich die Bewegungsgleichung der Probeverteilung

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}_{\mathrm{P}} \;=\; F^\mu, \tag{5.3}$$

die einzig und allein aus dem Energie-Impuls-Tensor (2.152) gefolgert werden kann.

5.1 Beispiel Punktteilchen

Wir wollen nun zunächst als Beispiele die Bewegungsgleichungen einer strukturlosen Punktmasse im Gravitationsfeld und einer Punktladung im elektrischen Feld auf diese Weise herleiten um dann zur Kopplung des Kalb-Ramond-Feldes an Materie überzugehen.

5.1.1 Punktteilchen im Gravitationsfeld

Der Energieimpulstensor einer Materieverteilung aus nicht miteinander wechselwirkenden Teilchen lautet

$$T^{\mu\nu} = \rho(x(\tau))u^\mu u^\nu, \tag{5.4}$$

mit der Dichte $\rho(x)$ der Materieverteilung. Um zu einem einzigen Teilchen überzugehen, drücken wir die Dichte als Eigenzeitintegral über die Delta-Funktion aus und schreiben den Energie-Impuls-Tensor als

$$T_{\mathrm{P}}^{\mu\nu}(y) = \frac{m}{\sqrt{-g(y)}} \int d\tau\, \delta^4(y - x(\tau))\, \dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau), \tag{5.5}$$

wobei m die Ruhemasse des Teilchens darstellt und $x(\tau)$ die Weltlinie des Teilchens ist.

Zusätzliche Felder in der Raum-Zeit existieren nicht und mit

$$\nabla_\nu T_{\mathrm{P}}^{\mu\nu}(y) = \frac{\partial}{\partial y^\nu} T_{\mathrm{P}}^{\mu\nu}(y) + {}^0\Gamma_{\nu\lambda}{}^\mu(y) T_{\mathrm{P}}^{\lambda\nu}(y) + {}^0\Gamma_{\nu\lambda}{}^\nu(y) T_{\mathrm{P}}^{\mu\lambda}(y) = 0 \tag{5.6}$$

muß sich die Bewegungsgleichung ergeben. Wir berechnen zuerst die partielle Ableitung:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y^\nu} \frac{m}{\sqrt{-g(y)}} \int d\tau\, \delta^4(y - x(\tau))\, \dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) \\
=\ & m \left(\frac{\partial}{\partial y^\nu} \frac{1}{\sqrt{-g(y)}} \right) \int d\tau\, \delta^4(y - x(\tau))\, \dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) \\
& + \frac{m}{\sqrt{-g(y)}} \int d\tau\, \frac{\partial}{\partial y^\nu} \delta^4(y - x(\tau))\, \dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) \\
=\ & - \frac{m}{2\sqrt{-g(y)}\, g(y)} \frac{\partial g(y)}{\partial y^\lambda} \int d\tau\, \delta^4(y - x(\tau))\, \dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) \\
& - \frac{m}{\sqrt{-g(y)}} \int d\tau\, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta^4(y - x(\tau))\, \dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) \\
=\ & - \frac{m}{\sqrt{-g(y)}}\, {}^0\Gamma_{\kappa\nu}{}^\kappa(y) \int d\tau\, \delta^4(y - x(\tau))\, \dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) \\
& + \frac{m}{\sqrt{-g(y)}} \int d\tau\, \delta^4(y - x(\tau))\, \ddot{x}^\mu(\tau) \\
=\ & - {}^0\Gamma_{\nu\lambda}{}^\nu(y) T_{\mathrm{P}}^{\mu\lambda}(y) + \frac{m}{\sqrt{-g(y)}} \int d\tau\, \delta^4(y - x(\tau))\, \ddot{x}^\mu(\tau).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Hierbei wurden die Identitäten

$$\frac{1}{g} \partial_\nu g = g^{\alpha\kappa} \partial_\nu g_{\alpha\kappa} \tag{5.8}$$

und

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\kappa} \partial_\nu g_{\alpha\kappa} = {}^0\Gamma_{\kappa\nu}{}^\kappa, \tag{5.9}$$

sowie die Eigenschaft der Delta-Funktion

$$\int dp \, \frac{d\delta(p)}{dp} \, f(p) \;\; = \;\; - \int dp \, \delta(p) \, \frac{df(p)}{dp} \tag{5.10}$$

benutzt. Jetzt ist das Ergebnis der Berechnung (5.7) in die Gleichung (5.6) einzusetzten und es ergibt sich

$$\frac{m}{\sqrt{-g(y)}} \int d\tau \, \delta^4(y - x(\tau)) \, \left(\ddot{x}^\mu(\tau) +^0 \Gamma_{\nu\lambda}{}^\mu(y) \dot{x}^\nu(\tau) \dot{x}^\lambda(\tau) \right) \;\; = \;\; 0. \tag{5.11}$$

Damit diese Gleichung immer erfüllt ist, muß gelten:

$$\ddot{x}^\mu(\tau) + {}^0\Gamma_{\nu\lambda}{}^\mu(x(\tau)) \dot{x}^\nu(\tau) \dot{x}^\lambda(\tau) \;\; = \;\; 0. \tag{5.12}$$

Das Teilchen bewegt sich also auf der Geodäten (2.25).

Für unser weiteres Vorgehen ist es noch nötig, anzugeben, daß der Energie-Impuls-Tensor (5.5) mit Hilfe von Beziehung (2.152) aus der Einstein-Hilbert-Wirkung

$$S_{\text{EH}} \;\; = \;\; \int d^4y \sqrt{-g(y)} \left({}^0R(y) + \frac{m}{\sqrt{-g}} \int d\tau \, \delta^4(y - x(\tau)) \, g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) \tag{5.13}$$

folgt, denn im allgemeinen sind die Ausgangsgrössen, die wir benutzten werden und die das Verhalten zusätzlicher Kraftfelder und ihrer Kopplung an unsere Probemassen beinhalten, Raum-Zeit-Wirkungen und keine Energie-Impuls-Tensoren. Diese müssen aus den Wirkungen über (2.152) bestimmt werden.

Die Wirkung (5.13) erhält man, indem man die Lagrangefunktion (2.123) mit Masse und modifizierter Delta-Funktion multipliziert und diese Lagrange-Dichte dann einer Einstein-Hilbert-Wirkung anfügt.

5.1.2 Elektromagnetisches Hintergrundfeld

Die Raumzeitwirkung einer Probeladung q im elektromagnetischen Feld $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ lautet

$$\begin{aligned} S \;\; = \;\; & \int d^4y \sqrt{-g} \left({}^0R - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{-g}} \int d\tau \, \delta^4(y - x(\tau)) \, (m \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + q \dot{x}^\mu A_\mu) \right) . \end{aligned} \tag{5.14}$$

Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Hintergrundfeldes ergibt sich durch Variation von

$$S_{\text{em}} \;\; = \;\; -\frac{1}{2} \int d^4y \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \tag{5.15}$$

nach der Metrik zu

$$T^{(\text{HG})}_{\mu\nu} \;\; = \;\; \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{em}}}{\delta g^{\mu\nu}} \;\; = \;\; F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \tag{5.16}$$

Seine Divergenz stellt nun eine Kraftdichte dar. Zur ihrer Berechnung können bedenkenlos Riemann-Normalkoordinaten benutzt werden, da die Gesetzte der Elektrodynamik in jedem Koordinatensystem gültig sein müssen. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\partial^\nu T^{(\mathrm{HG})}_{\mu\nu} &= (\partial^\nu F_{\mu\alpha})\, F_\nu{}^\alpha + F_{\mu\alpha}\,(\partial^\nu F_\nu{}^\alpha) - \frac{1}{2}\,(\partial_\mu F_{\alpha\beta})\, F^{\alpha\beta} \\
&= (\partial^\nu \partial_\mu A_\alpha - \partial^\nu \partial_\alpha A_\mu)\, F_\nu{}^\alpha + F_{\mu\alpha}\,(\partial^\nu F_\nu{}^\alpha) - \frac{1}{2}\,(\partial_\mu F_{\alpha\beta})\, F^{\alpha\beta} \\
&= (\partial^\nu \partial_\mu A_\alpha)\, F_\nu{}^\alpha + F_{\mu\alpha}\,(\partial^\nu F_\nu{}^\alpha) - (\partial_\mu \partial_\alpha A_\beta)\, F^{\alpha\beta} \\
&= F_{\mu\alpha}\,(\partial^\nu F_\nu{}^\alpha)\,.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Die Kraftdichte ist also

$$F^\mu = -F^{\mu\alpha} \nabla^\nu F_{\nu\alpha} \tag{5.18}$$

wenn (5.17) wieder in allgemeinen Koordinaten dargestellt wird. Die Divergenz $\nabla_\nu F^{\nu\alpha}$ des elektromagnetischen Feldes ist nur an den Stellen des Raumes ungleich null, an denen sich elektrische Ladungen befinden. Am Ort unserer Probeladung muß sie also mit deren Hilfe ausgedrückt werden. Die Kopplung der Probeladung an das elektromagnetische Feld erfolgt in der Wirkung durch das Vektorpotential A. Durch Variation von (5.14) nach A_μ gewinnt man eine Maxwell-Gleichung mit der Probeladung als Quelle

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\delta S}{\delta A_\mu} &= \nabla_\nu F^{\mu\nu} + q \int d\tau\, \delta^4(y - x(\tau))\dot{x}^\mu \\
\rightarrow \quad \nabla^\nu F_{\mu\nu} &= -\,q \int d\tau\, \delta^4(y - x(\tau))\dot{x}_\mu,
\end{aligned} \tag{5.19}$$

wobei der Term $q \int d\tau \delta^4(y - x)\dot{x}_\mu$ als Vier-Stromdichte der Probeladung zu deuten ist. Dies in Gleichung (5.18) eingesetzt ergibt

$$F^\mu = qF^{\mu\alpha} \int d\tau\, \delta^4(y - x(\tau))\dot{x}_\alpha. \tag{5.20}$$

Der Energie-Impuls-Tensor der Probe ergibt sich mit

$$T^{(\mathrm{P})}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\mathrm{M}}}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{5.21}$$

aus der Materiewirkung

$$S_{\mathrm{M}} = \int d^4y \int d\tau\, \delta^4(y - x(\tau))\,(m\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + q\dot{x}^\mu A_\mu)\,. \tag{5.22}$$

Dabei ergibt sich wiederum der Energie-Impuls-Tensor (5.5), denn der Term $\dot{x}^\mu A_\mu$ hängt im Gegensatz zu $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu$ nicht von der Metrik ab, da das Vektorpotential A kein kontravarianter Vektor, sondern eine kovariante 1-Form ist.

Mit (5.3) erhält man jetzt als Gleichung der Weltlinie die Bewegungsgleichung einer Punktladung mit 4-Lorentz-Kraft:

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} = qF^{\mu\alpha} u_\alpha. \tag{5.23}$$

5.2 Dirac-Teilchen und Kalb-Ramond-Feld

Am elektromagnetischen Fall hat sich gezeigt, wie man nur aus Raum-Zeit-Wirkungen die Bewegungsgleichungen für Probeteilchen in Hintergrundfeldern erhält. Nun sollen die Kräfte eines Kalb-Ramond-Hintergrundfeldes auf Probeteilchen hergeleitet werden. Ein Kopplungsterm wie im elektromagnetischen Fall existiert allerdings nur für Dirac-Teilchen wegen des Dirac-Operators mit Torsion (4.58).

Die Raum-Zeit-Wirkung eines Dirac-Teilchens in diesem total antisymmetrischen Torsionsfeld ist durch

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left({}^0R - H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma} - i\bar{\psi}\mathcal{D}^{(\mathrm{H})}\psi + m\bar{\psi}\psi\right) \tag{5.24}$$

gegeben. Die ψ-Felder sind die vierkomponentigen Dirac-Spinoren. Die Wirkung des Hintergrundfeldes ist hier

$$S_{\mathrm{H}} = -\int d^4x\sqrt{-g}H^{\alpha\beta\gamma}H_{\alpha\beta\gamma}, \tag{5.25}$$

und die Wirkung der Probe lautet

$$S_{\mathrm{M}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(m\bar{\psi}\psi - i\bar{\psi}\mathcal{D}\psi + \frac{i}{4}\bar{\psi}H_{\mu\alpha\beta}\gamma^{[\mu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta]}\psi\right). \tag{5.26}$$

Anders als im Fall einer rein klassisch zu betrachtenden Punktladung enthält die Wirkung eines qunatenmechanischen Teilchens keine Delta-Funktion, und man kann somit keine eindeutige Weltlinie festlegen. Trotzdem wollen wir uns die Probeverteilung als lokalisiert um ihren Schwerpunkt vorstellen und aus der Kraftdichte des Hintergrundfeldes eine Kraft, die auf diesen Schwerpunkt wirkt, ableiten. Dabei entfällt die Aufgabe, den Energie-Impuls-Tensor der Probeverteilung und seine Vier-Divergenz explizit auszurechnen.

