Elektrizitätslehre

Die elektrische Ladung

Das Wort »Elektrizität« ist abgeleitet von dem griechischen »elektra« = Bernstein. Es ist nämlich seit dem Altertum bekannt, daß das Reiben von Materialien wie Bernstein, Glas usw. mit einem Tuch oder Fell eine (scheinbar schwache) Kraftwirkung auf leichte Objekte (Papierschnipsel usw.) hervorrufen kann.

Erst im 18. Jh. wurde es klar, das es sich hierbei um eine *Ladungstrennung* handelt. Alle Materie enthält elektrische Ladungen, die man (in geringem Maße) durch Reibung freisetzen kann. Die Ladungen üben aufeinander eine elektrische Kraft aus, die COULOMB-Kraft. Diese hat die gleiche Form wie die Gravitationskraft, ist jedoch viel stärker:

$$F_c = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \qquad \text{(COULOMB-Gesetz)}$$

wobei q_1 und q_2 die beiden Ladungen und r ihr Abstand sind; die Richtung der Kraft von Ladung 1 auf Ladung 2 liegt entlang ihrer Verbindungslinie:

Im Gegensatz zur Gravitation, wo es nur eine Sorte Schweremasse gibt, existieren zwei Ladungstypen: positive und negative. (Früher unterschied man dementsprechend zwei Sorten der Elektrizität, genannt »Glaselektrizität« (+) und »Harzelektrizität« (-), weil sie durch Reiben der entsprechenden Materialien produziert werden konnten). Gleichnamige Ladungen stoßen sich gegenseitig ab (siehe Abb. 1.7 auf der nächsten Seite), während unterschiedliche Ladungen sich gegenseitig anziehen.

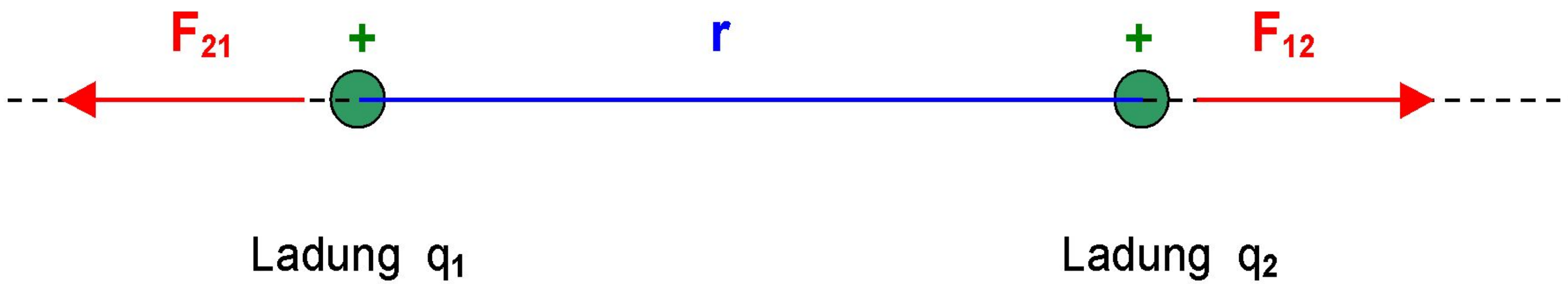


Abbildung 1.7. Coulombkraft

Die Einführung des Begriffs der elektrischen Ladung macht es sinnvoll, eine weitere Basiseinheit zu definieren. Die Einheit der Ladung heißt Coulomb (C) und ist definiert durch das Coulomb-Gesetz zusammen mit der Naturkonstante $1/4\,\pi\,\varepsilon_0$ (der Faktor 4π wird aus geometrischen Gründen verwendet – 4π ist der Raumwinkel um eine Punktladung). Die Konstante hat den Wert

$$8{,}988 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$$

und verbindet die schon definierten mechanischen Größen Kraft (N) und Abstand (m) mit der elektrischen Größe Ladungsmenge (C).

Später wurde die Basiseinheit als die Einheit des elektrischen Stromes I definiert; diese Einheit heißt Ampère und wird gemessen über die magnetische Kraftwirkung zweier Ströme aufeinander. Der elektrische

Strom I ist analog zu anderen Stromgrößen wie dem Volumenstrom I_{V} oder dem Wärmestrom I_Q definiert:

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \,; \qquad I_{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \,; \qquad I_Q = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \,.$$

Demnach gilt: 1 C = 1 As; letztere ist die moderne Einheit der elektrischen Ladung. Für die Ladung gilt ein Erhaltungsgesetz (Ladungserhaltung):

Die Summe aller Ladungen in der Welt bleibt konstant.

Man kann zwar Ladungen aus Energie erzeugen oder vernichten, jedoch immer nur paarweise (+/−); die Summe der Ladungen bleibt konstant. Dieses Gesetz hängt mit der Invarianz des elektrischen Potentials unter Verschiebung seines Nullpunktes (»Eichinvarianz«) zusammen. Ladungen können über ihre Kraftwirkung mit einem Elektrometer gemessen werden.

Die elektrische Ladung ist auch *quantisiert*: es gibt eine kleinste Ladung, die *Elementarladung* e_0. Kleinere (freie) Ladungen treten in der Natur nicht auf. Das *Elektron* trägt eine negative Elementarladung, $-e_0$; das Proton, eine positive Elementarladung. Die Elementarladung beträgt $1{,}609 \cdot 10^{-19}$C.

