FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Physik
Übungen zur Vorlesung
''Einführung in die Physik der Atome und Moleküle I'' (SoSe 2008)
- Prof. Karsten Heyne -
Aufgabenblatt 4 vom 08.05.2008

Abgabe bei der Vorlesung oder per E-Mail an: fidder@physik.fu-berlin.de
vor Donnerstag 15.05.2008, 12h30.

Aufgabe 4–1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass gilt:

$a^+ a\Psi_n = -2n\Psi_n$

wobei $\Psi_n = H_n e^{-y^2/2}$.

Aufgabe 4–2 (1 + 1 + 1.5 + 2 Punkte)

In Aufgabe 4-1 haben Sie gezeigt, dass für den Harmonischen Oszillator gilt:
$a^+ a\Psi_n = -2n\Psi_n$
wobei $n = 0, 1, 2, ...$

(a) Zeigen Sie, dass für quadratintegrierbare Ψ und φ gilt:

$\int (a^+\varphi)^*\Psi dy = -\int \varphi^* a\Psi dy$

Hinweis: partiell integrieren.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass

$\int (a^+\Psi_n)^*(a^+\Psi_n)dy = 2(n+1)\int \Psi_n^*\Psi_n dy.$

(c) Verwenden Sie das Ergebnis aus (b), um zu zeigen, dass wenn Ψ_n normiert ist,

$\Psi_{n+1} = 2^{-1/2}(n+1)^{-1/2}a^+\Psi_n$

ebenfalls normiert ist.
Es gilt also: $a^+\Psi_n = 2^{1/2}(n+1)^{1/2}\Psi_{n+1}$

Zeigen Sie analog, dass

$a\Psi_n = 2^{1/2}(n)^{1/2}\Psi_{n-1}$

(d) Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von $\Psi_n \rightarrow \Psi_m$ ist proportional zum Quadrat des Matrixelementes:

$\int \Psi_m^* x\Psi_n dy = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}\int \Psi_m^* y\Psi_n dy = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}\int \Psi_m^*(\frac{a-a^+}{2})\Psi_n dy$

Verwenden Sie die Ergebnisse aus (c) um zu zeigen, dass die Übergangswahrscheinligkeit Null ist, außer wenn $m = n \pm 1$ (Auswahlregel), und dass dann gilt:

$$\left|\int \Psi_{n+1}^* x \Psi_n dy\right|^2 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right) \frac{(n+1)}{2}$$

$$\left|\int \Psi_{n-1}^* x \Psi_n dy\right|^2 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right) \frac{n}{2}$$

Aufgabe 4–3 (1 + 1.5 Punkte)

Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

(b) $[L_z, L^2] = 0$