Durch Variation von (5.25) nach der Metrik erhält man den Energie-Impuls-Tensor

$$T^{(\mathrm{HG})}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\mathrm{EM}}}{\delta g^{\mu\nu}} = 3H_{\mu\alpha\beta}H_{\nu}{}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma}. \tag{5.27}$$

Zur Berechnung der Kraftdichte sollen auch hier Normalkoordinaten verwendet werden, da man, wenn man die H-Feld-Torsion als zusätzliches Feld auf einer Raum-Zeit mit Krümmung ansieht, genau wie im elektromagnetischen Fall und für alle Naturgesetze, die Allgemeingültigkeit seiner Gesetzmäßigkeiten in beliebigen Koordinaten forden muß. Die Rechnung liefert

$$\begin{aligned}
\partial^\nu T^{(\mathrm{HG})}_{\mu\nu} &= 3\left(\partial^\nu H_{\mu\alpha\beta}\right)H_{\nu}{}^{\alpha\beta} + 3H_{\mu\alpha\beta}\left(\partial^\nu H_{\nu}{}^{\alpha\beta}\right) - \left(\partial_\mu H_{\alpha\beta\gamma}\right)H^{\alpha\beta\gamma}\\
&= 3\left(\partial^\nu\partial_\mu B_{\alpha\beta}\right)H_{\nu}{}^{\alpha\beta} + 3H_{\mu\alpha\beta}\left(\partial^\nu H_{\nu}{}^{\alpha\beta}\right) - 3\left(\partial_\mu\partial_\alpha B_{\beta\gamma}\right)H^{\alpha\beta\gamma}\\
&= 3H_{\mu\alpha\beta}\left(\partial^\nu H_{\nu}{}^{\alpha\beta}\right),
\end{aligned} \tag{5.28}$$

und damit ist

$$F^\mu = -3H^{\mu\alpha\beta}\nabla^\nu H_{\nu\alpha\beta}. \tag{5.29}$$

Durch Variation der Wirkung (5.24) nach $B_{\mu\nu}$ ist jetzt die Divergenz des H-Feldes für die Probe zu bestimmen:

$$0 = \frac{\delta S}{\delta B_{\mu\nu}} = \nabla_\alpha \left(H^{\alpha\mu\nu} + \frac{i}{4}\bar{\psi}\gamma^{[\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu]}\psi \right). \qquad (5.30)$$

Diese Gleichung ist die Feldgleichung der Torsion eines Dirac-Teilchens. Es handelt sich hierbei jedoch nicht um einen mit der Maxwell-Gleichung vergleichbaren Ausdruck, denn hier verschwindet die Divergenz der Summe des Feldes und seiner Quelle. Das bedeutet, daß das durch das Dirac-Teilchen hervorgerufene Torsionsfeld außerhalb der Quelle verschwindet und nicht im Raum propagiert, wie etwa das Feld einer elektrischen Punktladung. Dirac-Teilchen kommen als Quellen eines total asymmetrischen Torsionsfeldes, obwohl sie an ein solches koppeln, nicht in Frage. Ein ausgedehntes Feld, sofern es tatsächlich existiert, muß andere Ursachen haben.

Mit Gleichung (5.30) nimmt (5.29) die Form

$$F^\mu = \frac{3i}{4} H^{\mu\alpha\beta}\nabla^\nu \bar{\psi}\gamma_{[\nu}\gamma_\alpha\gamma_{\beta]}\psi \qquad (5.31)$$

an.

Im weiteren wollen wir das Dirac-Probeteilchen als eine um einen Schwerpunk lokalisierte Verteilung ansehen. Auf der Weltlinie des Schwerpunktes des Wellenpaketes wählen wir nun sogenannte zeitorthogonale synchrone Koordinaten [4], in denen das Wegelement die Form

$$ds^2 = g_{00}(x^0)^2 + g_{ij}dx^i dx^j, \qquad (j = 1,2,3) \qquad (5.32)$$

mit

$$g_{00} = -1, \qquad g_{0j} = 0 \qquad \sqrt{-g} = \sqrt{g^{(3)}}, \qquad dx^0 = dt \qquad (5.33)$$

annimmt. Hierbei ist $\sqrt{g^{(3)}}$ die Metrik des dreidimensinalen Raumes zum Zeitpunkt t. Die Vier-Geschwindigkeit lautet genau wie in Normalkoordinaten $u = (1, 0, 0, 0)$.

Jetzt kann die Kraftdichte über das dreidimensionale Volumen der Probe integriert werden und man erhält eine Kraft auf den Schwerpunkt des Dirac-Probeteilchens:

$$f^\mu \approx \frac{3i}{4} H^{\mu\alpha\beta} \int d^3x \sqrt{g^{(3)}}\, \nabla^\nu \bar{\psi}\gamma_{[\nu}\gamma_\alpha\gamma_{\beta]}\psi. \qquad (5.34)$$

Hierbei ist das H-Feld vor das Integral gezogen worden, da angenommen werden kann, daß es sich auf der Ausdehnung der Probe in führender Ordnung nicht ändert. Für das Integral gilt mit dem Gaußschen-Satz

$$\begin{aligned} & \int d^3x \sqrt{g^{(3)}}\, \nabla^\mu \bar{\psi}\gamma_{[\mu}\gamma_\alpha\gamma_{\beta]}\psi \\ = & \int d^3x \sqrt{g^{(3)}}\, \nabla^0 \bar{\psi}\gamma_{[0}\gamma_\alpha\gamma_{\beta]}\psi + \int d^3x \sqrt{g^{(3)}}\, \nabla^j \bar{\psi}\gamma_{[j}\gamma_\alpha\gamma_{\beta]}\psi \\ = & \int d^3x \sqrt{g^{(3)}}\, \nabla^0 \bar{\psi}\gamma_{[0}\gamma_\alpha\gamma_{\beta]}\psi. \end{aligned} \qquad (5.35)$$

Für die Kraftdichte ergibt sich somit

$$f^\mu \;=\; \frac{3i}{4} H^{\mu\alpha\beta} \int d^3x \sqrt{g^{(3)}}\, \nabla^0 \bar{\psi} \gamma_{[0}\gamma_\alpha \gamma_{\beta]}\psi. \tag{5.36}$$

In der Koordinatenwahl (5.32) gilt offensichtlich $\nabla^0 \bar{\psi}\gamma_{[0}\gamma_\alpha\gamma_{\beta]}\psi = \partial^0 \bar{\psi}\gamma_{[0}\gamma_\alpha\gamma_{\beta]}\psi$, da die Metrik partiell nicht von der Zeit abhängt. Aus diesem Grund kann die Zeitableitung auch vor das Integral geschrieben werden. Außerdem gilt $\bar{\psi}\gamma^0 = \psi^+$

$$f^\mu \;=\; \frac{3i}{4} H^{\mu\alpha\beta} \partial_0 \int d^3x \sqrt{g^{(3)}}\, \psi^+ \gamma_{[\alpha}\gamma_{\beta]}\psi. \tag{5.37}$$

Dabei stellt das Integral nichts anderes dar, als den Spin-Erwartungswert[1] in der (α, β)-Ebene:

$$f^\mu \;=\; \frac{3}{2} H^{\mu\alpha\beta} \partial_0 \left\langle S_{\alpha\beta} \right\rangle . \tag{5.38}$$

Diese Gleichung gilt mit dem Prinzip der allgemeinen Kovarianz selbstverständlich in allen Koordinatensystemen:

$$f^\mu \;=\; \frac{3}{2} H^{\mu\alpha\beta} \frac{D}{D\tau} \left\langle S_{\alpha\beta} \right\rangle \;=\; \frac{3}{2} H^{\mu\alpha\beta} u^\nu \nabla_\nu \left\langle S_{\alpha\beta} \right\rangle . \tag{5.39}$$

Es zeigt sich, daß noch eine zweite Gleichung nötig ist, die die Änderung des Spin-Erwartungswertes entlang der Weltlinie beschreibt. Dazu verwenden wir die Dirac-Gleichungen

$$i\gamma^\mu \overset{\text{(H)}}{\nabla}_\mu \psi - m\psi \;=\; 0 \tag{5.40}$$

und setzen sie in den Ausdruck

$$\begin{aligned} \nabla_0 \bar{\psi}\gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\psi \;&=\; \overline{(\nabla_0\psi)}\gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\psi + \bar{\psi}\gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\nabla_0\psi \\ &\quad + \bar{\psi}\left(\nabla_0 \gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\right)\psi \end{aligned} \tag{5.41}$$

ein. Diese Gleichung wollen wir gleich in den Koordinaten (5.32) über den dreidimensionalen Raum integrieren. Es ist klar, daß dabei der letzte Term verschwindet, da die kovarianten Ableitungen der Vierbeine verschwinden, weil sie genau wie die Metrik, die aus ihnen nach (2.29) aufgebaut ist, nicht partiell von der Zeit abhängen.

$$\nabla_0 \gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]} \;=\; \partial_0 \gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]} \;=\; 0. \tag{5.42}$$

Im weiteren können deshalb bedenkenlos Normalkoordinaten verwendet werden.

Aus (5.40) und der Definition der kovarianten Ableitung von Spinoren mit Torsion (2.68) ergibt sich mit $\gamma^0\gamma^0 = 1$

$$\begin{aligned} \partial_0\psi \;&=\; -\gamma^0\gamma^j\partial_j\psi + \frac{1}{4} H_{\mu\alpha\beta}\gamma^0\gamma^{[\mu}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\psi + im\gamma^0\psi \\ &=\; -\gamma^0\gamma^j\partial_j\psi + \frac{1}{4} H_{0ij}\gamma^{[i}\gamma^{j]}\psi + \frac{1}{4} H_{123}\gamma^5\psi + im\gamma^0\psi, \end{aligned} \tag{5.43}$$

[1]Der Spin-Erwarungswert ist definiert durch $< S_{\alpha\beta} >= i/4 \int d^3x \sqrt{g}\, \bar{\psi}\, [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]\, \psi = i/2 \int d^3x \sqrt{g}\, \bar{\psi}\gamma_{[\alpha}\gamma_{\beta]}\psi$ (Siehe Gleichung (2.65) und (2.66) für den Spin-Operator).

mit $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Dies setzten wir in

$$\partial_0 \bar{\psi}\gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\psi = \overline{(\partial_0\psi)}\gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\psi + \bar{\psi}\gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\partial_0\psi \tag{5.44}$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\partial_0 \bar{\psi}\gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\psi &= -\left(\partial_j\bar{\psi}\right)\gamma^j\gamma^0\gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\psi - \bar{\psi}\gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\gamma^0\gamma^j\partial_j\psi \\
&\quad -\frac{1}{4}H_{0ij}\bar{\psi}\gamma^i\gamma^j\gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\psi + \frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\gamma^i\gamma^j\psi H_{0ij} \\
&= -\left(\partial_j\bar{\psi}\right)\gamma^j\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]}\psi - \bar{\psi}\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]}\gamma^j\partial_j\psi \\
&\quad +\frac{1}{4}H_{0ij}\bar{\psi}\gamma^0\left[\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]},\gamma^i\gamma^j\right]\psi \\
&= -\partial_j\left(\bar{\psi}\gamma^j\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]}\psi\right) + \bar{\psi}\left[\gamma^j,\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]}\right]\partial_j\psi \\
&\quad -H_{0j}{}^{\beta}\bar{\psi}\gamma^0\gamma^\alpha\gamma^j\psi - H_{0j}{}^{\alpha}\bar{\psi}\gamma^0\gamma^j\gamma^\beta\psi \\
&= -\partial_j\left(\bar{\psi}\gamma^j\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]}\psi\right) + i\bar{\psi}\left[p^\alpha,\gamma^\beta\right]\psi \\
&\quad -H_{0j}{}^{\beta}\bar{\psi}\gamma^0\gamma^\alpha\gamma^j\psi - H_{0j}{}^{\alpha}\bar{\psi}\gamma^0\gamma^j\gamma^\beta\psi,
\end{aligned} \tag{5.45}$$

wobei auch α und β räumliche Indizes ($\alpha,\beta = 1,2,3$) sind. Der Masseterm verschwindet, da er mit allen anderen Termen kommutiert und sich bei der Operation $\partial_0\psi \to \overline{\partial_0\psi}$ ein Vorzeichenwechsel ergibt. Zudem antikommutiert γ^5 mit allen anderen Gamma-Termen und es gilt $\bar{\gamma}^5 = \gamma^5$ und $\bar{\gamma}^5\gamma^0\gamma^\alpha\gamma^\beta = -\gamma^0\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^5$. Darüber hinaus wurden die nützlichen Kommutatorrelationen

$$[a, bc] = [a,b]\,c + b\,[a,c] \tag{5.46}$$

und

$$a\,[b,c] + [a,c]\,b = a\,\{b,c\} - \{a,c\}\,b \tag{5.47}$$

für drei nichtkommutierende Ausdrücke a, b und c, sowie die Clifford-Algebra (2.63) und die Quantisierungsvorschrift $p^\alpha = -i\partial^\alpha$ verwendet.

Wir arbeiten nun wieder mit den Koordinaten (5.32) und integrieren über den dreidimensionalen Raum

$$\begin{aligned}
& i\int d^3x\sqrt{g^{(3)}}\,\nabla_0\left(\bar{\psi}\gamma^{[0}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]}\right) = 2u^0\partial_0\left\langle S^{\alpha\beta}\right\rangle \\
= \; & i\int d^3x\sqrt{g^{(3)}}\Big[-\nabla_j\left(\bar{\psi}\gamma^j\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]}\psi\right) - \left(H_{0j}{}^{\alpha}\bar{\psi}\gamma^0\gamma^j\gamma^\beta\psi + H_{0j}{}^{\beta}\bar{\psi}\gamma^0\gamma^\alpha\gamma^j\psi\right)\Big] \\
& + \underbrace{2\int d^3x\sqrt{g^{(3)}}\,\bar{\psi}\gamma^{[\beta}p^{\alpha]}\psi}_{=0} \\
= \; & -2H_{0j}{}^{\alpha}u^0\left\langle S^{j\beta}\right\rangle - 2H_{0j}{}^{\beta}u^0\left\langle S^{\alpha j}\right\rangle,
\end{aligned} \tag{5.48}$$

wobei wieder das als konstant angesehene H-Feld vor das Integral gezogen wurde. Außerdem ist davon auszugehen, daß

$$\int d^3x\sqrt{g^{(3)}}\,\bar{\psi}\gamma^{[\beta}p^{\alpha]}\psi = 0, \qquad \alpha,\beta = 1,2,3 \tag{5.49}$$

gilt, denn die Wellenfunktion eines Probeteilchens kann in den Koordinaten (5.32) zu jeder Zeit mit Hilfe einer Gauß-Verteilung $\exp(-x^2/4d^4)$ beschrieben werden:

$$\psi \;=\; \mathcal{N}\mathrm{e}^{-iEt}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4d^4}}U(E). \tag{5.50}$$

Es ist $\mathcal{N}$ der Normierungsfaktor, $E = m\sqrt{1+p^2}$ die Energie des Teilchens und $U(E)$ der Polarisationsanteil des Dirac-Spinors ψ, der nur noch von der Energie abhängt. Der Impulsoperator angewandt auf (5.50) ergibt

$$p^\alpha\psi \;\propto\; x^\alpha\psi, \qquad \alpha \;=\; 1,2,3. \tag{5.51}$$

Alle hiermit gebildeten Erwartungswerte über die Gauß-Verteilung verschwinden.