Als Beispiel berechnen wir die Coulomb-Kraft, die die sogenannten *Leitungselektronen*, die sich in einem 1-Ct.-Stück befinden, auf das 1.-Ct.-Stück ausüben. Wir gehen davon aus, dass man die Leitungselektronen herausziehen und in 1 m Entfernung Abstand aufsammeln könnte. Jedes Material enthält Elektronen; in Metallen löst sich ein Teil der Elektronen von den Atomen und bildet ein (fast) freies »Elektronengas«. Die einzelnen Teilchen in diesem »Gas« heißen »Leitungselektronen«, da sie einen elektrischen Strom leiten können. In einem Ct.-Stück aus Kupfer gibt es *ein* Leitungselektron pro Atom; diese können sich fast frei bewegen in dem Metall, können aber nur mit größerem Energieaufwand (»Austrittsarbeit«) das Metallstück verlassen. Wenn wir sie um 1 Meter entfernen könnten, würde die gleiche positive Ladungsmenge in dem Stück zurückbleiben, wir hätten dann die Anziehungskraft:

$$F_\mathrm{c} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

mit $r = 1$ m. Die Ladung q ist gleich 1 Elementarladung/Atom, d. h. $q = Ne_0 = \nu\, N_\mathrm{A}\, e_0 = (m/M_\mathrm{A})N_\mathrm{A}\, e_0$, wo m die Masse des Ct.-Stücks mit N Atomen, M_A die molare Masse von Cu, ν die Molzahl und N_A die AVOGADRO-Zahl sind. Mit $m = 2$ g und $M_\mathrm{A} = 63{,}55$ g/mol erhalten wir

$$q = 3{,}04 \cdot 10^3 \mathrm{C}$$

und damit

$$F_\mathrm{c} = 8{,}988 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}} \cdot \frac{\left(3{,}04 \cdot 10^3\right)^2}{1^2}\,\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{m^2}} = 8{,}3 \cdot 10^{16}\mathrm{N}\ !!$$

Dies ist die Gewichtskraft von $8{,}5 \cdot 10^{12}$ Tonnen, etwa das Gewicht eines großen Berges der Höhe 3000 m und Basisdurchmesser 50 km! Die Coulomb-Kraft ist tatsächlich sehr stark, sie erscheint schwach im täglichen Leben nur deshalb, weil es nie gelingt, eine größere Ladungsmenge zu trennen oder »freizusetzen«.

Diese Kraft bindet die Elektronen in den Atomen und hält die Materie zusammen; sie bildet die Grundlage für die chemische Bindung.

Mikroskopisch ist es möglich, mit einem Energieaufwand einzelne Ladungen von Atomen oder Molekülen zu trennen oder zurückzugeben; dies nennt sich »Ionisation« bzw. »Rekombination«:

$$A + E_\mathrm{ion} \to A^+ + e^- \qquad \text{und} \qquad A^+ + e^- \to A + E_\mathrm{B}\ (= -E_\mathrm{ion})\ .$$

Die Energie E_B nennt sich »Bindungsenergie« ; Bindungsenergien sind immer negativ. Bei Molekülen wie AB kann die Ionisation mit einer Aufspaltung der chemischen Bindung einhergehen (»Dissoziation«):

$$AB + E_\mathrm{dis} \to A^+ + B^-\ .$$

Makroskopische Körper, die bewegliche Ladungen enthalten, heißen »elektrische Leiter«. Alle Metalle sind mehr oder weniger gute Leiter. Andere Materialien (Glas, Kunststoffe, ionische Kristalle wie NaCl) sind »Isolatoren« oder »Dielektrika«: sie enthalten nur *gebundene* Ladungen, die nicht beweglich sind und keinen Strom leiten können. Dazwischen liegen die »Halbleiter« wie die Elemente Si, Ge oder die Verbindungen GaAs, CdS, die durch eine geringe Energiezufuhr (Licht, Erwärmung) leitend gemacht werden können. Auch Flüssigkeiten, wenn sie gelöste Ionen enthalten (»Elektrolytlösungen«), sowie ionisierte Gase (»Plasmen«) können einen elektrischen Strom leiten.

Elektrostatik

Die Elektrostatik ist die Untersuchung von nicht-beweglichen Ladungen. Solange man nur mit Paaren von Ladungen zu tun hat, ist die Berechnung der COULOMB-Kraft nach dem COULOMB-Gesetz einfach. Mit vielen Ladungen oder ausgedehnten Ladungsverteilungen wird dies sehr schwierig; dazu führt man den Begriff des elektrischen Feldes E ein. Das elektrische Feld ist eine Vektorgröße, welche die *Kraftwirkung auf eine Probeladung* q_0 zu jedem Punkt im Raum angibt. Die Feldstärke ist definiert als Kraft/Ladung:

$$E(x, y, z) = \frac{F_{\mathrm{c}}(x, y, z)}{q_0} \, .$$

Ihre Einheit ist N/C (oder V/m, s. später). Elektrische Felder addieren sich vektoriell wie Kräfte. Man kann sie »sichtbar« machen, in dem man die Kraftlinien mit einem feinen Pulver nachzeichnet, oder durch Messen mit einem Meßinstrument. Per Konvention beginnen die Feldlinien an positiven Ladungen und enden an negativen; Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes.

