Zusammenfassung vom 20.01.2012

Beitrag der kinetischen Energie

$$E_{kin} = 2\sum_{\vec{k}} w_{\vec{k}}\,\xi_{\vec{k}} \qquad \xi_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_F^0$$

$w_{\vec{k}}$ = *Wahrscheinlichkeit, ein Cooper-Paar im Zustand $\vec{k}$ zu finden*

quantenmechanische Beschreibung des Cooper-Paares

$|1\rangle_{\vec{k}}$ ➔ *Cooper-Paar* $(\vec{k}\uparrow,-\vec{k}\downarrow)$ *ist besetzt*

$|0\rangle_{\vec{k}}$ ➔ *Cooper-Paar* $(\vec{k}\uparrow,-\vec{k}\downarrow)$ *ist unbesetzt*

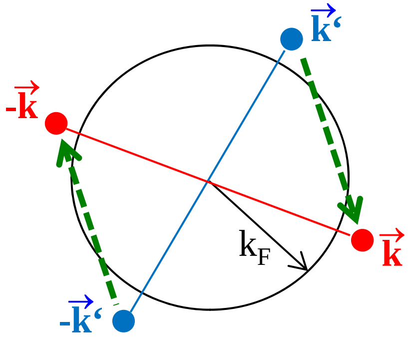
Cooper-Paar-Ereugungs-/Vernichtungsoperator

$\sigma_{\vec{k}}^{+}|0\rangle_{\vec{k}} = |1\rangle_{\vec{k}} \qquad \sigma_{\vec{k}}^{+}|1\rangle_{\vec{k}} = 0$ *Erzeugungsoperator*

$\sigma_{\vec{k}}^{-}|1\rangle_{\vec{k}} = |0\rangle_{\vec{k}} \qquad \sigma_{\vec{k}}^{-}|0\rangle_{\vec{k}} = 0$ *Vernichtungsoperator*

Hamilton-Wechselwirkungsoperator

$$H_{int} = -V_0 \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \sigma_{\vec{k}}^{+}\,\sigma_{\vec{k}'}^{-}$$



➔ *Summation findet nur in einer dünnen Energieschale um die Fermi-Kugel statt:* $E_F^0 - \hbar\omega_D \le \hbar^2 \vec{k}^2/2m \le E_F^0 + \hbar\omega_D$

➔ *beschreibt die attraktive Streuung eines Cooper-Paares:*

$$(\vec{k}'\uparrow,-\vec{k}'\downarrow) \Rightarrow (\vec{k}\uparrow,-\vec{k}\downarrow)$$

Zusammenfassung vom 20.01.2012

BCS-Grundzustand

$$\left|\Phi_{BCS}\right\rangle = \prod_{\vec{k}} \left[u_{\vec{k}}\left|0\right\rangle_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}\left|1\right\rangle_{\vec{k}}\right] \qquad v_{\vec{k}}^2 + u_{\vec{k}}^2 = 1 \quad \textit{Normierung}$$

➔ $\left\langle\Phi_{BCS}\middle|\Phi_{BCS}\right\rangle = 1$ ➔ $v_{\vec{k}}^2 = w_{\vec{k}}$

➔ *Produktansatz über alle möglichen Cooper-Paare*

Energieabsenkung durch Streuprozess

$$\Delta E_{WW} = \left\langle\Phi_{BCS}\middle|H_{int}\middle|\Phi_{BCS}\right\rangle = -V_0 \sum_{\vec{k},\vec{k}'} v_{\vec{k}} u_{\vec{k}} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'}$$

Störungs-theorie

Gesamtenergie des BCS-Zustands

$$W_{BCS} = E_{kin} + \Delta E_{WW} = 2\sum_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^2 \xi_{\vec{k}} - V_0 \sum_{\vec{k},\vec{k}'} v_{\vec{k}} u_{\vec{k}} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'}$$

Parametrisierung von u_k und v_k

$v_{\vec{k}} = \cos\theta_{\vec{k}} \qquad u_{\vec{k}} = \sin\theta_{\vec{k}}$ ➔ $v_{\vec{k}}^2 + u_{\vec{k}}^2 = 1$

➔ $$W_{BCS} = 2\sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} \cos^2\theta_{\vec{k}} - \frac{V_0}{4}\sum_{\vec{k},\vec{k}'} \sin\left(2\theta_{\vec{k}}\right)\sin\left(2\theta_{\vec{k}'}\right)$$

BCS-Grundzustands-energie

W^0_{BCS} *= Minimum von W_{BCS} als Funktion von $u_{\vec{k}}$, $v_{\vec{k}}$*
unter der Nebenbedingung: $v_{\vec{k}}^2 + u_{\vec{k}}^2 = 1$

➔ $$\frac{\partial W_{BCS}}{\partial\theta_{\vec{k}}} = 0 = -2\xi_{\vec{k}}\sin\left(2\theta_{\vec{k}}\right) - V_0\cos\left(2\theta_{\vec{k}}\right)\sum_{\vec{k}'}\sin\left(2\theta_{\vec{k}'}\right)$$

➔ $$\xi_{\vec{k}}\tan\left(2\theta_{\vec{k}}\right) = -\frac{1}{2}V_0\sum_{\vec{k}'}\sin\left(2\theta_{\vec{k}'}\right) = -\Delta$$

Zusammenfassung vom 20.01.2012

Anregungsenergien (Δ, E_k)

$$\Delta = \frac{1}{2} V_0 \sum_{\vec{k}'} \sin\left(2\theta_{\vec{k}'}\right) = V_0 \sum_{\vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'}$$

$$E_{\vec{k}'} = \sqrt{\xi_{\vec{k}'}^2 + \Delta^2}$$

$$\Rightarrow \tan\left(2\theta_{\vec{k}}\right) = -\frac{\Delta}{\xi_{\vec{k}}} \qquad \Rightarrow \sin\left(2\theta_{\vec{k}}\right) = 2 u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} = \frac{\Delta}{E_{\vec{k}}}$$

$$\Rightarrow \cos\left(2\theta_{\vec{k}}\right) = v_{\vec{k}}^2 - u_{\vec{k}}^2 = 2 v_{\vec{k}}^2 - 1 = -\frac{\xi_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} \qquad \Rightarrow v_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}}\right)$$

BCS-Grundzustands-energie

$$\Rightarrow W_{BCS}^0 = \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} \left(1 - \frac{\xi_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}}\right) - \frac{\Delta^2}{V_0}$$

BCS-Kondensations-energie

$$W_{BCS}^0 - W_n^0 \qquad W_n^0 = \sum_{|\vec{k}|<k_F} 2\,\xi_{\vec{k}}$$

W_n^0 = ***Energie des normal leitenden Grundzustands***

= Energiedifferenz zwischen BCS-Grundzustand und normal leitendem Grundzustand

$$\Rightarrow W_{BCS}^0 - W_n^0 = -\frac{1}{2} Z\left(E_F^0\right) \Delta^2$$