In allgemeinen Koordinaten können wir nun

$$\frac{D}{D\tau}\left\langle S^{\alpha\beta}\right\rangle + H_{\nu\lambda}{}^{\alpha}u^\nu\left\langle S^{\lambda\beta}\right\rangle + H_{\nu\lambda}{}^{\beta}u^\nu\left\langle S^{\alpha\lambda}\right\rangle \;=\; 0 \tag{5.52}$$

als Bewegungsgleichung für den Spin-Erwartungswert angeben. Das entspricht der kovarianten Ableitung mit Torsion

$$\frac{\overset{(H)}{D}}{D\tau}\left\langle S^{\alpha\beta}\right\rangle \;=\; 0. \tag{5.53}$$

Für die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes (5.39) ergibt sich nun

$$f^\mu \;=\; -\frac{3}{2}H^\mu{}_{\alpha\beta}\left(H_{\nu\lambda}{}^{\alpha}\left\langle S^{\lambda\beta}\right\rangle + H_{\nu\lambda}{}^{\beta}\left\langle S^{\alpha\lambda}\right\rangle\right)u^\nu \;=\; -3H^\mu{}_{\alpha\beta}H_{\nu\lambda}{}^{\alpha}\left\langle S^{\lambda\beta}\right\rangle u^\nu, \tag{5.54}$$

wobei die Torsion quadratisch eingeht. Im lokalen Normalkoordinaten-Ruhesystem wird die Nullkomponente zu null, wie man an den dort möglichen Termen unter Beachtung der Antisymmetrie des H-Feldes und des Spin-Erwartungswertes sofort ablesen kann:

$$\begin{aligned} f^0_{\mathrm{R}} \;=\; & -3\left(H^0{}_{12}H_{03}{}^1\left\langle S^{32}\right\rangle + H^0{}_{13}H_{02}{}^1\left\langle S^{23}\right\rangle + H^0{}_{21}H_{03}{}^2\left\langle S^{31}\right\rangle\right. \\ & \left. + H^0{}_{23}H_{01}{}^2\left\langle S^{13}\right\rangle + H^0{}_{31}H_{02}{}^3\left\langle S^{21}\right\rangle + H^0{}_{32}H_{01}{}^3\left\langle S^{12}\right\rangle\right) \;=\; 0. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Somit handelt es sich bei (5.54) tatsächlich um eine vernünftige Vier-Kraft, da diese im Ruhesystem den Bedingungen

$$f^0_{(\mathrm{R})} \;=\; 0 \tag{5.56}$$

und damit

$$f^\mu f_\mu \;=\; m^2\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2 \tag{5.57}$$

genügt.

Die Bedingung (5.56) muß für eine physikalisch sinnvolle Vier-Kraft, beziehungsweise Vier-Beschleunigung gelten, da die Vier-Geschwindigkeit immer der Einheitsvektor in Zeitrichtung ist, und dies auch im Ruhesystem bleiben muß. Mathematisch wird dies durch

$$u_\mu f^\mu \;=\; 0 \tag{5.58}$$

zum Ausdruck gebracht.

5.3 Klassische Strings und Kalb-Ramond-Feld

In der Stringtheorie [8,9] wird versucht, das Verhalten der Materie nicht durch punktförmige Teilchen mit Koordinaten $x^\mu(\tau)$ zu beschreiben, sondern durch zweidimensionale Objekte in der Raum-Zeit, die durch Funktionen $x^\mu(\tau,\sigma)$ beschrieben werden. Hierbei ist τ weiterhin der Parameter der Eigenzeit, σ hingegen parametrisiert die Längenausdehnung der Strings.

Ein klassischer String koppelt an Gravitation und B-Feld [9] und genügt der Wirkung

$$S = \int d\tau d\sigma \left\{ g_{\mu\nu}\left(-\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + x'^\mu x'^\nu\right) + B_{\mu\nu}\left(\dot{x}^\mu x'^\nu - x'^\mu \dot{x}^\nu\right)\right\}. \tag{5.59}$$

Dabei bedeutet

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{5.60}$$

und

$$x'^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}. \tag{5.61}$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich in diesem Fall sofort durch Variation von (5.59) nach x^μ berechnen. Es ergibt sich eine inhomogene Wellengleichung

$$x''^\mu - \ddot{x}^\mu + {}^0\Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu\, x'^\alpha x'^\beta - {}^0\Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + 2H_{\alpha\beta}{}^\mu \dot{x}^\alpha x'^\beta = 0, \tag{5.62}$$

die sich im Grenzfall, daß die Länge des Strings verschwindet (und damit auch $dx^\mu/d\sigma = 0$), auf die Geodäten-Gleichung (2.25) reduziert.

Wir wollen nun trotzdem eine Raum-Zeit-Wirkung angeben, aus der die Bewegungsgleichungen nach unserer bisherigen Vorgehensweise (5.62) folgen, denn auf diese Weise ergibt sich auch eine Feldgleichung für das Kalb-Ramond-Feld. Die Wirkung lautet

$$\begin{aligned} S = \int d^4y\sqrt{-g}\,\Big\{ & {}^0R - H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma} \\ & + \frac{1}{\sqrt{-g}}\int d\tau d\sigma\, \delta^4(y - x(\tau,\sigma)\left[g_{\mu\nu}\left(-\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + x'^\mu x'^\nu\right)\right. \\ & \left. + \, B_{\mu\nu}\left(\dot{x}^\mu x'^\nu - x'^\mu \dot{x}^\nu\right)\right]\Big\}, \end{aligned} \tag{5.63}$$

Durch eine Variation von (5.63) nach $B^{\mu\nu}$ erhält man die Feldgleichung für das Torsionsfeld:

$$\nabla_\alpha H^{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{3}\int d\tau d\sigma\, \delta^4(y - x(\tau,\sigma)\left(\dot{x}^\mu x'^\nu - x'^\mu \dot{x}^\nu\right). \tag{5.64}$$

Im Gegensatz zu (5.30) handelt es sich hierbei um eine richtige Feldgleichung, analog zur Maxwell-Gleichung (5.19):

$$\nabla_\alpha H^{\alpha\mu\nu} = j^{\mu\nu}, \tag{5.65}$$

mit der Stromdichte zweiter Stufe

$$j^{\mu\nu} = \frac{1}{3}\int d\tau d\sigma\, \delta^4(y - x(\tau,\sigma)\left(\dot{x}^\mu x'^\nu - x'^\mu \dot{x}^\nu\right) \tag{5.66}$$

als Quelle eines ausgedehnten propagierenden Kalb-Ramond-Feldes.

Kapitel 6

Feldtheorie

Wir haben gesehen, daß das Kalb-Ramond-Feld starke Analogien zum elektromagnetischen Feld aufweist. Beispielsweise gleicht der Energie-Impuls-Tensor (5.27) in seinem Aufbau dem Energie-Impuls-Tensor des Maxwell-Feldes (5.16), außerdem ist es uns gelungen eine der Maxwell-Gleichung ähnliche Feldgleichung (5.65) zu finden.

Der Unterschied besteht darin, daß es sich beim Kalb-Ramond-Feld nicht um ein Spin-1-Feld, sondern ein Spin-2-Eichfeld handelt. Dadurch haben die Tensoren eine höhere Stufe als im Maxwell-Fall.

Weiterhin haben wir erkannt, daß das Kalb-Ramond-Feld, egal ob es als Torsion der Raum-Zeit verstanden wird, oder nicht, immer den Charakter eines Eichfeldes trägt. Aus diesem Grund ist es eine interessante Frage, welche Erhaltungsgrößen mit dem Kalb-Ramond-Feld verknüpft sind. Im Maxwell-Fall ist bekannt, daß die Eichinvarianz des elektromagnetischen Feldes die Ladungserhaltung zur Konsequenz hat.

Um unsere nun folgende Untersuchung auf ein sicheres Fundament zu stellen, benötigen wir das Noether-Theorem [31], welches einen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen herstellt.

6.1 Noether-Theorem

Wenn man die Gravitationskräfte in der Raumzeit vernachlässigen kann, also von der Näherung einer flachen Mannigfaltigkeit ausgeht ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$), lässt sich aufgrund der jetzt vorhandenen Isotropie des Raumes das Noether-Theorem für zusätzliche Felder anwenden, das einen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen herstellt. Wir definieren uns hierzu die Raum-Zeit-Wirkung

$$S = \int_\Omega d^4x \, L\left(\Psi^A(x^\lambda), \partial_\mu \Psi^A(x^\lambda)\right) \tag{6.1}$$

als Funktional der Lagrange-Dichte L, die von den Feldern $\Psi^A(x^\lambda)$ und ihren ersten partiellen Ableitungen abhängt. Die Indizierung mit lateinischen Großbuchstaben ist auch hier als Multi-Indizierung im Sinne von (2.54) zu verstehen. Die $\Psi^A(x^\lambda)$ können zum Beispiel die Komponenten von Dirac-Spinoren sein, oder elektromagnetische Vektorpotentiale oder auch das Kalb-Ramond-Feld.

Die Transformationen der Raum-Zeit-Koordinaten

$$x'^\lambda = x'^\lambda(x^\kappa) \tag{6.2}$$

und der Felder

$$\Psi'^A(x'^\lambda) = \Psi'^A(\Psi^B(x^\kappa)), \tag{6.3}$$

die die Wirkung (6.1) in

$$S' = \int\limits_{\Omega'} d^4x'\, L\left(\Psi'^A(x'^\lambda), \partial'_\mu \Psi'^A(x'^\lambda)\right) \tag{6.4}$$

überführen und diese invariant lassen,

$$S' = S, \tag{6.5}$$

sind Symmetrietransformationen.

Wir betrachten nun die infinitesimalen Veränderungen der Raum-Zeit-Koordinaten

$$x'^\lambda = x^\lambda + \delta x^\lambda \tag{6.6}$$

und die infinitesimale Transformation

$$\Psi'^A(x'^\lambda) = \Psi^A(x^\lambda) + \delta\Psi^A(x^\lambda). \tag{6.7}$$

Man bezeichnet $\delta\Psi^A(x^\lambda)$ als totale Variation der Felder $\Psi^A(x^\lambda)$, da sowohl die Änderungen der Felder von Ψ^A nach Ψ'^A, als auch die Veränderung der Raum-Zeit-Koordinaten berücksichtigt werden. Als lokale Variation $\tilde{\delta}\Psi^A(x^\lambda)$ bezeichnet man die infinitesimale Transformation der Felder bei festgehaltenen Koordinaten:

$$\tilde{\delta}\Psi^A(x^\lambda) = \Psi'^A(x^\lambda) - \Psi^A(x^\lambda). \tag{6.8}$$

Zwischen $\tilde{\delta}\Psi^A(x^\lambda)$ und $\delta\Psi^A(x^\lambda)$ besteht der Zusammenhang:

$$\tilde{\delta}\Psi^A(x^\lambda) = \left\{\Psi'^A(x^\lambda) - \Psi'^A(x'^\lambda)\right\} + \left\{\Psi'^A(x'^\lambda) - \Psi^A(x^\lambda)\right\}, \tag{6.9}$$

also

$$\tilde{\delta}\Psi^A(x^\lambda) = \delta\Psi^A(x^\lambda) - \left\{\Psi'^A(x'^\lambda) - \Psi'^A(x^\lambda)\right\}. \tag{6.10}$$

Berücksichtigt man nur die erste Ordnung in (6.10)

$$\tilde{\delta}\Psi^A(x^\lambda) \approx \delta\Psi^A(x^\lambda) - \partial_\mu\Psi'^A(x^\lambda)\delta x^\mu \approx \delta\Psi^A(x^\lambda) - \partial_\mu\Psi^A(x^\lambda)\delta x^\mu, \tag{6.11}$$

erkennt man, daß von der totalen Variation der Teil abzuziehen ist, der nur durch die Veränderung der Koordinaten zustandekommt, um die lokale Variation zu erhalten.