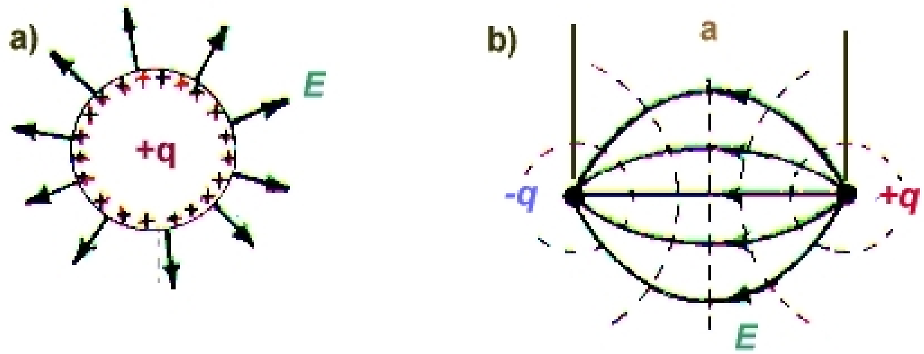


Abbildung 1.8. Elektrische Feldverteilungen: a) ein elektrischer Monopol [punktförmige oder kugelförmige Einzelladung]. Sein elektrisches Feld (Coulombfeld) zeigt radial vom Mittelpunkt nach außen und nimmt wie $1/(\text{Abstand})^2$ ab. b) Der elektrische Dipol [zwei entgegengesetzte Ladungen im festen Abstand a]. Sein Feld ist gekrümmt und zeigt eine Symmetrieebene (gestrichelt).

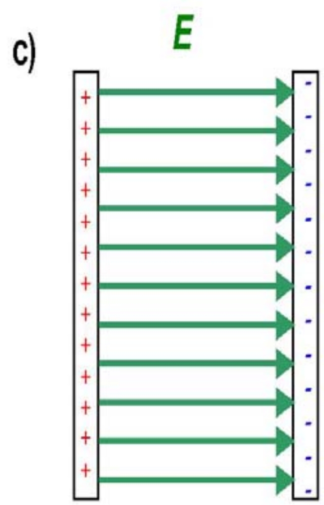


Abbildung 1.9. c) Das homogene Feld zwischen den Platten eines geladenen Plattenkondensators; es hat überall die gleiche Stärke und Richtung.

Das elektrische Potential

Wir gehen nun genauso wie in der Mechanik vor: nachdem wir die elektrische Kraft diskutiert und durch eine Feldgröße beschrieben haben (elektrisches Feld E), betrachten wir nun die Prozeßgröße Arbeit sowie die Zustandsgröße Energie. Eine Probeladung q_0 im Feld E erfährt eine Kraft; Bewegung der Ladung gegen diese Kraft benötigt die Verrichtung von Arbeit, während umgekehrt, die Ladung Arbeit verrichten kann, wenn sie sich in Feldrichtung bewegt. Wir schreiben

$$\Delta W = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int q_0 \, \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\Delta W}{q_0} = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \; .$$

Dieses Integral hat z. B. für das Feld einer Punktladung q_1 eine einfache Form:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad \text{(Coulomb-Feld)} \; ,$$

und

$$\frac{\Delta W}{q_0} = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r} \; .$$

Die Arbeit/Ladung $\Delta W/q_0$ ist ein Maß für die Arbeit, die verrichtet werden müßte, wenn wir die Ladung q_0 zu einer gleichnamigen Ladung q_1 hinbewegen. Sie heißt »Coulomb-Potential« der Punktladung q_1.

Die potentielle Energie E_{pot} ändert sich natürlich auch dabei; wir können die Größe E_{pot}/q_0 ebenfalls betrachten. Die Arbeit bzw. die Energie einer Ladung, geteilt durch die Ladungsmenge, nennt man allgemein das elektrische *Potential* φ. Sie läßt sich aus der Feldstärke E durch Integration über eine Strecke errechnen:

$$\Delta\varphi = -\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \; .$$

Man kann das elektrische Potential direkt messen, mit einem Voltmeter, welches eine kleine Ladung fließen läßt und die resultierende Arbeit anzeigt.

Eine elektrische »Potentiallandschaft« gleicht einer Höhenlandschaft in der Mechanik (siehe Abb. 1.10 auf der folgenden Seite): eine Probemasse in der Höhenlandschaft besitzt eine bestimmte potentielle Energie E_{pot}, je nach Höhe. Sie erfährt eine Kraft, die sie nach unten rollen läßt, je nach Steigung des Bodens. Die Höhenkontourlinien sind Linien gleicher Höhe, ihre Dichte zeigt die jeweilige Steigung an.

Ebenfalls kann man »Kontourlinien« des elektrischen Potentials definieren, sie heißen »Äquipotentiallinien« (bzw. -Flächen). Auf einer Äquipotentiallinie ist die potentielle Energie einer Ladung konstant, sie bewegt sich ohne Arbeitsaufwand.

Die Kraftlinien (d. h. das elektrische Feld E) zeigen immer senkrecht zu den Äquipotentiallinien, d.h. in die Richtung, in der die »Steigung« am größten ist (und die Arbeit deshalb auch maximal).

