

## Zusammenfassung vom 11.01.2011

**Modell der Cooper-Paare** *zwei zusätzliche Elektronen werden zum freien Elektronengas im Grundzustand hinzugegeben ( $T = 0 \text{ K}$ )*

**attraktives Streupotential**  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

→ *es gilt Impulserhaltung:*  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}'_1 + \vec{k}'_2 = \vec{K}$

→ *Streuzustände nur in begrenztem Bereich:*  $E_F \leq \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}, \frac{\hbar^2 \vec{k}'^2}{2m} \leq E_F + \hbar\omega_D$

→ *maximale Wechselwirkung für:*  $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 = \vec{k}$  **Cooper-Paar**

**Zweiteilchen-Wellenfunktion**

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{L^3} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2} = \frac{1}{L^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (V = 0)$$

$L^3 = \text{Volumen, in dem periodische Randbedingungen gelten}$

$$\psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (V \neq 0)$$

**Cooper-Paar-Wahrscheinlichkeitsdichte**

$|g(\vec{k})|^2 = \text{Wahrscheinlichkeit, ein Cooper-Paar im Zustand } (\vec{k}, -\vec{k}) \text{ zu finden}$

**Schrödinger-Gleichung**

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_1 + \Delta_2) + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] \psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = (\varepsilon + 2E_F^0) \psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$\varepsilon = \text{Energiedifferenz des Cooper-Paares relativ zur Energie bei } V = 0 \text{ (=Fermi-Energie } E_F^0)$

**Einsetzen des Ansatzes**  $\frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{k}'} \left[ \frac{\hbar^2 k'^2}{m} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] g(\vec{k}') e^{i\vec{k}'(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} = \frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{k}'} (\varepsilon + 2E_F^0) g(\vec{k}') e^{i\vec{k}'(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}$

*Multiplikation mit  $e^{-i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  und Integration über das Volumen  $L^3$  sowie Vertauschen von Integration und Summation:*

$\rightarrow \sum_{\vec{k}'} \frac{\hbar^2 k'^2}{m} g(\vec{k}') \int_{L^3} e^{i(\vec{k}' - \vec{k})\cdot\vec{r}} d^3r + \sum_{\vec{k}'} g(\vec{k}') \int_{L^3} V(\vec{r}) e^{i(\vec{k}' - \vec{k})\cdot\vec{r}} d^3r = \sum_{\vec{k}'} (\varepsilon + 2E_F^0) g(\vec{k}') \int_{L^3} e^{i(\vec{k}' - \vec{k})\cdot\vec{r}} d^3r$

*mit*  $\frac{1}{L^3} \int_{L^3} e^{i(\vec{k}' - \vec{k})\cdot\vec{r}} d^3r = \delta_{\vec{k}', \vec{k}}$  *und*  $V_{\vec{k}, \vec{k}'} = \frac{1}{L^3} \int_{L^3} V(\vec{r}) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{r}} d^3r$

$\rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{m} g(\vec{k}) + \sum_{\vec{k}'} g(\vec{k}') V_{\vec{k}, \vec{k}'} = (\varepsilon + 2E_F^0) g(\vec{k})$

**Näherung attraktive konstante Wechselwirkung**

$$V_{\vec{k}, \vec{k}'} = \begin{cases} -V_0 < 0, & E_F^0 \leq \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}, \frac{\hbar^2 \vec{k}'^2}{2m} \leq E_F^0 + \hbar\omega_D \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\rightarrow \left[ -\hbar^2 k^2/m + \varepsilon + 2E_F^0 \right] g(\vec{k}) = -A$  *mit*  $A = V_0 \sum_{\vec{k}'} g(\vec{k}')$

*Auflösen nach  $g(\vec{k})$  und Summation über  $\vec{k}$*   $\rightarrow \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) = \frac{A}{V_0} = - \sum_{\vec{k}} \frac{A}{-\hbar^2 k^2/m + \varepsilon + 2E_F^0}$

$\rightarrow 1 = V_0 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{-\varepsilon + \hbar^2 k^2/m - 2E_F^0}$

## Zusammenfassung vom 11.01.2011

Festkörperphysik für Bachelor, WS 2010/11

mit Näherung  $D(E_F^0 + \xi) \cong D(E_F^0)$

$$\xi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_F^0 \ll E_F^0$$

und  $Z(E_F^0) = \frac{1}{2} D(E_F^0)$

$Z(E_F^0) = \text{Elektronenpaar-Zustandsdichte}$

und  $\sum_{\vec{k}} \Rightarrow \frac{1}{2} \int_{\text{Kugelschale } \hbar\omega_D} D(\vec{k}) d^3k \Rightarrow \frac{1}{2} \int_{\text{Kugelschale } \hbar\omega_D} D(E) dE \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{\hbar\omega_D} D(\xi) d\xi$

$$\rightarrow 1 = V_0 Z(E_F^0) \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{1}{2\xi - \varepsilon} d\xi = V_0 Z(E_F^0) \frac{1}{2} [\ln(2\xi - \varepsilon)]_0^{\hbar\omega_D}$$

$$\rightarrow 1 = \frac{1}{2} V_0 Z(E_F^0) \ln \frac{\varepsilon - 2\hbar\omega_D}{\varepsilon}$$

Energie des Cooper-Paares

$$\rightarrow \varepsilon = \frac{2\hbar\omega_D}{1 - e^{-\frac{2}{V_0 Z(E_F^0)}}} \cong -2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{V_0 Z(E_F^0)}} < 0 \quad \text{da } V_0 Z(E_F^0) \ll 1$$

$\rightarrow$  ist ein gebundener Zustand, da  $\varepsilon < 0$  für beliebig kleine  $V_0$

Spin des Cooper-Paares

Singulett-Zustand, da  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \propto e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2}$  symmetrisch bezüglich Vertauschung von  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  ist und die gesamte Wellenfunktion antisymmetrisch sein muss

$\rightarrow (\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow)$  Cooper-Paar