Im Gegensatz zur totalen Variation vertauscht die lokale Variation mit der Differentiation:

$$\partial_\mu\{\tilde\delta\Psi^A(x^\lambda)\} \;=\; \tilde\delta\left\{\partial_\mu\Psi^A(x^\lambda)\right\}. \tag{6.12}$$

Da unsere Transformationen der Koordinaten und Felder als passive Transformationen interpretiert werden können, wird in Gleichung (6.1) und (6.4) über dasselbe vierdimensionale Volumen Ω integriert, das jeweils mit verschiedenen Koordinaten beschrieben wird. Die differentiellen Volumina transformieren sich demnach mit der Jacobi-Determinante. In erster Ordnung genügt:

$$\frac{\partial(x'^\lambda)}{\partial(x^\mu)} \;=\; \left|\eta^\lambda{}_\mu + \frac{\partial\delta x^\lambda}{\partial x^\mu}\right| \;\approx\; \mathbb{1} + \frac{\partial\delta\mathrm{x}^\mu}{\partial\mathrm{x}^\mu}. \tag{6.13}$$

Für die Lagrange-Dichte gilt dadurch

$$L' \;=\; L + \delta L, \tag{6.14}$$

so daß man für die totale Variation der Wirkung in erster Ordnung

$$\begin{aligned}\delta S = S' - S = \int\limits_{\Omega'} d^4x\, L' - \int\limits_{\Omega} d^4x\, L &= \int\limits_{\Omega} d^4x\, \left[\Big(L + \delta L\Big)\left(1 + \frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\mu}\right) - L\right] \\ &= \int\limits_{\Omega} d^4x\, \left[\delta L + \frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\mu}L\right] \end{aligned} \tag{6.15}$$

bekommt.

Wie in Gleichung (6.11) besteht für die Lagrange-Dichte ein Zusammenhang zwischen ihrer totalen Variation δL und ihrer lokalen Variation $\tilde\delta L$:

$$\tilde\delta L \;=\; \delta L - \partial_\mu L \delta x^\mu. \tag{6.16}$$

Die lokale Variation kann als

$$\tilde\delta L \;=\; \frac{\partial L}{\partial\Psi^A(x^\lambda)}\,\tilde\delta\Psi^A(x^\lambda) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Psi^A(x^\lambda))}\,\tilde\delta\left\{\partial_\mu\Psi^A(x^\lambda)\right\} \tag{6.17}$$

ausgeschrieben werden. Durch die Verwendung der Eigenschaft der lokalen Variation, mit der partiellen Ableitung zu verstauschen, wird diese Gleichung zu

$$\tilde\delta L \;=\; \frac{\partial L}{\partial\Psi^A(x^\lambda)}\,\tilde\delta\Psi^A(x^\lambda) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Psi^A(x^\lambda))}\,\partial_\mu\left\{\tilde\delta\Psi^A(x^\lambda)\right\}, \tag{6.18}$$

was unter Verwendung unserer bisherigen Erkenntnisse auch als

$$\tilde\delta L \;=\; \left\{\frac{\partial L}{\partial\Psi^A(x^\lambda)} - \partial_\mu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Psi^A(x^\lambda))}\right\}\tilde\delta\Psi^A(x^\lambda) + \partial_\mu\left\{\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Psi^A(x^\lambda))}\,\tilde\delta\Psi^A(x^\lambda)\right\} \tag{6.19}$$

geschrieben werden kann. Da die Felder Ψ^A den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi^A(x^\lambda)} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi^A(x^\lambda))} = 0 \tag{6.20}$$

genügen sollen, reduziert sich (6.19) zu

$$\tilde{\delta} L = \partial_\mu \left\{ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi^A(x^\lambda))} \tilde{\delta} \Psi^A(x^\lambda) \right\}. \tag{6.21}$$

Jetzt setzt man (6.21) und (6.14) in (6.15) ein

$$\delta S = \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu \left\{ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi^A(x^\lambda))} \tilde{\delta} \Psi^A(x^\lambda) + L \delta x^\mu \right\} \tag{6.22}$$

und erhält daraus mit Hilfe von (6.11) den Ausdruck

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu \left\{ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi^A(x^\lambda))} \delta \Psi^A(x^\lambda) \right. \\ & - \left. \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi^A(x^\lambda))} \partial_\nu \Psi^A(x^\lambda) - L\, \delta^\mu{}_\nu \right) \delta x^\nu \right\}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Aufgrund von Gleichung (6.5) verschwindet die totale Variation der Wirkung

$$\delta S = 0. \tag{6.24}$$

Da aber das Integrationsvolumen beliebig gewählt werden kann, muß der Integrand verschwinden. Diesen definiert man sich als Viererstromdichte

$$j^\mu_{(\mathrm{N})}(x^\lambda) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi^A(x^\lambda))} \delta \Psi^A(x^\lambda) - \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi^A(x^\lambda))} \partial_\nu \Psi^A(x^\lambda) - L \delta^\mu{}_\nu \right) \delta x^\nu, \tag{6.25}$$

die sich aus den Variationen der Felder und der Koordinaten zusammensetzt, und es gilt der differentielle Erhaltungssatz

$$\partial_\mu j^\mu_{(\mathrm{N})}(x^\lambda) = 0. \tag{6.26}$$

Um zu einem globalen Erhaltungssatz zu gelangen, hat man diese Kontinuitätsgleichung über das gesamte dreidimensionale Volumen zu integrieren

$$0 = \int d^3x\, \partial_\mu j^\mu_{(\mathrm{N})}(x^\lambda) = \int d^3x\, \frac{\partial j^0_{(\mathrm{N})}(\vec{x},t)}{\partial t} + \int d^3x\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{(\mathrm{N})}(\vec{x},t) \tag{6.27}$$

und zu beachten, daß die Felder und ihre Änderungen im Unendlichen verschwinden. Mit dem Gaußschen-Satz verschwindet der zweite Term

$$\int d^3x\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{(\mathrm{N})}(\vec{x},t) = \oint d\vec{\sigma} \cdot \vec{j}_{(\mathrm{N})}(\vec{x},t) \equiv 0 \tag{6.28}$$

als Oberflächenterm und die Erhaltungsgröße des Noether-Theorems ist gegeben durch

$$F(t) = \int d^3x\, j^0_{(\mathrm{N})}(\vec{x},t); \qquad \frac{\partial}{\partial t} F(t) = 0. \tag{6.29}$$

6.2 Eichinvarianz und Erhaltungsgrößen

Das Kalb-Ramond-Feld ist ein Eichfeld. Das bedeutet, daß das durch die Gleichung

$$H_{\alpha\beta\gamma} \;=\; \partial_\alpha B_{[\beta\gamma]} + \partial_\beta B_{[\gamma\alpha]} + \partial_\gamma B_{[\alpha\beta]} \tag{6.30}$$

definierte Feld invariant ist unter der Transformation

$$B'_{\nu\lambda} \;=\; B_{\nu\lambda} + \partial_{[\nu}\xi_{\lambda]}, \tag{6.31}$$

mit dem beliebigen Vektorfeld ξ_ν. Dies steht in Analogie zum elektromagnetischen Feld

$$F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{6.32}$$

welches invariant ist unter der Transformation

$$A'_\alpha \;=\; A_\alpha + \partial_\alpha f, \tag{6.33}$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion f.

Mit diesen Eichtransformationen müssen Erhaltungsgrößen verknüpft sein, denn auch sie gehören zu den Symmetrietransformationen. Als Beispiel wollen wir zuerst das elektromagnetische Feld behandeln, denn es ist bekannt, daß die Transformation (6.33) zur Ladungserhaltung führt. Daraufhin werden wir den Formalismus auf den Fall des Kalb-Ramond-Feldes erweitern.

6.2.1 Beispiel Maxwell-Feld

Die Lagrange-Dichte eines im flachen Raum propagierenden elektromagnetischen Feldes, das an eine Viererstromdichte $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ koppelt, ist gegeben durch

$$L \;=\; -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - j_\alpha A^\alpha \tag{6.34}$$

mit der dazugehörigen Feldgleichung

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \;=\; j^\beta. \tag{6.35}$$

Hierbei ist ρ die elektrische Ladungsdichte und $\vec{j}$ die dreidimensionale Stromdichte. Die Eichtransformation (6.33) ändert die Lagrange-Dichte (6.34) in

$$L' \;=\; L - j^\alpha \partial_\alpha f \;=\; L - \partial_\alpha\left(j^\alpha f\right) + f\partial_\alpha j^\alpha. \tag{6.36}$$

Der letzte Term ist null, wegen der Antisymmetrie von $F^{\alpha\beta}$

$$\partial_\alpha j^\alpha \;=\; \partial_\alpha\partial_\beta F^{\beta\alpha} \;=\; 0, \tag{6.37}$$

der mittlere Term verschwindet, wenn man (6.36) in Gleichung (6.1) einsetzt, als Oberflächenterm, so daß die Wirkung nicht verändert wird. Die Eichtransformation (6.33) ist also auch eine Symmetrietransformation mit der Variation

$$\delta A_\alpha \;=\; A'_\alpha - A_\alpha \;=\; \partial_\alpha f. \tag{6.38}$$

Verwendet man nun (6.23), kann man die Erhaltungsgröße finden. Da Eichtransformationen die Koordinaten unberührt lassen, erhält man

$$\begin{aligned} \delta S &= -\int d^4x\, \partial_\mu \left\{F^{\mu\nu}\partial_\nu f\right\} \;=\; -\int d^4x\, (j^\nu \partial_\nu f + \underbrace{F^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu}_{=0} f) \\ &= -\underbrace{\int d^4x\, \partial_\nu (j^\nu f)}_{=0} + \int d^4x\, (\partial_\nu j^\nu) f \;=\; 0. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Die Eichfunktion ist beliebig, deswegen ist das Ergebnis einfach die schon wegen der Antisymmetrie des Feldstärke-Tensors bekannte Relation $\partial_\nu j^\nu = 0$. Obwohl das auf den ersten Blick recht trivial anmutet, ist es doch nützlich, denn durch diese Identifikation der elektrischen Stromdichte mit der Noether-Stromdichte ist eine Integration der Nullkomponente über den dreidimensionalen Raum gerechtfertigt. Aus der Kenntnis der Komponenten der Stromdichte ist sofort ersichtlich, daß man dabei die Gesamtladung der durch die Stromdichte beschriebenen Ladungsverteilung ermittelt

$$F \;=\; \int d^3x\, j^0 \;=\; \int d^3x\, \rho \;=\; \underline{\underline{4\pi\, Q}}, \tag{6.40}$$

die hierdurch als erhalten erkannt wird.

6.2.2 Kalb-Ramond-Feld

Wir nehmen an, daß das Kalb-Ramond-Feld analog zum elektromagnetischen Feld an einen Stromdichte-Tensor zweiter Stufe koppelt:

$$\partial_\alpha H^{\alpha\beta\gamma} \;=\; j^{\beta\gamma}. \tag{6.41}$$

Die Lagrange-Dichte lautet

$$\mathcal{L} \;=\; -H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma} - j_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}. \tag{6.42}$$

Durch die Eichtranformation (6.31)ergibt sich die neue Lagrangedichte

$$\mathcal{L}' \;=\; \mathcal{L} - j_{\alpha\beta}\partial^{[\alpha}\xi^{\beta]} \;=\; \mathcal{L} - \partial^\alpha j_{[\alpha\beta]}\xi^\beta - \underbrace{\xi^{[\alpha}\partial^{\beta]} j_{\alpha\beta}}_{=0}. \tag{6.43}$$

Der hintere Term verschwindet wegen der Asymmetrie von $H^{\mu\alpha\beta}$

$$\partial^\alpha j_{\alpha\beta} \;=\; \partial^\alpha\partial^\mu H^{\mu\alpha\beta} \;=\; 0, \tag{6.44}$$

der andere zusätlichen Terme ist auch hier in der Wirkung (6.1) ein Oberflächenterm, so daß ganz analog zum elektromagnetischen Fall die Eichtransformation als Symmetrietransformation anzusehen ist. Mit der Variation

$$\delta B_{\nu\lambda} \;=\; \partial_{[\nu}\xi_{\lambda]} \tag{6.45}$$

ergibt sich aus (6.23):

$$\begin{aligned}\delta S &= -6\int d^4x\,\partial_\mu\left\{H^{\mu\nu\lambda}\partial_{[\nu}\xi_{\lambda]}\right\} \;=\; -6\int d^4x\,(j^{\nu\lambda}\partial_{[\nu}\xi_{\lambda]} + \underbrace{H^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu\partial_{[\nu}}_{=0}\xi_{\lambda]})\\ &= -\underbrace{\int d^4x\,\partial_\nu(j^{[\nu\lambda]}\xi_\lambda)}_{=0} + \int d^4x\,(\partial_\nu j^{[\nu\lambda]})\xi_\lambda \;=\; 0.\end{aligned} \tag{6.46}$$

Als Erhaltungsgröße dieser hypothetischen Stromverteilung findet man

$$F^\lambda \;=\; \int d^3x\, j^{0\lambda}. \tag{6.47}$$

6.2.2.1 Dirac-Teilchen

Im flachen Raum lautet die Wirkung des Kalb-Ramond-Feldes und seiner Ankopplung an Dirac-Teilchen

$$S \;=\; \int d^4x\left(-H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma} + \frac{i}{4}\bar\psi\gamma_{[\alpha}\gamma_\beta\gamma_{\gamma]}\psi H^{\alpha\beta\gamma}\right), \tag{6.48}$$

wobei nur das Hintergrundfeld und der Kopplungsterm berücksichtigt werden. Unter Verwendung von Gleichung (6.30) lässt sich der hintere Term umschreiben zu

$$\begin{aligned}\frac{i}{4}\bar\psi\gamma_{[\alpha}\gamma_\beta\gamma_{\gamma]}\psi H^{\alpha\beta\gamma} &= \frac{i}{4}\bar\psi\gamma_{[\alpha}\gamma_\beta\gamma_{\gamma]}\psi\left(\partial^\alpha B^{\beta\gamma} + \partial^\gamma B^{\alpha\beta} + \partial^\beta B^{\gamma\alpha}\right)\\ &= \frac{i}{4}\left[\partial^\alpha\left(\bar\psi\gamma_{[\alpha}\gamma_\beta\gamma_{\gamma]}\psi B^{\beta\gamma}\right) + \partial^\gamma\left(\bar\psi\gamma_{[\alpha}\gamma_\beta\gamma_{\gamma]}\psi B^{\alpha\beta}\right)\right.\\ &\quad + \partial^\beta\left(\bar\psi\gamma_{[\alpha}\gamma_\beta\gamma_{\gamma]}\psi B^{\gamma\alpha}\right) - \left(\partial^\alpha\bar\psi\gamma_{[\alpha}\gamma_\beta\gamma_{\gamma]}\psi\right)B^{\beta\gamma}\\ &\quad \left. - \left(\partial^\gamma\bar\psi\gamma_{[\alpha}\gamma_\beta\gamma_{\gamma]}\psi\right)B^{\alpha\beta} - \left(\partial^\beta\bar\psi\gamma_{[\alpha}\gamma_\beta\gamma_{\gamma]}\psi\right)B^{\gamma\alpha}\right]\\ &= \frac{3i}{4}\,\partial^\alpha\left(\bar\psi\gamma_{[\alpha}\gamma_\beta\gamma_{\gamma]}\psi B^{\beta\gamma}\right) - \frac{3i}{4}\left(\partial^\alpha\bar\psi\gamma_{[\alpha}\gamma_\beta\gamma_{\gamma]}\psi\right)B^{\beta\gamma},\end{aligned} \tag{6.49}$$

so daß in (6.48) schließlich nur noch

$$S \;=\; \int d^4x\left[-H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma} - 3\left(\partial^\alpha\bar\psi\gamma_{[\alpha}\gamma_\beta\gamma_{\gamma]}\right)B^{\beta\gamma}\right] \tag{6.50}$$

übrigbleibt, da der Oberflächenterm verschwindet.

