9. Übung (Abgabe Di. 11. Januar 2011 zu Beginn der Vorlesung oder spätestens bis 16:00 im Briefkasten im Sekretariat bei Frau Badow)

---

31. Spin-Erzeugungs- und -Vernichtungsoperator

Zeigen Sie, dass für den angeregten Zustand $|\vec{r}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2S}} S_-(\vec{r})|0\rangle$ gilt: $S_-(\vec{r}')S_+(\vec{r})|\vec{r}\rangle = 2S|\vec{r}'\rangle$, wobei $S_\pm(\vec{r}_i)|S_z\rangle_{\vec{r}_i} = \sqrt{(S\mp S_z)(S+1\pm S_z)}\,|S_z\pm 1\rangle_{\vec{r}_i}$, $|0\rangle = \prod_{\vec{r}_i}|S\rangle_{\vec{r}_i}$ der Grundzustand des Heisenberg-Ferromagneten und S der maximale Wert des S_z-Operators ist.

(2 Punkte)

32. Wärmekapazität von Magnonen

Die energetisch kleinsten Anregungen eines Ferromagneten bei $T > 0$ bestehen aus Spin-Wellen, die in quantisierter Form Magnonen genannt werden. Die Energie eines Magnons der Frequenz ω beträgt $\hbar\omega$. Die Dispersionsrelation von Magnonen sei gegeben durch $\omega(k) = Ak^2$. Berechnen Sie damit den führenden Term der Wärmekapazität eines dreidimensionalen Ferromagneten bei tiefen Temperaturen ($k_BT << J$). Das Resultat ist:

$$C_V = 0.113\,V\,k_B\left(\frac{k_BT}{\hbar A}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{wobei } V \text{ das Volumen der Probe ist.}$$

<u>Hinweis</u>: Berechnen Sie zunächst die Zustandsdichte $D(\omega)$. *Dazu bestimmen Sie zuerst die Anzahl Magnonen-Zustände im reziproken Raum* $N(k)$ *analog wie bei den Phononen. Die Wärmekapazität ergibt sich (analog wie bei den Phononen) aus der totalen Energie* $U(T) = \int_0^\infty dE\, D(E)\langle n(E,T)\rangle E$ *der Magnonen.* $\langle n(E,T)\rangle$ *ist die mittlere Anzahl Magnonen der Energie* E *bei der Temperatur* T *und berechnet sich aus der Boltzmann-Verteilung.*

(3 Punkte)

33. Dicke einer Domänenwand

Schätzen Sie die Dicke d_w einer 180°-Domänenwand ab, die parallel zur (100)-Richtung in einem einfach kubischen Kristallgitter (Gitterkonstante a, an jedem Gitterplatz befindet sich ein Spin) ausgerichtet ist, indem Sie die Anzahl Gitterebenen N in der Wand bestimmen; es gilt dann: $d_w = N a$. Die Flächenenergiedichte σ_{wand} einer Wand ist gegeben durch: $\sigma_{wand} = \sigma_{exch} + \sigma_{aniso}$, wobei σ_{exch} die Energiedichte für den Austausch und σ_{aniso} diejenige für die Anisotropie ist. Die Austauschkonstante zwischen benachbarten Spins sei J, die Anisotropie-Konstante sei K. Nehmen Sie an, dass sich die Richtung der Spins zwischen zwei Gitterebenen um den konstanten Winkel $\alpha = \pi/N << 1$ ändert und dass die Anisotropie-Energie ΔE_{aniso} in dieser Näherung durch $\Delta E_{aniso} = K\,V$ gegeben ist, wobei V das betrachtete Volumen der Wand darstellt.

(a) Berechnen Sie zunächst den Beitrag der Austausch-Energie ΔE_{exch} für eine Kette von $N + 1$ Spins, die senkrecht durch die Domänenwand verläuft. Es ergibt sich: $\Delta E_{exch} = \frac{1}{2} JS^2\pi^2/N$.

(b) Zeigen Sie weiter, dass die Anisotropie-Energie für die Spin-Kette aus (a) gegeben ist durch $\Delta E_{aniso} = KNa^3$, wobei als Volumen das mittlere Volumen einer Spin-Kette genommen wird.

(c) Berechnen Sie mithilfe von (a) und (b) die Flächenenergiedichte σ_{wand} als Funktion der Anzahl Gitterebenen N. Die Wanddicke ergibt sich aus dem Energieminimum.

(d) Zeigen Sie, dass aus dem Ergebnis (c) folgt, dass für die Wandenergie gilt: $\sigma_{wand} \propto \sqrt{KJ}$.

(4 Punkte)