13. Übung (Abgabe Di. 08. Februar 2011 zu Beginn der Vorlesung oder spätestens bis 16:00 im Briefkasten im Sekretariat bei Frau Badow)

---

43. UV-Transparenz von Metallen

Beweisen Sie mithilfe der in der Vorlesung hergeleiteten dielektrischen Funktion $\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}$ und anhand der allgemeinen Formel für die Reflektivität $R = \frac{|\tilde{n} - 1|^2}{|\tilde{n} + 1|^2}$ sowie der Beziehung zwischen dielektrischer Funktion und komplexem Brechungsindex $\tilde{\varepsilon} = \tilde{n}^2$, wobei $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2$ und $\tilde{n} = n - ik$ ist, die Formel für die Reflektivität im Grenzfall $\gamma << \omega_p << \omega$:

$$R = 1 - 2\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_\infty} + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_\infty}}} .$$

Zeigen, Sie dass dies für typische Werte von $\varepsilon_\infty \leq 10$ bedeutet, dass Metalle im ultravioletten Spektralbereich transparent werden, d.h. *R* klein wird. Überlegen Sie, für welchen Wert von ε_∞ die Reflektivität null wird. Warum muss ε_∞ diesen Wert annehmen, wenn ω immer größer wird?

(2 Punkte)

44. Oberflächenplasmon

Betrachten Sie eine metallische Halbebene, die sich entlang der positiven *z*-Achse ausbreitet und bei der die *xy*-Ebene die Grenzfläche zum Vakuum bildet. Eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\varphi = 0$ im Metall ist $\varphi(x,z) = A\cos(kx)\,e^{-kz}$. Daraus folgt: $E_{zi}(x,z) = kA\cos(kx)\,e^{-kz}$ und $E_{xi}(x,z) = kA\sin(kx)\,e^{-kz}$, wobei der Index „*i*" für innerhalb und „*o*" für außerhalb des Metalls steht.

(a) Zeigen Sie, dass im Vakuum, also für *z* < 0, der Ansatz $\varphi_0(x,z) = A\cos(kx)\,e^{kz}$ die Randbedingung erfüllt, dass die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ stetig an der Grenzfläche ist.

(b) Zeigen Sie weiter, dass aus der Randbedingung, dass die senkrecht zur Grenzfläche stehende Komponente von $\vec{D}$ stetig an der Grenzfläche sein muss, die Bedingung $\varepsilon(\omega) = -1$ folgt. Beachten Sie, dass folgende Beziehungen gelten: $\vec{D}_i = \tilde{\varepsilon}(\omega)\varepsilon_0\vec{E}_i$ und $\vec{D}_o = \varepsilon_0\vec{E}_o$

(c) Leiten Sie daraus mithilfe der Näherung $\gamma << \omega$ und $\gamma << \omega_p$ sowie $\varepsilon_\infty = 1$ die Stern-Ferrel-Relation her:

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_p$$

(3 Punkte)

45. Plasmon einer Metallkugel

In einer metallischen Kugel gilt für die induzierte Polarisation: $\frac{1}{3}\vec{P} = -\varepsilon_0\vec{E}$. Leiten Sie damit die Resonanzfrequenz ω_{kugel} für das Plasmon im langwelligen Grenzfall $k_p = 0$ her. Es folgt

$$\omega_{kugel} = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_p$$

(2 Punkte)