Dieselbe Rechnung haben wir im übrigen bereits schon einmal verwendet, um aus der Wirkung (5.24) die Feldgleichung (5.30) durch Variation nach $B^{\mu\nu}$ zu bestimmen, ohne dies explizit zu erwähnen.

Mit der Identifikation

$$j^{\nu\lambda} \;=\; \frac{3i}{4}\,\partial_\alpha\bar{\psi}\gamma^{[\alpha}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda]}\psi \tag{6.51}$$

kann nun (6.29) angewandt werden, um hiervon eine globale Erhaltungsgrösse zu finden:

$$\begin{aligned} F^{\lambda} &= \frac{3i}{4}\int d^3x\,\partial_\beta\partial_\alpha\bar{\psi}\gamma^{[\alpha}\gamma^{0}\gamma^{\lambda]}\psi \\ &= \frac{3i}{4}\int d^3x\,\partial_\alpha\partial_0\bar{\psi}\gamma^{[\alpha}\gamma^{0}\gamma^{0]}\psi + \frac{3i}{4}\int d^3x\,\partial_j\partial_\alpha\bar{\psi}\gamma^{[\alpha}\gamma^{j}\gamma^{0]}\psi \;=\; 0. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Die vom Dirac-Teilchen hervorgerufene Stromdichte, die an das Kalb-Ramond-Feld koppelt, besitzt keine globale Erhaltungsgrösse, was die Tatsache unterstreicht, daß Dirac-Teilchen nicht die Quellen eines ausgedehnten Torsions-Feldes sein können.

6.2.2.2 Klassische Strings

Bei klassischen Strings kann man nun nach Gleichung (5.66) für die Stromdichte

$$j^{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{3}\int d\tau d\sigma\,\delta^4(y-x(\tau,\sigma)\,(\dot{x}^{\mu}x'^{\nu}-x'^{\mu}\dot{x}^{\nu}) \tag{6.53}$$

einsetzen. Die Integration (6.47) liefert

$$F^0 \;=\; 0, \qquad F^i \;=\; \frac{1}{3}\int d\tau d\sigma\,\delta(y^0-x^0(\tau,\sigma))\left(\dot{x}^0x'^i-x'^0\dot{x}^i\right). \tag{6.54}$$

Jetzt kann man das Koordinatensystem so wählen, daß die x^0-Komponente die Eigenzeit ist

$$x^0(\tau,\sigma) \;=\; x^0(\tau)=\tau. \tag{6.55}$$

Dadurch verschwindet die Ableitung der x^0-Komponente nach σ und es bleibt

$$F^i \;=\; \frac{1}{3}\int d\sigma\,x'^i(\tau,\sigma) \tag{6.56}$$

übrig. Die Integration über σ ist sofort ausführbar, da σ ein Parameter über die Länge des Strings ist:

$$F^i(\tau) \;=\; \frac{1}{3}\left[x^i(\tau,\text{Anfangspunkt})-x^i(\tau,\text{Endpunkt})\right]. \tag{6.57}$$

Die erhaltene Ladung ist also die räumliche Ausrichtung des klassischen Strings. Im Fall geschlossener Strings, bei denen Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, verschwindet sie.

Dieses Ergebnis kann nur für den Fall kosmischer Strings, bei denen sich B-Feld und String wechselseitig beeinflussen, sinnvoll interpretiert werden [37]. Bei fundamentalen Strings, die quantisiert werden, wird nämlich nicht die Wirkung gleichzeitig nach Probe und Feld variiert, sondern das B-Feld wird als gegeben vorausgesetzt, beziehungsweise die Strings selbst sind die Quanten des Feldes.

Kapitel 7

Spin-Präzession und Myonen-Experimente

Mit den Gleichungen (5.52) und (5.54) haben wir gesehen, wie ein als Torsion der Raum-Zeit aufgefasstes Kalb-Ramond-Feld über den Dirac-Operator mit Torsion (2.68) an den Spin von quantenmechanischen Spin-1/2-Teilchen koppelt. Dies eröffnet die Möglichkeit, ein vorhandenes, im Raum propagierendes Kalb-Ramond-Feld experimentell nachzuweisen, und damit eine erste indirekte Bestätigung für die Richtigkeit der String-Theorie zu erhalten.

Für derartige Versuche sind Myonen besonders gut geeignet. Diese Spin-1/2-Elementarteilchen mit Elementarladung e und Ruhemasse $m = 105,6\,\mathrm{MeV}$ besitzen eine mittlere Lebensdauer von $T = 2,2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$ in ihrem lokalen Ruhesystem und zerfallen dann in Neutrinos und ein Elektron. Dabei wird das Elektron in die Richtung emmitiert, in die der Spin im Moment des Zerfalls polarisiert ist.

Dieser Effekt wird bereits experimentell dazu ausgenutzt, um das anomale magnetische Moment $a = g/2 - 1$ der Myonen[1] zu messen. Das anomale magnetische Moment von Teilchen mit Spin kann beispielsweise über die nichtrelativistische Larmor Präzessions-Frequenz im magnetischen Feld B

$$\Omega_{\mathrm{L}} = g\,\frac{e}{2m}\,B = \left(1 + \frac{g-2}{2}\right)\frac{e}{m}\,B = (1+a)\,\frac{e}{m}\,B \tag{7.1}$$

definiert werden. In solchen Näherungsrechnungen ist es ausreichend, den gyromagnetischen Faktor exakt als $g = 2$ anzunehmen, so daß a verschwindet. Genaue numerische Berechnungen unter Berücksichtigung der Quantenelektrodynamik ergeben den Wert

$$a_{\mathrm{theory}} = 0.0011659188 \tag{7.2}$$

für Myonen im Standartmodell der Elementarteilchenphysik. Präzise Messungen mit Beschleunigern [35] ergeben jedoch den Wert

$$a_{\mathrm{exp}} = 0.0011659203. \tag{7.3}$$

[1] g ist der gyromagnetische Faktor.

Die Abweichung

$$\Delta a \;=\; a_{\text{theory}} - a_{\text{exp}} \;\approx\; -1,5 \cdot 10^{-9} \tag{7.4}$$

liegt ausserhalb des Messfehlers. Sie ist in etwa von allen bisherigen Experimenten bestätigt worden und gibt Anlass zu Spekulationen über neue Physik jenseits des Standardmodells der Elementarteilchenphysik.

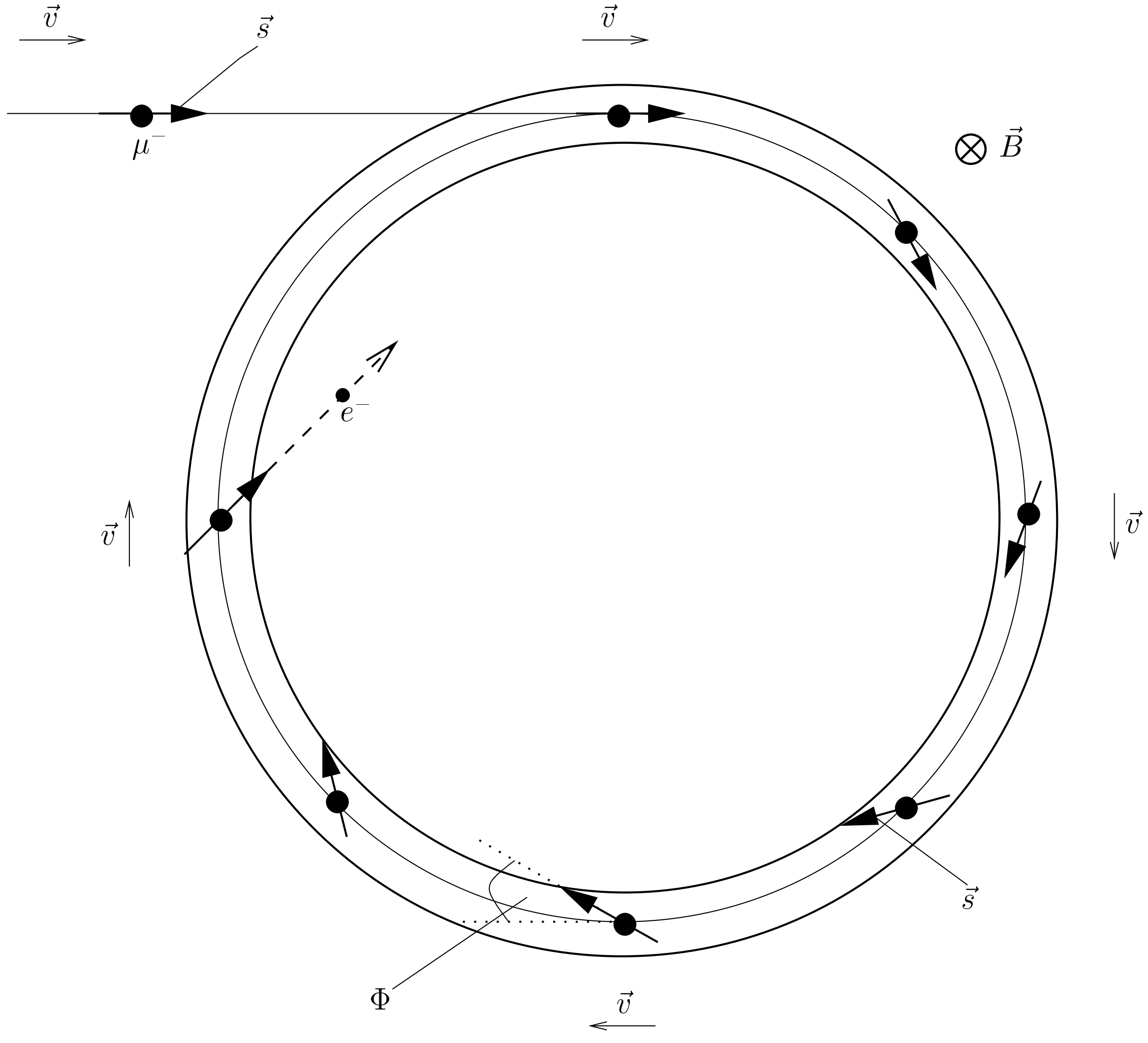

Abbildung 7.1: Schematischer Versuchsaufbau

Die Abbildung 7.1 zeigt den schematischen Versuchsaufbau zur experimentellen Bestimmung des anomalen magnetischen Momentes. Myonen, deren Spin in die Bewegungsrichtung polarisiert ist, werden durch ein magnetisches Feld innerhalb eines Speicherringes auf eine Kreisbahn gelenkt. Zusätzlich zum magnetischen Feld sind in realen Experimenten eventuell noch zusätzliche elektrische Führungsfelder vorhanden. Durch die Felder ändert sich die Polarisation des Spin und es öffnet sich der Winkel Φ zwischen Polarisationsrichtung $\vec{s}$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$. Nach einiger Zeit zerfallen die Myonen und die Richtung des Zerfallselektrons kann mit Hilfe von Detektoren, die um den Beschleuniger herum angeordnet sind, gemessen werden. Die Anzahl der messbaren Zerfallselektronen ist dabei durch

$$N = N_0\, e^{\frac{-t}{\gamma T}} \left[1 - A\cos\left(\Omega t + \varphi\right)\right] \tag{7.5}$$

gegeben. Die Anzahl aller Zerfälle, der Phasenwinkel φ und der Asymmetrie-Parameter A sind von der Energie und der Anzahl der gespeicherten Myonen abhängig. Die Präzessionsfrequenz Ω ist die zeitliche Änderung des Winkels Φ

$$\Omega = \frac{d\Phi}{dt}, \tag{7.6}$$

ausserdem ist γT die Zerfallszeit der Myonen im Laborsystem, wobei γ der relativistische Lorentz-Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{7.7}$$

ist[2]. Anhand der Richtung der Zerfallselektronen kann nun die Präzessionsfrequenz des Myonenspins festgestellt werden[3]. Aus dem Zusammenhang [34]

$$\Omega = \frac{e}{m}\left\{a\left(\vec{B} \times \vec{n}\right) \cdot \vec{v} - \left(a - \frac{1}{\gamma^2 - 1}\right)\frac{\vec{n} \cdot \vec{E}}{v}\right\} \tag{7.8}$$

zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern und der Präzessionsfrequenz wird schließlich auf das anomale magnetische Moment der Myonen geschlossen. Der Vektor $\vec{n}$ ist die Spin-Komponente, die senkrecht auf der Myonengeschwindigkeit $\vec{v}$ steht.