Wir können die obige Beziehung zwischen Potential und Feld umkehren, um das Feld aus dem Potential zu berechnen:

$$E(r) = -\frac{d}{\mathrm{d}r}[\varphi(r)]$$

(eindimensional; z. B. beim Feld einer Punktladung oder homogenes Feld in Richtung $\boldsymbol{r}$) bzw. (dreidimensional):

$$E(r) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r})\,.$$

(∇ ist die Abkürzung für eine dreidimensionale Ableitung, die als Vektor in die Richtung maximaler Steigung zeigt.) Man nennt dies »Gradientenbildung« und schreibt auch

$$E(r) = -\mathrm{grad}\,[\varphi(\boldsymbol{r})]\;.$$

Wie auch die potentielle Energie, hat das elektrische Potential keinen festgelegten Nullpunkt. Die Erdoberfläche bildet eine Äquipotentialfläche mit einer fast unerschöpflichen Ladungsreserve, daher verbindet

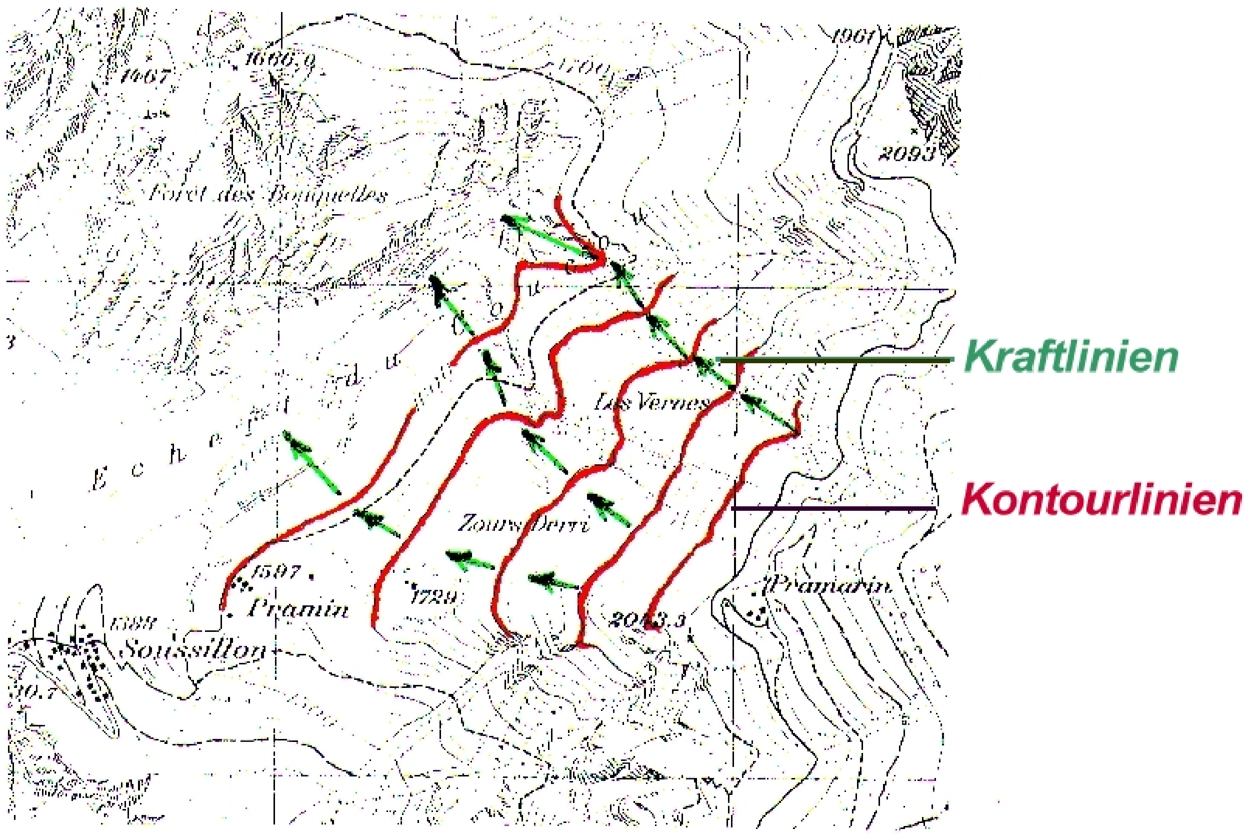


Abbildung 1.10. Auszug aus einer Höhenkontour-Karte. Die Höhenkontourlinien verbinden Punkte der gleichen Höhe h; darauf bewegt sich eine Masse m ohne (Hub-) Arbeit, ihre potentielle Energie mgh bleibt konstant. Linien der maximalen Steigung zeigen senkrecht zu den Höhenkontouren, eine Masse würde entlang solcher Linien hinunterrollen. Die Hangabtriebskraft zeigt entlang der maximalen Steigung und wächst mit wachsender Steigung (d. h. wenn die Höhenkontouren dichter zusammenliegen). Die Äquipotentiallinien verhalten sich analog zu den Höhenkontourlinien, die elektrische Feldvektoren analog zu der Hangabtriebskraft.

man oft einen Punkt in einem elektrischen Kreis mit der Erde (»Masse« oder »Erdung«) und benutzt diesen Punkt als Potential-Nullpunkt. Im Vakuum kann man als Nullpunkt das Potential bei $r \to \infty$ nehmen (Atomphysik).

