

## Kleines $\times$ i der komplexen Zahlen

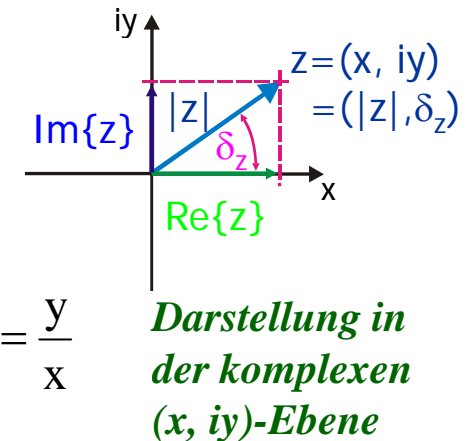
$$\pm i = \sqrt{-1} \quad \rightarrow \quad i^2 = -1 \quad \text{imaginäre Einheit als Lösung von } \sqrt{-1}$$

$$z = x + iy \quad x = \operatorname{Re}\{z\} \text{ Realteil, } y = \operatorname{Im}\{z\} \text{ Imaginärteil}$$

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{konjugiert komplexe Zahl zu } z \quad \rightarrow \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$z = |z|e^{i\delta_z} \quad \text{Polardarstellung} \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \delta_z = \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}} = \frac{y}{x}$$

**Betrag** **Phase**



$$z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$$

$$\rightarrow z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \quad \text{Addition, Subtraktion}$$

$$\rightarrow z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 \underbrace{-}_{i^2=-1} y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad \text{Multiplikation}$$

$$\rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - y_2x_1)}{x_2^2 + y_2^2} \quad \text{Division}$$

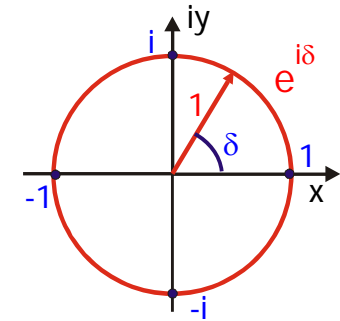
$$\rightarrow \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad \overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

$$\rightarrow \overline{f(z)} = f(\bar{z}) \quad \text{für alle „gutmütigen“ Funktionen, d.h. in der Regel für alle von Physikern benutzte Funktionen (exp, ln, sin, cos, sinh, cosh....)}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{Exponentialfunktion}$$

$$\rightarrow \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{hyperbolische Funktionen („Kettenfunktion“)}$$

$$\rightarrow \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$



$$e^{i\delta} = \cos \delta + i \sin \delta \quad \text{Exponentialfunktion mit komplexem Argument, entspricht dem Einheitskreis in der komplexen Ebene}$$

$\rightarrow e^{\pm i\pi} = -1$   
 $\rightarrow e^{\pm i\pi/2} = \pm i$

$$\rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{trigonometrische Funktionen} \quad \rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\rightarrow \cos(\pm ix) = \frac{e^{i(\pm ix)} + e^{-i(\pm ix)}}{2} = \frac{e^{\mp x} + e^{\pm x}}{2} = \cosh(x)$$

$$\rightarrow \sin(\pm ix) = \pm i \sinh(x) \quad \tan(\pm ix) = \pm i \tanh(x)$$

$$\rightarrow \cos(z) = \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\rightarrow \sin(z) = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$