Dasselbe Experiment kann auch für positiv geladene Anti-Myonen durchgeführt werden, dabei ist allerdings das Magnetfeld umzukehren und anstelle von Elektronen entstehen Positronen als Zerfallsprodukte.

Die Abweichung (7.4) vom theoretisch zu erwartenden Wert wollen wir im Folgenden durch das Kalb-Ramond-Feld erklären. Zuerst soll dazu die Gleichung (7.8) hergeleitet werden, und dann, dazu analog, eine Gleichung, die mit Hilfe von (5.52) die Präzessionsfrequenz im Kalb-Ramond-Feld angibt.

Gravitative Einflüsse können bei Experimenten der Teilchenphysik vernachlässigt werden, da sie im Allgemeinen unterhalb der Messgenauigkeit liegen oder bereits vom Experimentator in seiner Auswertung mit berücksichtigt werden. Daher genügt es, die folgenden Berechnungen speziell relativistisch im flachen Raum ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$) durchzuführen.

7.1 Spin-Präzession im elektromagnetischen Feld

Zur Herleitung der Gleichung der Spin-Präzession im elektromagnetischen Feld (7.8) wird anstelle eines Spin-Tensors zweiter Stufe (5.52) ein Spin-Vektor[4]

$$s = \left(s^0\,, \vec{s}\right) \tag{7.9}$$

[2] v ist der Betrag des dreidimensionalen Geschwindigkeits-Vektors $\vec{v}$ ($v = |\vec{v}|$).

[3] Auf messtechnische Details soll in dieser Arbeit verzichtet werden.

[4] Es wird der Kleinbuchstabe s verwendet, um den Spin-Vektor vom Torsions-Vektor S zu unterscheiden.

verwendet. Es muß davon ausgegangen werden, daß die zeitliche Komponente des Spin-Vektors im momentanen Ruhesystem des Teilchens verschwindet und der Spin-Vektor nur durch seine räumlichen Komponenten gegeben ist:

$$s_{\mathrm{R}} = (0\,, \vec{s}_{\mathrm{R}})\,. \tag{7.10}$$

Diese Bedingung wird in allen Bezugsystemen durch die Bedingung

$$u_\mu s^\mu = 0 \tag{7.11}$$

beschrieben.

Im flachen Raum ist die Vier-Geschwindigkeit durch

$$u = \left(u^0\,, \vec{u}\right) = \gamma\,(1\,, \vec{v}) \tag{7.12}$$

gegeben, mit dem Lorentz-Faktor (7.7) und dem dreidimensionalen Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$. Damit ergibt sich

$$s^0 = \vec{v}\cdot\vec{s} \tag{7.13}$$

als Bewegungsgleichung der zeitlichen Komponente des Spin-Vektors.

Durch zeitliches Ableiten der Bedingung (7.11) stellt man fest, daß

$$\frac{ds_\kappa}{d\tau}\,u^\kappa = -s_\kappa\,\frac{du^\kappa}{d\tau} \tag{7.14}$$

gilt. Im lokalen Ruhesystem des Teilchens findet sich daher die Bewegungsgleichung der zeitlichen Komponente

$$\frac{ds^0_{\mathrm{R}}}{d\tau} = \frac{d\vec{v}}{d\tau}\cdot\vec{s}_{\mathrm{R}}. \tag{7.15}$$

Im äusseren magnetischen Feld erfüllt der räumliche Anteil des Spin-Vektors die Bewegungsgleichung [34,28]

$$\frac{d\vec{s}_{\mathrm{R}}}{d\tau} = \frac{ge}{2m}\,\vec{s}_{\mathrm{R}}\times\vec{B}. \tag{7.16}$$

Dabei ist $\vec{B}$ das magnetische Feld und g der gyromagnetische Faktor. Ausserdem ist e die elektrische Ladung und m die Masse des Teilchens. In Kapitel 8 werden wir diese Gleichung in nichtrelativistischer Näherung bestätigen.

In beliebigen Bezugssystemen verallgemeinern sich (7.16) und (7.15) zur Bewegungsgleichung des Vierer-Spin-Vektors [34]

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = \frac{ge}{2m}\left(F^{\mu\nu}s_\nu + F^{\alpha\nu}s_\nu u_\alpha u^\mu\right) + \frac{du^\alpha}{d\tau}s_\alpha u^\mu, \tag{7.17}$$

wobei der elektromagnetische Feldstärketensor durch

$$(F^{\mu\nu}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.18}$$

gegeben ist. Im lokalen Ruhesystem reduziert sich (7.17) wieder auf die beiden Gleichungen (7.15) und (7.16). Für die Vier-Beschleunigung kann man nun die Vier-Lorentzkraft

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} \;=\; \frac{e}{m} F^{\alpha\nu} u_\nu \;=\; -\frac{e}{m} F^{\nu\alpha} u_\nu \tag{7.19}$$

einsetzten. Dadurch schreibt sich (7.17) jetzt als

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} \;=\; \frac{e}{m}\left[\frac{g}{2} F^{\mu\nu} s_\nu + \left(\frac{g}{2} - 1\right) F^{\alpha\nu} s_\nu u_\alpha u^\mu\right]. \tag{7.20}$$

Um das Ziel zu erreichen, die Geschwindigkeit der Spin-Präzession zu berechnen, wird der Spin-Vektor im Laborsystem in einen zur Geschwindigkeit paralellen und senkrechten Teil zerlegt:

$$\frac{s}{|s|} \;=\; e_\parallel \cos\Phi + e_\perp \sin\Phi. \tag{7.21}$$

Die Vier-Einheitsvektoren werden dabei durch

$$e_\parallel \;=\; \gamma\left(v\,,\,\frac{\vec{v}}{v}\right), \qquad e_\perp \;=\; (0\,,\vec{n})\,, \qquad \vec{n}\cdot\vec{n} \;=\; 1 \tag{7.22}$$

dargestellt und der Betrag des Spin-Vektors ist durch

$$|s| \;=\; \sqrt{-s_\mu s^\mu} \tag{7.23}$$

gegeben. Der dreidimensionale Einheitsvektor $\vec{n}$ ist so gewählt, daß er zu jedem Zeitpunkt senkrecht auf der Geschwindigkeit steht:

$$\vec{n}\cdot\vec{v} \;=\; 0. \tag{7.24}$$

Die zeitliche Änderung des Winkels Φ ist unsere gesuchte Größe

$$\frac{d\Phi}{dt} \;=\; \Omega_{\mathrm{em}}. \tag{7.25}$$

Es genügt im Folgenden, nur die Nullkomponente der Bewegungsgleichung (7.20) zu betrachten. Mit den den Vektoren(7.12) und (7.21) und $d/d\tau = \gamma d/dt$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\gamma^4 v\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\cos\Phi + \gamma^2\,\frac{\vec{v}}{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\,\cos\Phi - \gamma^2 v\,\frac{d\Phi}{dt}\,\sin\Phi \\
=\;& \frac{e}{m}\left\{\frac{g}{2}\left(\gamma\frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{E}\cos\Phi + \vec{n}\cdot\vec{E}\sin\Phi\right)\right. \\
&+\left(\frac{g}{2}-1\right)\left[\gamma^3 v\vec{v}\cdot\vec{E}\cos\Phi - \gamma^2\vec{n}\cdot\vec{E}\sin\Phi - \gamma^3\frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{E}\cos\Phi\right. \\
&\left.\left. -\,\gamma^2\left(\frac{\vec{v}}{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}\cos\Phi - \gamma^2\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{n}\sin\Phi\right]\right\} \\
=\;& \frac{e}{m}\left\{\gamma\frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{E}\cos\Phi + \frac{g}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{E}\sin\Phi\right. \\
&\left. +\left(\frac{g}{2}-1\right)\gamma^2\left[-\vec{n}\cdot\vec{E}\sin\Phi - \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{n}\sin\Phi\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Es gilt natürlich $(\vec{v}/v\times\vec{B})\cdot\vec{v}=0$, da $\vec{v}/v\times\vec{B}$ senkrecht auf $\vec{v}$ steht. Zudem kürzt sich der Betrag des Spin-Vektors (7.23) heraus, da die Beträge von Vier-Vektoren immer Konstanten sind. Verwendet man nun die aus der Nullkomponente von (7.19) folgende Relation

$$\frac{e}{m}\,\vec{v}\cdot\vec{E} \;=\; \gamma^3\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}, \tag{7.27}$$

heben sich alle Cosinus-Terme heraus und es bleibt die Gleichung

$$\Omega_{\text{em}} \;=\; \frac{d\Phi}{dt} \;=\; \frac{e}{m}\left\{\left[\left(\frac{g}{2}-1\right)-\frac{g}{2\gamma^2}\right]\frac{\vec{n}\cdot\vec{E}}{v} + \left(\frac{g}{2}-1\right)\left(\vec{B}\times\vec{n}\right)\cdot\vec{v}\right\} \tag{7.28}$$

übrig [34]. Durch Umstellen kann man sie auch in die Form

$$\Omega_{\text{em}} \;=\; \frac{e}{m}\left\{a\left(\vec{B}\times\vec{n}\right)\cdot\vec{v} - \left(a-\frac{1}{\gamma^2-1}\right)\frac{\vec{n}\cdot\vec{E}}{v}\right\}, \tag{7.29}$$

mit $a = g/2-1$, bringen. Die relativistische Rechnung führt von alleine, auf natürlichem Wege und ohne Zusatzannahmen, auf das Vorhandensein des anomalen magnetischen Momentes.

7.2 Spin-Präzession im Kalb-Ramond-Feld

Die Gleichung der Spin-Präzession für ein Teilchen im total antisymmetrischen Kalb-Ramond-Feld erhalten wir aus der Spin-Bewegungsgleichung (5.52), die im flachen Raum

$$\frac{d}{d\tau}\left\langle S^{\alpha\beta}\right\rangle \;=\; -\left(H_{\nu\lambda}{}^{\alpha}\left\langle S^{\lambda\beta}\right\rangle + H_{\nu\lambda}{}^{\beta}\left\langle S^{\alpha\lambda}\right\rangle\right)u^{\nu}. \tag{7.30}$$

lautet, und aus der Vier-Beschleunigung, die durch (5.54) und $f^{\kappa} = m(du^{\kappa}/d\tau)$ festgelegt wird, und im flachen Raum die Form

$$\frac{du^{\kappa}}{d\tau} \;=\; \frac{3}{m}\,H^{\alpha\kappa}{}_{\beta}H_{\alpha\nu\lambda}\left\langle S^{\lambda\beta}\right\rangle u^{\nu} \tag{7.31}$$

besitzt. Zuerst muß der Spin-Erwartungswert-Tensor auf den Spin-Vektor abgebildet werden. Auch für diesen ist gilt wegen (5.36), daß er im Ruhesystem des Teilchens keine zeitartigen Komponenten besitzt

$$\left\langle S^{\alpha 0}\right\rangle_{\mathrm{R}} = 0, \tag{7.32}$$

sondern völlig durch die drei unabhängigen Komponenten $\langle S^{12}\rangle_{\mathrm{R}}$, $\langle S^{23}\rangle_{\mathrm{R}}$ und $\langle S^{31}\rangle_{\mathrm{R}}$ beschrieben wird. In allen Bezugssystemen wird daraus die Bedingung

$$\left\langle S^{\alpha\beta}\right\rangle u_\beta = 0, \tag{7.33}$$

die es gestattet, den Spin-Tensor mit

$$s_\alpha = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\gamma\delta\alpha\beta}\left\langle S^{\gamma\delta}\right\rangle u^\beta \tag{7.34}$$

eindeutig auf den Spinvektor (7.9) abzubilden [4]. Dabei ist $\varepsilon_{\gamma\delta\alpha\beta}$ der total antisymmetrische Pseudo-Tensor mit $\varepsilon_{0123} = 1$. Als Umkehrung von (7.34) wird der Spin-Tensor durch

$$\left\langle S^{\alpha\beta}\right\rangle = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} s_\gamma u_\delta \tag{7.35}$$

durch den Spin-Vektor dargestellt.