Für Messungen und Anwendungen ist immer nur die Potential*differenz* $\Delta\varphi$ wichtig; diese nennt man die »elektrische Spannung« U. Die Einheit von Potential und Spannung ist [Energie]/[Ladung], d. h. J/C oder J/As; sie heißt (als abgeleitete Einheit) auch »Volt« (nach Alessandro Volta):

$$1\ \mathrm{V} = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{As}} \qquad \text{bzw.} \qquad 1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{VAs}\ .$$

Elektrische Leistung (Arbeit/Zeit) mißt man daher in W = J/s = VA .

Der Plattenkondensator

Ein gutes und relativ einfaches Beispiel für Feld und Potentiallinien liefert der Plattenkondensator, der außerdem bei Anwendungen (Elektronik) und für Messungen (Dielektrizitätskonstanten) wichtig ist. Wir haben bereits gesehen, daß das elektrische Feld zwischen zwei parallelen, geladenen Platten homogen (konstante Stärke und Richtung) und durch die Flächenladungsdichte auf den Platten gegeben ist:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\ \frac{q}{A}\ .$$

Der Kondensator dient als »Ladungsspeicher«, genauso wie ein heißer Körper Wärme speichert. Analog zur Wärmekapazität definiert man daher die elektrische Kapazität C:

$$C = \frac{\text{Ladung}}{\text{Potentialdifferenz}} = \frac{q}{U} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}U}$$

(Einheit $\widehat{=}$ C/V oder As/V $\equiv$ Farad (F) [nach Michael Faraday]). Die Potentialdifferenz U zwischen den Platten (Ladespannung) ist gegeben wie oben durch ein Integral entlang des (konstanten) Feldes, d. h.

$$U = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = E\, d = \frac{1}{\varepsilon_0}\, q\, \frac{d}{A}$$

(wo d der Plattenabstand, A die Plattenfläche und q die gespeicherte Ladung sind); damit ist die Kapazität $C = q/U$ gegeben durch

$$C = \varepsilon_0\, \frac{A}{d}\,.$$

Es ist egal, ob eine Platte geerdet ist (entgegengesetzte Ladung fließt von der Erde nach), oder beide Platten isoliert und entgegengesetzt geladen sind.

Bringen wir einen Isolator (Dielektrikum) zwischen die Platten, so werden atomare oder molekulare Dipole erzeugt bzw. ausgerichtet im elektrischen Feld. Dies führt zu einem Gegenfeld, das gesamte Feld (und daher die Spannung) wird abgeschwächt; so steigt die Kapazität des Kondensators. Das Verhältnis der Kapazitäten mit Dielektrikum und ohne Dielektrikum ist eine Materialkonstante des Dielektrikums, die »relative Dielektrizitätskonstante« ε_r. Für den Kondensator mit Dielektrikum schreibt man daher:

$$C = \varepsilon_\mathrm{r}\, \varepsilon_0\, \frac{A}{d}\,.$$

Die im Kondensator gespeicherte Ladung hat eine hohe potentielle Energie (man sagt auch, das elektrische Feld E speichert Energie). Diese kann man aus der Potentialdifferenz sowie der Ladung errechnen:

$$\mathrm{d}W = U\,\mathrm{d}q = U\,C\,\mathrm{d}U \qquad \text{und} \qquad E_\mathrm{pot} = \Delta W = \int CU\,\mathrm{d}U = \frac{CU^2}{2}$$

[Energie im Kondensator! (Einheit $\mathrm{FV}^2 = (\mathrm{As/V})\mathrm{V}^2 = \mathrm{VAs} \equiv \mathrm{J}$).]
Werden mehrere (N) Kondensatoren in Parallelschaltung betrieben, so können sich die Ladungsträger nun auf mehrere Kondensatorflächen verteilen und die Gesamtkapazität nimmt additiv zu:

$$C_{ges} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

Im Gegensatz dazu ist die Kapazität bei einer Reihen- bzw. Serienschaltung gegeben durch:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}; \quad C_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

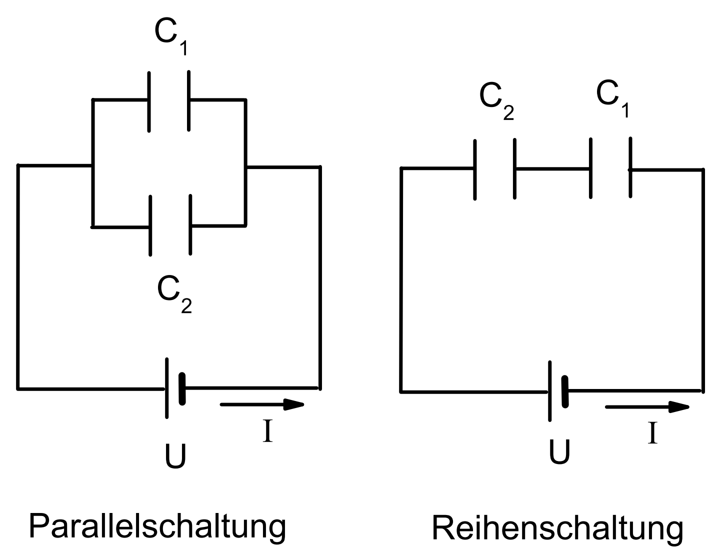


Abbildung 1.11.

