7. Übung (Abgabe Di. 9. Juni spätestens bis 14:00 Uhr zu Beginn der Vorlesung)

---

31. Aufgabe ME7 (nur für Lehramtsstudierende!) (4 Punkte)

$$K = \left\{ \vec{r}(r,\theta,\varphi) = r \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \le r \le \frac{h}{\sqrt{2}} \;\wedge\; 0 \le \varphi < 2\pi \;\wedge\; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \right\}$$

ist ein auf der Spitze stehender Kegel der Höhe h mit dem Öffnungswinkel $\frac{\pi}{4}$ (also 45°).

Betrachte das Vektorfeld $\vec{f}(\vec{r}) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechne den Fluss des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch den Kegel<u>mantel</u>!
(Achtung! Konvention: Die Normale soll aus dem Kegel heraus zeigen!)

b) Bestimme den Fluss des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch den „Deckel" des Kegels!
Tipp: Überlege, wie die „Deckelnormale" im Raum steht! (Diese Überlegung kann eine ausführliche Rechnung ersparen!)

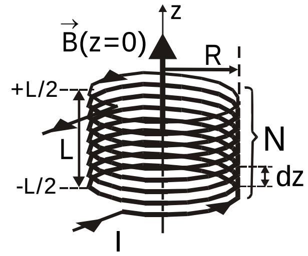
32. Kraft auf Leiterschleife (4 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes, dass das Magnetfeld eines dünnen, unendlich langen Leiters in dem der Strom *I* fließt gegeben ist durch $B(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$.

<u>Hinweis:</u> Legen Sie den Leiter entlang der z-Achse. Da der Leiter ∞-lang ist, reicht es, das Magnetfeld $\vec{B}$ bei z = 0 zu berechnen. Überlegen Sie sich, dass $\vec{B}$ nur vom Abstand zum Leiter abhängen kann und tangential zu einem Kreis in der xy-Ebene liegen muss. Nun brauchen Sie nur noch den Betrag von $\vec{B}$ auszurechnen, indem Sie über die gesamte Leiterlänge integrieren. Das dabei auftretende Integral finden Sie in jeder Formelsammlung

33. Magnetfeld einer langen Spule (4 Punkte)

Leiten Sie mit Hilfe des Gesetzes von Biot-Savart das Magnetfeld auf der Achse einer langen Spule her. Berechnen Sie zunächst das Feld im Mittelpunkt der Spule (z = 0) indem Sie über eine endlich lange, kreisförmige Spule der Länge L mit Radius R und N Windungen integrieren. Zeigen Sie, dass Sie für $L >> R$ die in der Vorlesung hergeleitete Formel $B = \mu_0 NI/L$ erhalten.



Hinweis: Verwenden Sie als Ausgangspunkt Ihrer Herleitung das in der Vorlesung gerechnete Beispiel für das Magnetfeld auf der Achse einer Leiterschleife: $B(z) = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$

Benutzen Sie diesen Ansatz, um den Beitrag dB(z) zu berechnen, den der Strom dI *auf der Länge* dz *eines kleinen Teils der Spule erzeugt. Die Größe* dI *lässt sich mit Hilfe der Wicklungsdichte* n = N/L *durch* dz *ausdrücken. Mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes lässt sich nun der Magnetfeldbeitrag in der Mitte der z-Achse formulieren.*

7. Übung (Abgabe Di. 9. Juni spätestens bis 14:00 Uhr zu Beginn der Vorlesung)

---

34. Doppeltes Kreuzprodukt (4 Punkte)

a) Beweisen Sie den Entwicklungssatz für doppelte Kreuzprodukte:
$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\,.$$

b) Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Satzes für den Differentialoperator $\vec{\nabla}$, indem Sie zeigen, dass gilt: $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\Delta\vec{A}$.

35. Biot-Savart-Gesetz und Ampère'sches Gesetz (***nicht*** für Lehramtsstudierende!) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass aus der Integralform des Ampère'schen Gesetzes in Coulomb-Eichung,
$$\vec{A}_m\left(\vec{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{j}\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\,d^3r'\,,$$
wobei $\vec{A}_m\left(\vec{r}\right)$ das Vektorpotential und $\vec{j}\left(\vec{r}'\right)$ die Stromdichte ist, das Biot-Savart-Gesetz abgeleitet werden kann:
$$\vec{B}\left(\vec{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3r'\,\frac{\vec{j}\left(r'\right)\times\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}.$$

<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie die Definition des Vektorpotentials: $\vec{B}\left(\vec{r}\right)=\vec{\nabla}\times\vec{A}_m\left(\vec{r}\right)$, *und zeigen Sie zuerst, dass folgende Beziehung gilt:* $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\right)=-\frac{x-x'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$, *wobei* $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *und* $\vec{r}'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.