Wir setzen nun (7.34) in (7.30) ein

$$\frac{d}{d\tau}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} s_\gamma u_\delta = -\left(H_{\nu\lambda}{}^{\alpha}\varepsilon^{\lambda\beta\gamma\delta} s_\gamma u_\delta + H_{\nu\lambda}{}^{\beta}\varepsilon^{\alpha\lambda\gamma\delta} s_\gamma u_\delta\right) u^\nu \tag{7.36}$$

und multiplizieren diese Gleichung mit $\varepsilon_{\alpha\beta\kappa\sigma}$:

$$\frac{d}{d\tau}\varepsilon_{\alpha\beta\kappa\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} s_\gamma u_\delta = -\left(H_{\nu\lambda}{}^{\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta\kappa\sigma}\varepsilon^{\lambda\beta\gamma\delta} s_\gamma u_\delta + H_{\nu\lambda}{}^{\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\kappa\sigma}\varepsilon^{\alpha\lambda\gamma\delta} s_\gamma u_\delta\right) u^\nu. \tag{7.37}$$

Unter Verwendung der Identitäten [4]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta\kappa\sigma}\varepsilon^{\alpha\lambda\gamma\delta} = &- \eta_\beta{}^\lambda\eta_\kappa{}^\gamma\eta_\sigma{}^\delta - \eta_\beta{}^\gamma\eta_\kappa{}^\delta\eta_\sigma{}^\lambda - \eta_\beta{}^\delta\eta_\kappa{}^\lambda\eta_\sigma{}^\gamma \\ &+ \eta_\beta{}^\lambda\eta_\kappa{}^\delta\eta_\sigma{}^\gamma + \eta_\beta{}^\delta\eta_\kappa{}^\gamma\eta_\sigma{}^\lambda + \eta_\beta{}^\gamma\eta_\kappa{}^\lambda\eta_\sigma{}^\delta\end{aligned} \tag{7.38}$$

und

$$\varepsilon_{\alpha\beta\kappa\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -2\left(\eta_\kappa{}^\gamma\eta_\sigma{}^\delta - \eta_\kappa{}^\delta\eta_\sigma{}^\gamma\right) \tag{7.39}$$

wird (7.37) zu

$$-\frac{ds_\kappa}{d\tau}u_\sigma - s_\kappa\frac{du_\sigma}{d\tau} + \frac{ds_\sigma}{d\tau}u_\kappa + s_\sigma\frac{du_\kappa}{d\tau} = \left(H_{\nu\kappa}{}^{\gamma} s_\gamma u_\sigma u^\nu + H_{\nu\sigma}{}^{\gamma} s_\gamma u_\kappa u^\nu\right). \tag{7.40}$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit u^κ liefert bei Beachtung von $u^\kappa u_\kappa = -1$, $u^\kappa(du_\kappa/d\tau) = 0$, (7.11) und der Antisymmetrie von $H_{\nu\kappa}{}^{\gamma}$ die Bewegungsgleichung

$$\frac{ds_\sigma}{d\tau} = H_{\nu\sigma\gamma}s^\gamma u^\nu - u^\kappa\frac{ds_\kappa}{d\tau}u_\sigma. \tag{7.41}$$

Setzt man (7.14) nun in die Gleichung (7.41) ein, reduziert sich diese im lokalen Ruhesystem auf (7.15), was sich in Übereinstimmung mit der zeitliche Ableitung von (7.13) im Ruhesystem befindet.

Es ist besonders zweckmäßig, auch das Kalb-Ramond-Feld mit seinen unabhängigen Komponenten H_{123}, H_{012}, H_{023} und H_{031} durch einen Vektor

$$\begin{aligned} h &= \left(h^0, \vec{h}\right) \\ h^0 &= H_{123}, \qquad \vec{h} = \begin{pmatrix} H_{023} \\ H_{031} \\ H_{012} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.42}$$

gemäß

$$H_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} h_\delta \tag{7.43}$$

darzustellen[5]. Damit lautet die Bewegungsgleichung (7.41) nun

$$\frac{ds_\sigma}{d\tau} = \varepsilon_{\nu\sigma\gamma\mu} h^\mu s^\gamma u^\nu + s_\kappa \frac{du^\kappa}{d\tau} u_\sigma. \tag{7.44}$$

Wir betrachten auch hier nur die zeitliche Komponente. Da der Index σ den Wert null hat, sind ν, γ und μ rein räumliche Indizes, so daß man die Bewegungsgleichung der Nullkomponente mit den dreidimensionalen Vektoren aus (7.9),(7.12) und (7.42) ausdrücken kann:

$$\frac{ds_0}{d\tau} = -\vec{h} \cdot (\vec{u} \times \vec{s}) + s_\kappa \frac{du^\kappa}{d\tau} u_0. \tag{7.45}$$

Da der Index 0 unten steht, also ein kovarianter Index ist, ergibt sich ein Vorzeichenwechsel:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d}{dt} \gamma\, v \cos\Phi &= \gamma\, \vec{h} \cdot (\vec{v} \times \vec{n}) \sin\Phi + \gamma\, s_\kappa \frac{du^\kappa}{d\tau} \\ &= \gamma^4 v \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cos\Phi + \gamma^2 \frac{\vec{v}}{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cos\Phi - \gamma^2 v \frac{d\Phi}{dt} \sin\Phi. \end{aligned} \tag{7.46}$$

Es bleibt jetzt noch die Aufgabe, die Vier-Beschleunigung und den daraus resultierenden dreidimensionalen Beschleunigungsvektor zu berechnen. Aus Gleichung (7.31) wird mit unseren Vektoren (7.9) und (7.42), sowie dem Epsilon-Pseudotensor, der Ausdruck

$$\frac{du^\kappa}{d\tau} = \frac{3}{m} \varepsilon^{\alpha\kappa\beta\mu} \varepsilon_{\alpha\nu\lambda\sigma} \varepsilon^{\lambda\rho\gamma\delta} \eta_{\beta\rho} h_\mu h^\sigma s_\gamma u_\delta u^\nu, \tag{7.47}$$

der mit mit (7.38) vereinfacht wird. Dabei bleibt

$$\frac{du^\kappa}{d\tau} = -\frac{3}{m} \varepsilon^{\kappa\rho\gamma\delta} h_\nu u^\nu h_\rho s_\gamma u_\delta \tag{7.48}$$

übrig. Man sieht, daß der Ausdruck $s_\kappa(du^\kappa/d\tau)$ verschwindet, da mit zwei Spin-Vektoren über Komponenten des antisymmetrischen Epsilon-Pseudotensor summiert wird. Somit entspricht (7.44) der kovarianten Ableitung des Spin-Vektors mit Torsion.

[5] Die Umkehrung dieser Formel ist $h^\delta = (1/6) \varepsilon^{\delta\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma}$.

Das Vektorprodukt $\vec{v} \cdot (d\vec{v}/dt)$ ergibt sich aus der Nullkomponente von (7.48) durch

$$\frac{du^0}{d\tau} = \gamma \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{7.49}$$

und lautet

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{3}{\gamma m} u^\sigma h_\sigma \vec{h} \cdot (\vec{v} \times \vec{n}) \sin \phi. \tag{7.50}$$

Setzt man dies in Gleichung (7.45) ein, so ergibt sich

$$\frac{d\Phi}{dt} = \vec{h} \cdot (\vec{n} \times \vec{v}) \left(\frac{1}{\gamma v} + \frac{3\gamma}{mv^2} u^\sigma h_\sigma \cos \Phi \right) \tag{7.51}$$

als Winkelgeschwindigkeit.

Wir können uns jetzt den Vektor (7.42) als Gradient einer skalaren Funktion

$$h_\sigma = \partial_\sigma H \tag{7.52}$$

vorstellen. Da das Kalb-Ramond-Feld als homogen und zeitunabhängig betrachtet werden soll, gilt

$$u^\sigma h_\sigma = u^\sigma \partial_\sigma H = \frac{d}{d\tau} H = 0. \tag{7.53}$$

Hierdurch wird (7.51) zu

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Omega_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\gamma v} \vec{h} \cdot (\vec{n} \times \vec{v}) \,. \tag{7.54}$$

Die Komponente H_{123} des Kalb-Ramond-Feldes trägt nicht zur Spin-Präzession bei, sondern nur die Komponenten, die senkrecht auf der Geschwindigkeit und der momentan zur Geschwindigkeit senkrecht polarisierten Spin-Richtung stehen.

7.3 Vergleich mit experimentellen Resultaten

Die gesammte Präzessionsfrequenz ergibt sich als Summe von (7.29) und (7.54):

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_{\mathrm{em}} + \Omega_{\mathrm{H}} &= \frac{e}{m} \left\{ a \left(\vec{B} \times \vec{n} \right) \cdot \vec{v} - \left(a - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \frac{\vec{n} \cdot \vec{E}}{v} \right\} \\ &+ \frac{1}{\gamma v} \vec{h} \cdot (\vec{n} \times \vec{v}) \,. \end{aligned} \tag{7.55}$$

Das moderne Myonenexperiment des amerikanischen Brookhaven National Laboratory [36] ist so gebaut, daß die elektrischen Felder keinen Beitrag zur Präzessionsfrequenz liefern. Dadurch vereinfacht sich (7.55) zu

$$\Omega = \frac{e}{m} a \, (\vec{n} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} + \frac{1}{\gamma} \vec{h} \cdot \left(\vec{n} \times \frac{\vec{v}}{v} \right) . \tag{7.56}$$

Außerdem steht das Magnetfeld immer senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor, wie aus der Abbildung (7.1) hervorgeht. Deshalb genügt es dem Experimentator, der davon ausgeht, daß die Spin-Präzession lediglich durch das magnetische Feld hervorgerufen wird, die Detektoren für die Zerfallselektronen in der Ebene der Geschwindigkeit anzuordnen. Dadurch kann das Experiment auch nur den Einfluss der Komponente $h_{||}$ des Kalb-Ramond-Feldes messen, die in parallel zu $\vec{B}$ ist. Damit ergibt sich, aufgelöst nach a

$$a_{\mathrm{exp}} \;=\; \frac{m\Omega}{evB} - \frac{mh_{||}}{\gamma evB}, \tag{7.57}$$

und die durch das Kalb-Ramond-Feld erklärte Abweichung des experimentellen Wertes (7.4) ist gegeben durch

$$\Delta a \;=\; -\frac{mh_{||}}{\gamma evB}. \tag{7.58}$$

Indem man nach $h_{||}$ auflöst, kann man anhand der experimentellen Daten eine Abschätzung der Größenordnung des Kalb-Ramond-Feldes angeben:

$$h_{||} \;=\; -\frac{\gamma evB}{m}\,\Delta a \;=\; -\frac{\gamma e}{m}\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}B\,\Delta a. \tag{7.59}$$

Kapitel 8

Pauli-Gleichung mit Kalb-Ramond-Feld

Das Pauli-Näherungsverfahren gestattet es, in erster Ordnung den nichtrelativistischen Limes der Dirac-Gleichung im flachen Raum zu berechnen. Betrachtet man ein freies Teilchen, oder ein Teilchen im elektromagnetischen Feld, gelangt man so zur nichtrelativistischen Energie-Eigenwert-Gleichung

$$H\phi \;=\; \epsilon\phi, \tag{8.1}$$

wobei H die Hamilton-Funktion für ein Teilchen, E der Energie-Eigenwert und ϕ ein zweikomponentiger Spinor ist.

Wir wollen nun die Pauli-Näherung auf ein Teilchen im antisymmetrischen Kalb-Ramond-Feld anwenden. Der Vollständigkeit halber soll auch die Kopplung an das elektromagnetische Feld mit berücksichtigt werden. Dafür lautet die Dirac-Gleichung

$$\gamma^\mu \left(i\nabla^{(\mathrm{H})}_\mu + eA_\mu \right) \psi - m\psi \;=\; 0. \tag{8.2}$$

Daraus erhält man durch Multiplikation mit γ_0

$$i\partial_0\psi \;=\; \gamma^0\gamma^j \left(-i\partial_j - eA_j\right)\psi + \frac{i}{4} H_{0ij}\gamma^{[i}\gamma^{j]}\psi + \frac{i}{4} H_{123}\gamma^5\psi - eA_0\psi + m\gamma^0\psi. \tag{8.3}$$

Jetzt ist es zweckmässig, zu einer nicht-kovarianten Schreibweise mit den Matritzen

$$\beta \;=\; \gamma^0, \qquad \alpha^{(j)} \;=\; \gamma^0\gamma^j, \qquad j = 1,2,3 \tag{8.4}$$

überzugehen:

$$E\psi \;=\; \alpha^{(j)} \left(p_j - eA_j\right)\psi + \frac{i}{4} H_{0ij}\gamma^{[i}\gamma^{j]}\psi + \frac{i}{4} H_{123}\gamma^5\psi - eA^0\psi + m\beta\psi. \tag{8.5}$$

Die Gesamtenergie ist dabei gegeben durch

$$E\psi \;=\; i\partial_0\psi, \tag{8.6}$$

wobei $i\partial_0$ im nichtrelativistischen Fall strenggenommen nicht als Operator angesehen werden darf, da die Zeit hier lediglich ein Parameter ist.