Membranspannungen

Nernst'sche Gleichung Die Abbildung 1.12 auf der nächsten Seite zeigt eine Zellenmembran (grün schraffiert); im Teilbild a) links ist die Konzentration eines Salzes (KCl) innerhalb der Zelle größer als die außerhalb der Zelle ($c[\mathrm{KCl}]_{\mathrm{innen}} > c[\mathrm{KCl}]_{\mathrm{aussen}}$). Außerdem soll die Membran eine höhere Durchlässigkeit für K^+-Kationen als für Cl^--Anionen besitzen (»Ionenkanäle«).

Aufgrund des chemischen Gradienten (Konzentrationsgradienten) diffundiert KCl von innen nach außen (schneller mit steigender Temperatur T; Pfeile im Bild). Dies führt zu einem Überschuß an Cl^--Anionen innerhalb der Zelle und an K^+-Kationen außerhalb der Zelle – vgl. Teilbild b) rechts: ein elektrisches Feld E zeigt von außen nach innen, eine entsprechende elektrische Spannung U (Ruhepotential) entsteht zwischen innen und außen. Um nun weitere Ionen durch die Membran zu transportieren, müßte eine Arbeit $\Delta W = z\, e_0\, U$ geleistet werden (z = Wertigkeit der Ionen, e_0 = Elementarladung). Diese Arbeit kommt aus der thermischen Energie $k_\mathrm{B} T$ der diffundierenden Ionen; die Diffusion setzt sich solange fort, bis sich ein Gleichgewicht etabliert hat (thermisches oder BOLTZMANN-Gleichgewicht). Die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$\frac{c_\mathrm{a}}{c_\mathrm{i}} = e^{-z\, e_0 U / k_\mathrm{B} T} \tag{1.8}$$

[vgl. barometrische Höhenformel; auch ein thermisches Gleichgewicht zwischen einem Diffusionsstrom (Luftmoleküle nach oben) und einem Sinkstrom (Hubarbeit mgh)]. Umgestellt ergibt (1.8) die Nernst'sche Gleichung:

$$k_\mathrm{B} T \ln \left[\frac{c_\mathrm{a}}{c_\mathrm{i}} \right] = -z\, e_0\, U \ ,$$

welche die Ionenkonzentrationen innen und außen mit der Membranspannung U verbindet. Nervenimpulse entstehen durch zusätzliche aktive Ionenflüsse (bewirkt durch Ionenpumpen in der Membran), die zu einer

