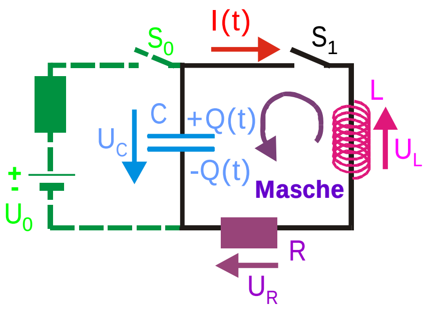
Zusammenfassung vom 23.06.2009

VII.6 LCR-Kreise



$t < 0$: Laden von Kondensator C auf Ladung Q_0

$t \geq 0$: Kondensator C entlädt sich über Widerstand R und Spule L

➜ $I(t) = -\dot{Q}(t)$ *Ladung nimmt ab für positiven Strom*

➜ $U_L(t) = -L\,\dot{I}(t) = L\ddot{Q}(t)$ *$U_L(t)$ zeigt entgegen der Strom-richtung (Lenz'sche Regel)*

➜ $U_C(t) - U_R(t) + U_L(t) = 0$ *Maschenregel*

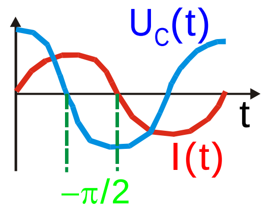
➜ $Q(t) + RC\,\dot{Q}(t) + LC\,\ddot{Q}(t) = 0$ *Differentialgleichung für freien gedämpften Schwingkreis*

LC-Kreis (freier, ungedämpfter Schwingkreis): $R = 0$

➜ $Q(t) + LC\,\ddot{Q}(t) = 0$ *Differentialgleichung für freien ungedämpften Schwingkreis*

➜ $Q(t) = Q_0 \cos(\omega t)$ $\quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ➜ $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ $\quad I_0 = \omega Q_0$

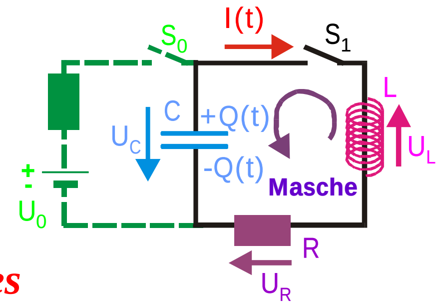
Resonanzfrequenz ➜ $U_C(t) = U_0 \cos(\omega t)$ $\quad U_0 = Q_0/C$



Energiebetrachtung: $E_{Kond}(t) + E_{Spule}(t) = \text{const} = \frac{1}{2C} Q_0^2$ *Energiesatz!*

LCR-Kreis (freier, gedämpfter Schwingkreis): $R > 0$ ➜ $\tilde{Q}(t) = \tilde{Q}_0 e^{\tilde{\mu} t} \quad \tilde{Q}_0 \in \mathbb{C}, \quad \tilde{\mu} \in \mathbb{C}$

einsetzen ➜ $\tilde{\mu}_{1,2} = -\tau^{-1} \pm \sqrt{\tau^{-2} - \omega_0^2}$ $\qquad Q(0) = Q_0 \qquad I(0) = 0$

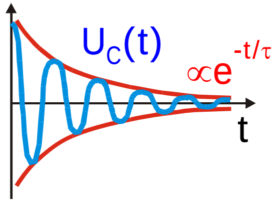


$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \tau^{-2}} \qquad \tau = \frac{2L}{R} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Abklingzeit $\qquad$ *Resonanzfrequenz des ungedämpften Schwingkreises*

$\omega_0 > \tau^{-1}$: *unterkritisch gedämpft*

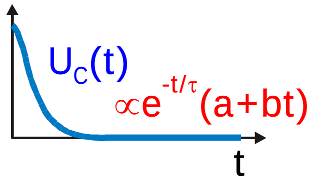
$$Q(t) = \frac{Q_0}{\cos\delta} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \delta) \qquad \tan\delta = -\frac{1}{\omega\tau}$$



$$\rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega t)\right]$$

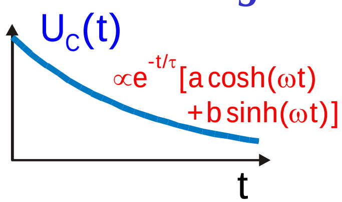
$$\rightarrow I(t) = \omega Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t)\left[1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}\right]$$

$\omega_0 = \tau^{-1}$: *kritisch gedämpft* $\quad \omega^2 = 0 \quad$ *aperiodischer Grenzfall*



$$\rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left[1 + \frac{1}{\tau} \lim_{\omega \to 0} \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right] = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + \frac{1}{\tau} t\right)$$

$\omega_0 < \tau^{-1}$: *überkritisch gedämpft* $\quad \omega^2 < 0 \Rightarrow \tilde{\omega} = \pm i\omega$



$$\rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\cosh(\omega t) + \frac{1}{\omega\tau}\sinh(\omega t)\right]$$