12. Übung (Abgabe Di. 01. Februar 2011 zu Beginn der Vorlesung oder spätestens bis 16:00 im Briefkasten im Sekretariat bei Frau Badow)

---

40. Feldabhängigkeit in einem langen Vortex (Flussschlauch)

Diskutieren Sie die Feldabhängigkeit $B(\rho, \varphi, z)$ in einem langen Vortex, der genau ein Flussquantum ϕ_0 enthält. Lösen Sie dazu die London-Gleichung $\Delta B - B/\Lambda_L^2$ in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z), da diese der Symmetrie eines zylinderförmigen, geraden Schlauches angepasst sind. Beachten Sie, dass ein langer Flussschlauch radialsymmetrisch sein muss und keine Abhängigkeit in *z*-Richtung aufweisen darf.

(a) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung der Bessel'schen Differentialgleichung *n*-ter Ordnung $x^2\, d^2y(x)/dx^2 + x\, dy(x)/dx + \left(x^2 - n^2\right) y(x) = 0$ entspricht, wobei *x* eine einfache Funktion von ρ ist. Bestimmen Sie die Ordnung *n* der Gleichung sowie die Abhängigkeit $x(\rho)$. Die allgemeine Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung *n*-ter Ordnung ist $y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$, wenn *n* ganzzahlig ist. J_n und Y_n sind die Bessel-Funktionen erster und zweiter Gattung der Ordnung *n*.

(b) Wie lautet die Normierungsbedingung für $B(\rho, \varphi, z)$, damit der Vortex genau ϕ_0 enthält?

(3 Punkte)

41. Gleichstrom-Josephson-Effekt

Betrachten Sie einen *S-I-S*-Kontakt (*S* = Supraleiter, *I* = Isolator) aus gleichen supraleitenden Materialien, durch den infolge einer angelegten variablen externen Spannung U_{ext} über einen Vorwiderstand *R* ein Gleichstrom *I*(*U*) fließe, wobei die Spannung *U* direkt über dem Kontakt an den beiden Supraleitern abgegriffen werde. Sei ψ_1, ψ_2 die BCS-Wellenfunktionen des supraleitenden Zustands im linken, bzw. rechten Supraleiter, dann kann sie wegen $|\psi_i|^2 = n_{s,i}/2$ wie folgt dargestellt werden: $\psi_i = \sqrt{n_{s,i}/2}\, e^{i\theta_i}$, wobei θ_i die Phase der BCS-Wellenfunktion und $n_{s,i}/2$ die Dichte der Cooper-Paare in den beiden Supraleitern bedeutet. Wenn U_{ext} hochgefahren wird, dann fließt bis zu einem Maximalwert zunächst ein Strom, ohne dass eine Spannung *U* am Kontakt abfällt. Dies ist der Gleichstrom-Josephson-Effekt. Unter dieser Voraussetzung lauten die Schrödinger-Gleichungen für ψ_i: $i\hbar\partial\psi_1/\partial t = \hbar T\psi_2$ und $i\hbar\partial\psi_2/\partial t = \hbar T\psi_1$, *T* beschreibt hier die Kopplungskonstante für das Tunneln von Cooper-Paaren durch den Isolator. Lösen Sie die gekoppelten Differentialgleichungen unter der Annahme, dass sowohl $n_{s,i}$ als auch θ_i zeitabhängig sind und dass $n_{s,1} \cong n_{s,2}$. Zeigen Sie, dass für *U* = 0 ein Josephson-Strom $I = I_0 \sin(\theta_2 - \theta_1)$ fließt.

<u>Hinweis</u>: Um die beiden Differentialgleichungen zu entkoppeln, führen Sie die relative Phase $\delta = \theta_2 - \theta_1$ *ein. Beachten Sie zudem, dass ein Gleichungssystem im komplexen Raum* $\mathbb{C}$ *für den Real- und den Imaginärteil der Gleichung unabhängig voneinander erfüllt sein muss.*

(2 Punkte)

42. Reflektivität

Zeigen Sie, dass die Formel für die Reflektivität $R = |n-1|^2/|n+1|^2$ direkt aus den Fresnel-Formeln $\rho_s = -\sin(\alpha-\beta)/\sin(\alpha+\beta)$ und $\rho_p = \tan(\alpha-\beta)/\tan(\alpha+\beta)$ für senkrechte Inzidenz folgt, wobei $R = |\rho_s(\alpha=0)|^2 = |\rho_p(\alpha=0)|^2$ mit α, β = Einfalls- bzw. Brechungswinkel und $\rho_{s,p}$ = Reflexionskoeffizient für elektrisches Feld senkrecht, bzw. parallel zur Einfallsebene. Es gilt zudem das Gesetz von Snellius: $\sin(\alpha) = n\sin(\beta)$.

(2 Punkte)