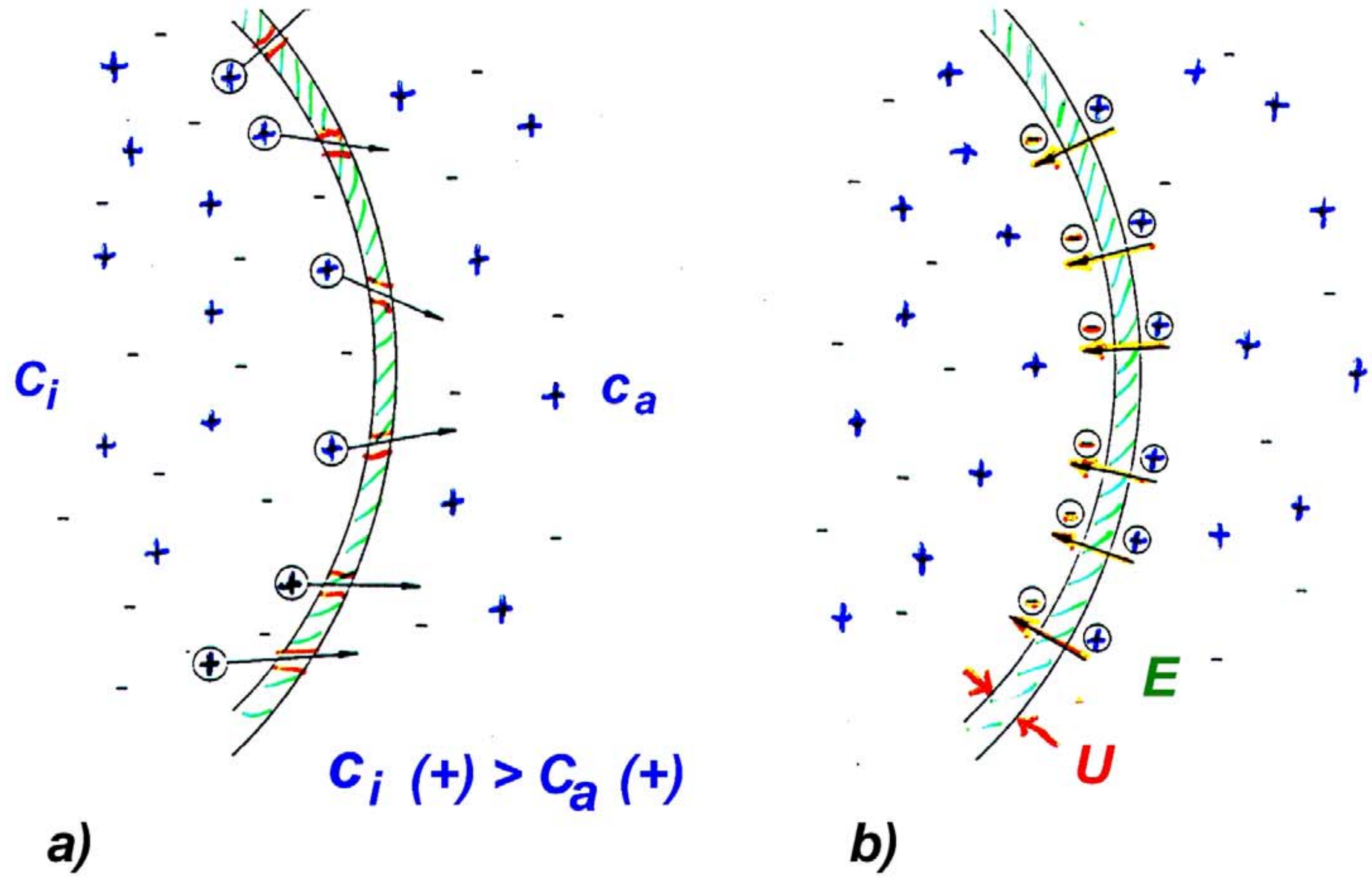


Abbildung 1.12.

kurzfristigen Änderung des Membranpotentials führen.

Materie im elektrischen Feld

Die Materie kann – elektrisch gesehen – grob in zwei Klassen geteilt werden: *leitende Materie* (Metalle, Plasmen, Elektrolytlösungen ...) und *isolierende Materie* (alle anderen Materialien).

1. *Leitende Materie* enthält eine große Anzahl an (fast) frei beweglichen Ladungen – die *freien* Ladungen

2. *Isolatoren* enthalten *gebundene* Ladungen, die an den Atomen oder Molekülen der Materie festsitzen, jedoch immer noch mikroskopisch verschoben werden können. Sie bilden dabei Dipole, mit Dipolmomenten $\boldsymbol{p} = q\,\boldsymbol{a}$, wobei q die verschobene Ladungsmenge und a die Verschiebungsstrecke sind (der Vektor $\boldsymbol{a}$ zeigt von dem negativen Ende zum positiven hin)

Wirkt ein elektrostatisches Feld $|E_0| = |D_0|/\varepsilon_0 = \sigma_0/\varepsilon_0$ (σ_0 = freie Flächenladungsdichte) auf einen Isolator, so wird es nicht im Inneren der Materie vollständig abgeschirmt wie beim Leiter; es wirkt auf die dort vorhandenen (gebundenen) Ladungen und produziert ausgerichtete Dipolmomente (durch Ladungsverschiebung bzw. Orientierung vorhandener Dipole). Diese heben sich innerhalb der Materie gegenseitig auf, lassen aber eine Polarisationsflächenladungsdichte σ_P auf den Oberflächen der Materie übrig. Man definiert die Polarisation der Materie als Gesamtdipolmoment pro Volumen:

$$|P| = \frac{\sum p_\mathrm{i}}{V} = \frac{q_\mathrm{P} L}{V} = \frac{\sigma_\mathrm{P} A L}{V} = \sigma_\mathrm{P}$$

analog zum Verschiebungsfeld D; A ist die Fläche der Materie, L ihre Dicke.

Es existieren nun drei Felder:

