

**12. Übung (Abgabe Di. 01. Februar 2011 zu Beginn der Vorlesung oder spätestens bis 16:00 im Briefkasten im Sekretariat bei Frau Badow)**

**40. Feldabhängigkeit in einem langen Vortex (Flussschlauch)**

Diskutieren Sie die Feldabhängigkeit  $B(\rho, \varphi, z)$  in einem langen Vortex, der genau ein Flussquantum  $\phi_0$  enthält. Lösen Sie dazu die London-Gleichung  $\Delta B - B/\Lambda_L^2$  in Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$ , da diese der Symmetrie eines zylinderförmigen, geraden Schlauches angepasst sind. Beachten Sie, dass ein langer Flussschlauch radialsymmetrisch sein muss und keine Abhängigkeit in  $z$ -Richtung aufweisen darf.

(a) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung der Bessel'schen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung  $x^2 d^2y(x)/dx^2 + x dy(x)/dx + (x^2 - n^2) y(x) = 0$  entspricht, wobei  $x$  eine einfache Funktion von  $\rho$  ist. Bestimmen Sie die Ordnung  $n$  der Gleichung sowie die Abhängigkeit  $x(\rho)$ . Die allgemeine Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung ist  $y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$ , wenn  $n$  ganzzahlig ist.  $J_n$  und  $Y_n$  sind die Bessel-Funktionen erster und zweiter Gattung der Ordnung  $n$ .

(b) Wie lautet die Normierungsbedingung für  $B(\rho, \varphi, z)$ , damit der Vortex genau  $\phi_0$  enthält?

(3 Punkte)

**41. Gleichstrom-Josephson-Effekt**

Betrachten Sie einen  $S$ - $I$ - $S$ -Kontakt ( $S$  = Supraleiter,  $I$  = Isolator) aus gleichen supraleitenden Materialien, durch den infolge einer angelegten variablen externen Spannung  $U_{\text{ext}}$  über einen Vorwiderstand  $R$  ein Gleichstrom  $I(U)$  fließe, wobei die Spannung  $U$  direkt über dem Kontakt an den beiden Supraleitern abgegriffen werde. Sei  $\psi_1, \psi_2$  die BCS-Wellenfunktionen des supraleitenden Zustands im linken, bzw. rechten Supraleiter, dann kann sie wegen  $|\psi_i|^2 = n_{s,i}/2$  wie folgt dargestellt werden:  $\psi_i = \sqrt{n_{s,i}/2} e^{i\theta_i}$ , wobei  $\theta_i$  die Phase der BCS-Wellenfunktion und  $n_{s,i}/2$  die Dichte der Cooper-Paare in den beiden Supraleitern bedeutet. Wenn  $U_{\text{ext}}$  hochgefahren wird, dann fließt bis zu einem Maximalwert zunächst ein Strom, ohne dass eine Spannung  $U$  am Kontakt abfällt. Dies ist der Gleichstrom-Josephson-Effekt. Unter dieser Voraussetzung lauten die Schrödinger-Gleichungen für  $\psi_i$ :  $i\hbar\partial\psi_1/\partial t = \hbar T\psi_2$  und  $i\hbar\partial\psi_2/\partial t = \hbar T\psi_1$ ,  $T$  beschreibt hier die Kopplungskonstante für das Tunneln von Cooper-Paaren durch den Isolator. Lösen Sie die gekoppelten Differentialgleichungen unter der Annahme, dass sowohl  $n_{s,i}$  als auch  $\theta_i$  zeitabhängig sind und dass  $n_{s,1} \cong n_{s,2}$ . Zeigen Sie, dass für  $U = 0$  ein Josephson-Strom  $I = I_0 \sin(\theta_2 - \theta_1)$  fließt.

Hinweis: Siehe Online-Übungsblatt mit Hinweisen.

(2 Punkte)

**42. Reflektivität**

Zeigen Sie, dass die Formel für die Reflektivität  $R = |n - 1|^2 / |n + 1|^2$  direkt aus den Fresnel-Formeln  $\rho_s = -\sin(\alpha - \beta) / \sin(\alpha + \beta)$  und  $\rho_p = \tan(\alpha - \beta) / \tan(\alpha + \beta)$  für senkrechte Inzidenz folgt, wobei  $R = |\rho_s(\alpha = 0)|^2 = |\rho_p(\alpha = 0)|^2$  mit  $\alpha, \beta =$  Einfallswinkel bzw. Brechungswinkel und  $\rho_{s,p} =$  Reflexionskoeffizient für elektrisches Feld senkrecht, bzw. parallel zur Einfallsebene. Es gilt zudem das Gesetz von Snellius:  $\sin(\alpha) = n \sin(\beta)$ .

(2 Punkte)