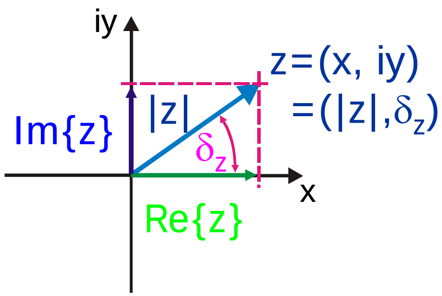
Kleines i×i der komplexen Zahlen



Darstellung in der komplexen (x, iy)-Ebene

$\pm i = \sqrt{-1}$ ➜ $i^2 = -1$ *imaginäre Einheit als Lösung von √-1*

$z = x + iy$ *x = Re{z} Realteil, y = Im{z} Imaginärteil*

$\bar{z} = x - iy$ *konjugiert komplexe Zahl zu z* ➜ $\bar{\bar{z}} = z$

$z = |z| e^{i\delta_z}$ *Polardarstellung* $|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\tan\delta_z = \frac{\mathrm{Im}\{z\}}{\mathrm{Re}\{z\}} = \frac{y}{x}$

Betrag *Phase*

$z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$

➜ $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ *Addition, Subtraktion*

➜ $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 \underbrace{-}_{i^2=-1} y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ *Multiplikation*

➜ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2}$ *Division*

➜ $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

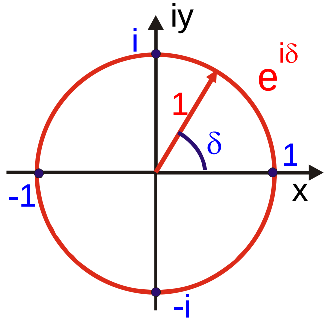
➜ $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ *für alle „gutmütigen“ Funktionen, d.h. in der Regel für alle von Physikern benutzte Funktionen (exp, ln, sin, cos, sinh, cosh....)*

Kleines i×i der komplexen Zahlen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$ *Exponentialfunktion*

→ $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ *hyperbolische Funktionen („Kettenfunktion")*

→ $$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$ → $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$



$$e^{i\delta} = \cos\delta + i\sin\delta$$ *Exponentialfunktion mit **komplexem** Argument, entspricht dem **Einheitskreis** in der komplexen Ebene*

→ $$e^{\pm i\pi} = -1$$

→ $$e^{\pm i\pi/2} = \pm i$$

→ $$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$ *trigonometrische Funktionen* → $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

→ $$\cos(\pm ix) = \frac{e^{i(\pm ix)} + e^{-i(\pm ix)}}{2} = \frac{e^{\mp x} + e^{\pm x}}{2} = \cosh(x)$$

→ $$\sin(\pm ix) = \pm i \sinh(x) \qquad \tan(\pm ix) = \pm i \tanh(x)$$

→ $$\cos(z) = \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

→ $$\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$