

**12. Übung (Abgabe Di. 31. Januar 2012 zu Beginn der Vorlesung oder spätestens bis 16:00 im Briefkasten im Sekretariat bei Frau Badow)**

**37. Besetzungswahrscheinlichkeit eines Cooper-Paares**

- (a) Zeigen Sie, dass im Rahmen der BCS-Theorie die Besetzungswahrscheinlichkeit  $w_{\vec{k}}$  für ein Cooper-Paar ( $\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow$ ) bei  $T = 0$  K gegeben ist durch:  $w_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \left( 1 - \xi_{\vec{k}} / \sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2} \right)$ .
- (b) Zeigen Sie weiter, dass  $w_{\vec{k}}(\xi_{\vec{k}})$  fast genau den gleichen Verlauf hat wie die Fermi-Verteilungsfunktion  $f(E, T_{\text{crit}})$  bei  $T = T_{\text{crit}}$ , wobei  $E = E_{\text{F}} + \xi_{\vec{k}}$  zu setzen ist.
- (c) Welche Beziehung folgt daraus zwischen  $\Delta$  und  $T_{\text{crit}}$ ? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Resultat der BCS-Theorie:  $\Delta/k_{\text{B}}T_{\text{crit}} = 1.764$ .

(4 Punkte)

**38. Erster angeregter Zustand über dem BCS-Grundzustand**

Der erste angeregte Zustand über dem BCS-Grundzustand besteht darin, dass ein Cooper-Paar durch äußeren Einfluss aufgebrochen wird, wobei ein Elektron ( $\vec{k} \uparrow$ ) heraus gestreut wird und das andere als ungepaartes Elektron ( $-\vec{k} \downarrow$ ) zurück bleibt. Berechnen Sie die dafür benötigte Anregungsenergie im Rahmen der BCS-Theorie. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- (a) Zeigen Sie, dass die BCS-Grundzustandsenergie mit Hilfe der Beziehungen zwischen  $u_{\vec{k}}$ ,  $v_{\vec{k}}$  und  $\theta_{\vec{k}}$  sowie trigonometrischen Umwandlungsformeln geschrieben werden kann als:  $W_{\text{BCS}}^0 = -2 \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^4$ , mit  $E_{\vec{k}} = \sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}$ .
- (b) Wenn das Cooper-Paar ( $\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow$ ) besetzt ist, gilt  $v_{\vec{k}}^2 = 1$ , wenn es aufbricht, dann wird  $v_{\vec{k}}^2 = 0$ . Leiten Sie daraus die Beziehung für den ersten angeregten Zustand  $W_{\text{BCS}}^1$  her, indem Sie vom Ergebnis (a) ausgehen.
- (c) Berechnen Sie nun die nötige Anregungsenergie als Differenz zwischen  $W_{\text{BCS}}^1$  und  $W_{\text{BCS}}^0$ :  $\Delta E = W_{\text{BCS}}^1 - W_{\text{BCS}}^0$ . Zeigen Sie, dass die minimale Anregungsenergie (d.h. für  $\xi_{\vec{k}} = 0$ ) dann gegeben ist durch  $\Delta E_{\text{min}} = 2\Delta$ , d.h. das Anregungsspektrum besitzt eine Energielücke  $2\Delta$ !

(4 Punkte)

**39. kritisches Magnetfeld**

Leiten Sie die Beziehung für das kritische Magnetfeld her,  $B_{\text{crit}} = \sqrt{3/2} \mu_0 \Lambda_L j_{\text{crit}}$ , mit  $j_{\text{crit}} = en_s \Delta / \hbar k_{\text{F}}$ , indem Sie die BCS-Kondensationsenergie  $|W_{\text{BCS}}^0 - W_{\text{n}}^0| = \frac{1}{2} Z(E_{\text{F}}) \Delta^2$  gleich der magnetischen Feldenergie im Innern des Supraleiters setzen. Die magnetische Feldenergie im Volumen  $L^3$  ergibt sich aus der Integration über die durch das äußere Feld  $\vec{B}_0$  erzeugte (diamagnetische) Magnetisierung:  $dE_{\text{magn}} = -L^3 M_{\text{dia}}(\vec{B}_0) d\vec{B}_0$ .

*Hinweis: Um eine Beziehung zwischen  $M_{\text{dia}}$  und  $B_0$  herzuleiten, beachten Sie, dass im Supraleiter der Meissner-Ochsenfeld-Effekt existiert. Die Zustandsdichte  $D(E)$  entspricht derjenigen des freien Elektronengases bezogen auf die Dichte der supraleitenden Elektronen  $n_s$ .*

(3 Punkte)