Im nächsten Schritt wird nun der vierkomponentige Spinor ψ aus zwei zweikomponentigen Spinoren

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

aufgebaut . Gleichung (8.5) kann nun mit den Pauli-Matritzen (2.57) aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} E\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} &= (p_j - A_j)\begin{pmatrix} 0 & \sigma^{(j)} \\ \sigma^{(j)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &+ \frac{i}{8} H_{0ij} \begin{pmatrix} \left[\sigma^{(i)}\sigma^{(j)}\right] & 0 \\ 0 & \left[\sigma^{(i)}\sigma^{(j)}\right] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &+ \frac{i}{4} H_{123} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{(1)}\sigma^{(2)}\sigma^{(3)} \\ \sigma^{(1)}\sigma^{(2)}\sigma^{(3)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &+ eA^0\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Die Pauli-Matritzen erfüllen die dreidimensionale Drehimpuls-Algebra

$$\left[\sigma^{(i)}, \sigma^{(j)}\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma^{(k)}, \tag{8.9}$$

mit dem dreidimensionalen total antisymmetrischen Tensor ($\varepsilon^{123} = 1$). Bildet man nun das H-Feld wieder mit (7.43) auf seinen dualen Vektor ab, kann (8.8) als

$$\begin{aligned} E\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} &= (p_j + eA_j)\begin{pmatrix} 0 & \sigma^{(j)} \\ \sigma^{(j)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\varepsilon_{ijl}\,\varepsilon_{ijk}\,h^l\begin{pmatrix} \sigma^{(k)} & 0 \\ 0 & \sigma^{(k)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &- \frac{1}{2} h^0 \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{(1)}\sigma^{(1)} \\ \sigma^{(1)}\sigma^{(1)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} + eA^0\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &+ m\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= (p_j + eA_j)\begin{pmatrix} 0 & \sigma^{(j)} \\ \sigma^{(j)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} - \frac{1}{2} h^k \begin{pmatrix} \sigma^{(k)} & 0 \\ 0 & \sigma^{(k)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &- \frac{1}{2} h^0 \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} + eA^0\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.10}$$

dargestellt werden. Dabei sind die Relationen

$$\varepsilon_{ijl}\,\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ij} \tag{8.11}$$

und

$$\sigma^{(j)}\sigma^{(j)} = \mathbb{1} \tag{8.12}$$

eingegangen. Multipliziert man die Matritzen aus, ergeben sich zwei gekoppelte Gleichungen:

$$E\phi = \sigma^{(j)}(p_j - eA_j)\chi - \frac{1}{2}h^j\sigma^{(j)}\phi - \frac{1}{2}h^0\chi + eA^0\phi + m\phi, \tag{8.13}$$

$$E\chi = \sigma^{(j)}(p_j - eA_j)\phi - \frac{1}{2}h^j\sigma^{(j)}\chi - \frac{1}{2}h^0\phi + eA^0\chi - m\chi. \tag{8.14}$$

In nichtrelativistischer Näherung wird die Gesamtenergie von der Ruheenergie dominiert zu der eine kleine Abweichung hinzukommt:

$$E = m + \epsilon. \tag{8.15}$$

Setzt man diese Zerlegung in (8.13) und (8.14) ein, stellt man fest, daß die erste Gleichung nicht mehr von der Ruheenergie abhängt:

$$\epsilon\phi = \sigma^{(j)}(p_j - eA_j)\chi - \frac{1}{2}h^j\sigma^{(j)}\phi - \frac{1}{2}h^0\chi + eA^0\phi, \tag{8.16}$$

$$(2m+\epsilon)\chi = \sigma^{(j)}(p_j - eA_j)\phi - \frac{1}{2}h^j\sigma^{(j)}\chi - \frac{1}{2}h^0\phi + eA^0\chi. \tag{8.17}$$

Mit Gleichung (8.17) wird nun χ bestimmt, um die Gleichungen zu entkoppeln:

$$\chi = \frac{\sigma^{(j)}(p_j - eA_j) - \frac{1}{2}h^0}{2m + \epsilon - eA^0 + \frac{1}{2}h^j\sigma^{(j)}}\phi. \tag{8.18}$$

Es kann jetzt davon ausgegangen werden, daß m den Nenner des Bruches derart dominiert, daß alle anderen Felder und Energien nicht nennenswert beitragen. Damit kann nun

$$\chi \approx \frac{\sigma^{(j)}(p_j - eA_j) - \frac{1}{2}h^0}{2m}\phi \tag{8.19}$$

als gute Näherung für den nichtrelativistischen Fall angesehen werden. Gleichung (8.16) wird damit zu

$$\begin{aligned}\epsilon\phi &= \left\{\frac{1}{2m}\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\right]^2 - \frac{1}{2}\vec{h}\cdot\vec{\sigma}\right.\\ &\quad \left. - \frac{1}{4m}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)h^0 + \frac{1}{8m}h^0 + eA^0\right\}\phi\\ &= \left\{\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 - \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{h}\cdot\vec{\sigma}\right.\\ &\quad \left. - \frac{1}{4m}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)h^0 + \frac{1}{8m}h^0 + eA^0\right\}\phi.\end{aligned} \tag{8.20}$$

Es ist die Identität

$$\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\right]^2 = \left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 - \vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)\times\left(\vec{p} - e\vec{A}\right) \tag{8.21}$$

eingeflossen. Ausserdem wurde $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ beachtet. Verwendet man nun noch die Definition des Spin-Operators in der nichtrelativistischen Quantenmechanik

$$\vec{s} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \tag{8.22}$$

ergibt sich der nichtrelativistische Hamilton-Operator

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 - \frac{e}{m}\,\vec{s}\cdot\vec{B} - \vec{s}\cdot\vec{h} \\ &\quad -\frac{1}{2m}\,\vec{s}\cdot\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)h^0 + \frac{1}{8m}\,h^0 + eA^0. \end{aligned} \tag{8.23}$$

Da h^0 ein pseudo-Skalar ist, ist die Hamilton-Funktion nicht invariant unter Raumspiegelung, die Parität ist nicht erhalten. Bemerkenswert ist außerden der Kopplungsterm zwischen eichinvariantem Impuls $\vec{p} - e\vec{A}$ und $h^0 = H_{123}$. Da h^0 wesentlich kleiner als $\vec{p}$ und $\vec{A}$ sein dürfte, kann man den Kopplungsterm vernachlässigen:

$$H \approx \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 - \frac{e}{m}\,\vec{s}\cdot\vec{B} - \vec{s}\cdot\vec{h} + \frac{1}{8m}\,h^0 + eA^0. \tag{8.24}$$

Die zeitliche Änderung des Spin-Operators findet man mit der Heisenbergschen Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = -i\,[H, \vec{s}] = \frac{e}{m}\,\vec{s}\times\vec{B} + \vec{s}\times\vec{h}. \tag{8.25}$$

Diese Operatorgleichung entspricht den räumlichen Anteilen unserer Bewegungsgleichungen (7.17) und (7.44) des relativistischen Spin-Vektors (7.9) im lokalen Ruhesystem eines Spin-1/2-Teilchens im elektromagnetischen- und Kalb-Ramond-Feld.

Kapitel 9

Ausblick

Es soll hier beschrieben werden, welche weiteren Perspektiven sich aus dieser Arbeit ergeben.

Durch die Identifikation des Kalb-Ramond-Feldes mit Torsion in einer Riemann-Cartan-Raum-Zeit, ergibt sich eine Kopplung dieses Feldes an den Spin von Dirac-Teilchen (4.58). Die sich daraus ergebende Gleichung für die Präzessionsfrequenz des Spins im Kalb-Ramond-Feld (7.54) enthält den reziproken Lorentz-Faktor

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-v^2}. \tag{9.1}$$

Dieser wird immer kleiner, je größer die Geschwindigkeit v des Teilchens ist. Der durch das Kalb-Ramond-Feld hervorgerufene Präzessionseffekt wird daher immer größer, je langsamer sich das Teilchen im Laborsystem bewegt. Somit könnten Experimente, die mit langsamen Myonen arbeiten, dazu dienen, die Existenz des Kalb-Ramond-Feldes zweifelsfrei zu beweisen oder zu widerlegen.

Die nichtrelativistische Näherung (8.24) könnte sich eventuell dazu eignen, Versuche über das H-Feld nicht nur im Rahmen großtechnischer Beschleunigeranlagen, sondern auch im normalen Labormaßstab, etwa durch den Nachweis der Paritätsverletzung, durchzuführen.

Die Gleichungen (5.52) und (5.54) sind die Bewegungsgleichungen für den Spin eines quantenmechanischen Teilchens und seinen Schwerpunkt im Kalb-Ramond-Feld. Da der Spin eines quantenmechanischen Teilchens durch die Drehimpuls-Algebra beschrieben wird, und teilweise als Eigendrehung des Teilchens verstanden werden kann [23], ist es eine interessante Frage, ob die Kalb-Ramond-Torsion auch an die Eigendrehung klassischer Testteilchen koppelt. Für klassische Testteilchen mit Eigendrehimpuls in einem Gravitationsfeld gilt anstelle der Geodätengleichung die Papapetrou-Gleichung [24]

$$\frac{D}{D\tau}\left(mu^\alpha + u_\beta\,\frac{DS^{\alpha\beta}}{D\tau}\right) = \frac{1}{2}\,{}^0R^\alpha{}_{\mu\nu\lambda}u^\mu S^{\lambda\nu}. \tag{9.2}$$

Sie wird durch ein Näherungsverfahren aus der lokalen Energie-Impulserhaltung (5.1) gewonnen, ohne das der Energie-Impuls-Tensor dazu explizit bekannt ist. Gelänge es, diese Gleichung aus einer Einstein-Hilbert-Wirkung herzuleiten, könnte man diese dann für Riemann-Cartan-Raum-Zeiten mit H-Feld-Torsion erweitern. Leider ist dies bis jetzt nicht richtig gelungen [25,26]. Allerdings ist es fraglich, ob tatsächlich eine Kopplung der Eigendrehung mit dem H-Feld auftritt, da man sich eine ausgedehnte klassische Probe mit Eigendrehung auch als eine Wolke nicht miteinander wechselwirkender Punktteilchen vorstellen kann, an die die Torsion nicht koppelt.

Danksagung

Ich danke Prof. Dr. Robert Graham, Dr. Axel Pelster und Urs Schreiber, sowie Prof. Dr. Stefan Thomae für die Unterstützung.

Literaturverzeichnis

[1] A. Pelster, *Zur Theorie und Anwendung nichtintegrabler Raum-Zeit-Transformationen in der klassischen Mechanik und in der Quantenmechanik*, Doktorarbeit, Universität Stuttgart, Shaker-Verlag (1996), `http://www.physik.fu-berlin.de/~pelster/theses.html`.

[2] S. M. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, `eprint: gr-qc/9712019`.

[3] T. Fliessbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, BI-Wissenschaftsverlag (1990).

[4] H. Stephani, *Allgemeine Relativitätstheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (1988).

[5] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons (1972).

[6] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company (1973).

[7] H. Kleinert and A. Pelster, *Autoparallels from a New Action Principle*, Gen. Rel. Grav **31**, 1439 (1999).

[8] J. Polchinski, *String Theorie*, Camebridge University Press (1998).

[9] R. J. Szabo, *Busstep Lectures on String Theory*, `eprint: hep-th/0207142`.

[10] J. Scherk and J. H. Schwarz, *Dual Models and the Geometry of Space-Time*, Phys. Lett. B **52** 347 (1974).

[11] R. Hammond, *Torsion Gravity*, Rep. Prog. Phys. **65**, 599 (2002).

[12] C. Gruver, R. Hammond and P. F. Kelly, *Tensor-Scalar Torsion*, `eprint: gr-qc/0103050`.

[13] R. Hammond, *Dirac Coupling in Gravity with the Torsion Potential*, Class. Quantum Grav. **12** 279 (1995).

[14] Franz Schwabl, *Quantenmechanik für Fortgeschrittene*, Springer-Verlag (2000).

[15] T. Watanabe and M. J. Hayashi, *General Relativity with Torsion*, `eprint: gr-qc/0409029`.

[16] C. G. Böhmer, *The Einstein Static Universe with Torsion and the Sign Problem of the Cosmological Constant*, Class. Quantum Grav. **21**, 1119 (2004).

[17] M. M. Som and M. L. Bedran, *Static Dust Sphere in Einstein-Cartan Theory*, Phys. Rev. B **24** 2561 (1981).

[18] H. I. Arcos and J. G. Pereira *Torsion Gravity: A Reappraisal*, `eprint: gr-gc/0501017`.

[19] S. M. Carroll and G. B. Field, *Consequences of Propagating Torsion in Connection-Dynamic Theories of Gravity*, Phys. Rev. D **50**, 3867 (1994).

[20] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick and J. Nester, *General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects*, Rev. Mod. Phys. **48**, 393 (1976).

[21] F. W. Hehl, *Spin und Torsion in der Allgemeinen Relativitätstheorie*, Habilitationsschrift, Technische Universität Clausthal (1970).

[22] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books (1995).

[23] H. Höhnl und A. Papapetrou *Über die innere Bewegung des Elektrons I*, Z. Phys. **112**, 512 (1939).

[24] A. Papapetrou, *Spinning Test-Particles in General Relativity I*, Proc. Roy. Soc. **65**, 248 (1951).

[25] M. Leclerc, *Mathisson-Papapetrou Equations in Metric and Gauge Theories of Gravity in a Lagrangian Formulation*, `eprint: gr-qc/0505021`.

[26] T. Shiromizu, *Stringy Probe Particle and Force Balance*, `eprint: hep-th/9907017`.

[27] H. Kleinert and A. Pelster, *Novel Geometric Gauge Invariance of Autoparallels*, Acta Phy. Pol. **29**, 1015 (1998).

[28] T. Frankel, *The Geometry of Physics*, Camebridge University Press (2004).

[29] H. Kleinert, *Nonholonomic Mapping Principle for Classical and Quantum Mechanics in Spaces with Curvature and Torsion*, Gen. Rel. Grav. **32** 769 (2000).

[30] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific Publishing (2004).

[31] W. Greiner und J. Reinhardt, *Feldquantisierung*, Verlag Harry Deutsch (1993), Band **7 A** Theoretische Physik.

[32] H. I. Ringermacher, *An Electrodynamik Connection*, Class. Quant. Grav. **11**, 2383 (1994).

[33] E. Schrödinger, *Space-Time Structure*, Camebridge University Press (1950).

[34] V. Bargmann, L. Michel and V. L. Telegdi, *Precession of the Polarization of Particles moving in a Homogeneous Electromagnetic Field*, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).

[35] Brookhaven National Laboratory *Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.7ppm*, `eprint: hep-ex/0208001`.

[36] Brookhaven National Laboratory *The E821 Muon (g-2) Home Page*, `http://www.g-2.bnl.gov/index.shtml`.

[37] A. Buonanno and T. Damour *On the Gravitational, Dilatonic and Axionic Radiative Damping of Cosmic Strings*, `eprint: gr-qc/9801105`.