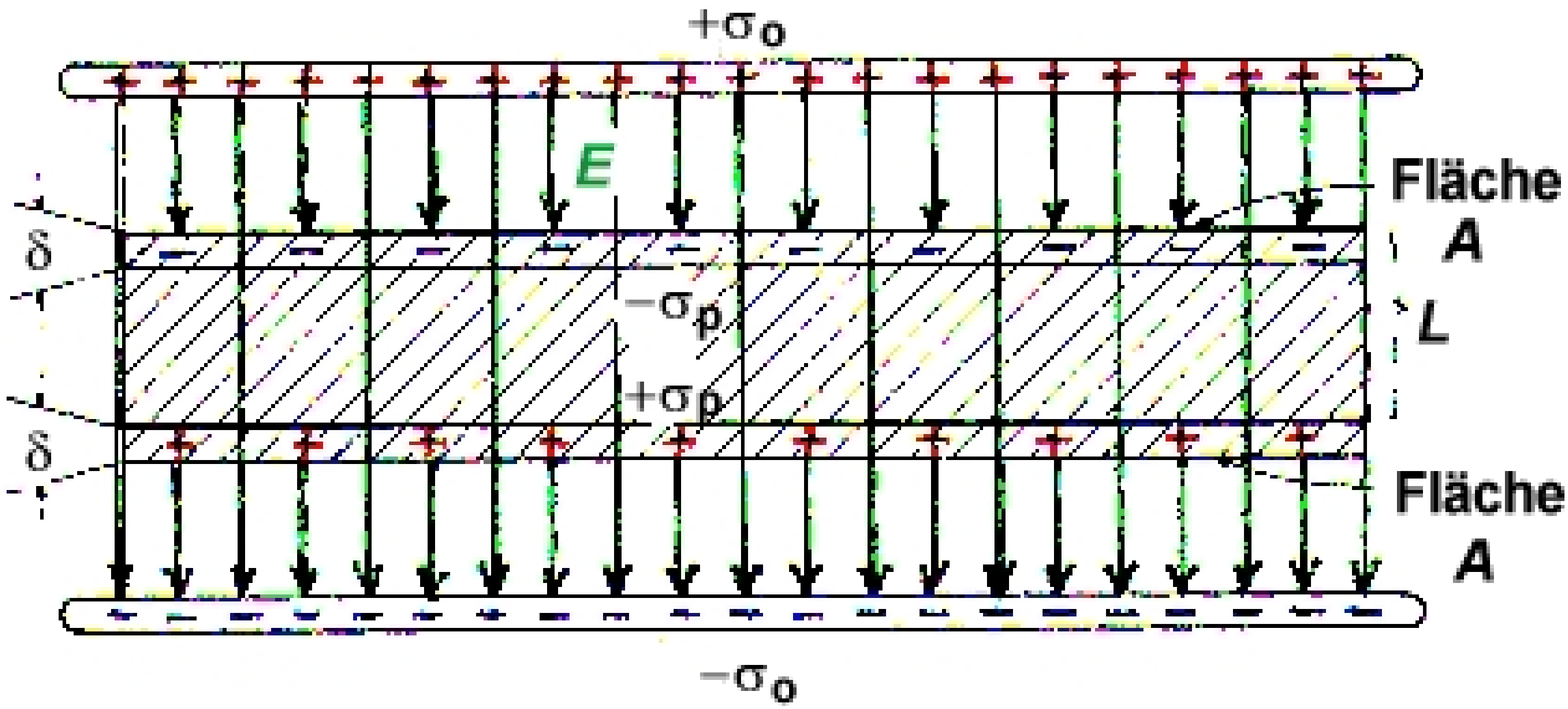


Abbildung 1.13. Ein Plattenkondensator mit einem Dielektrikum (Scheibe aus isolierender Materie) der Fläche A und der Dicke L zwischen den Platten. Auf den Platten befindet sich die freie Flächenladungsdichte σ_0, die das elektrische Feld E_0 erzeugt. Dieses Feld produziert eine Polarisation der Materie (ausgerichtete Dipole innerhalb der Materie), die ihererseits zu einer Oberflächenladungsdichte σ_P an den Oberflächen des Dielektrikums (innerhalb einer dünnen Schicht der Dicke δ) führt. Das Feld E wird innerhalb der Materie abgeschwächt, die Kapazität des Kondensators entsprechend erhöht.

1. P nur innerhalb der Materie, mit $|P| = \sigma_\mathrm{P}$;

2. D überall gleich, mit $|D| = \sigma_0$;

3. $E = E_0$ außerhalb der Materie, $E = E_{\mathrm{m}} < E_0$ (Normalfall) innerhalb der Materie

[E macht einen Sprung an der Oberfläche der Materie in der einfachen Geometrie eines Plattenkondensators mit einer Materiescheibe (Dielektrikum) zwischen den Platten.]

Im Allgemeinen gilt

$$E = \frac{(D_0 - P)}{\varepsilon_0} = \frac{D_{\mathrm{m}}}{\varepsilon_0} \, .$$

Eine alternative Beschreibung dieses Vorgangs basiert auf die Reduktion der E-Feldstärke in der Materie:

$$\frac{E_0}{E_{\mathrm{m}}} = \varepsilon_{\mathrm{r}} \quad \text{(eine dimensionslose Zahl, \textit{relative Dielektrizitätszahl})} \, .$$

Die Kapazität eines Kondensators, welcher Materie der relativen Dielektrizitätszahl ε_{r} enthält, ist gebgeben (entsprechend der Reduktion der Feldstärke E) durch:

$$C_{\mathrm{m}} = \varepsilon_{\mathrm{r}} \, C_0 = \varepsilon_0 \, \varepsilon_{\mathrm{r}} \frac{A}{d} = \varepsilon \frac{A}{d} \, .$$

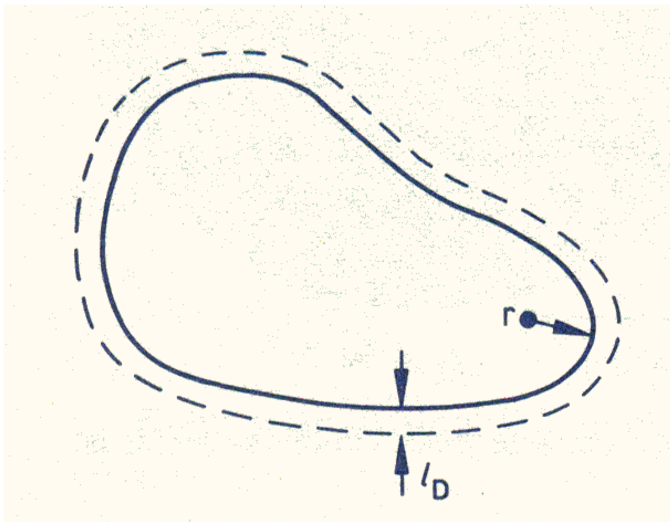
(die letzten beiden Formeln gelten für einen Plattenkondensator mit Plattenfläche A, Plattenabstand d, Füllfaktor für die Materie = 100%, d. h. $L = d$.)

Wir unterscheiden vier Typen der Materie:

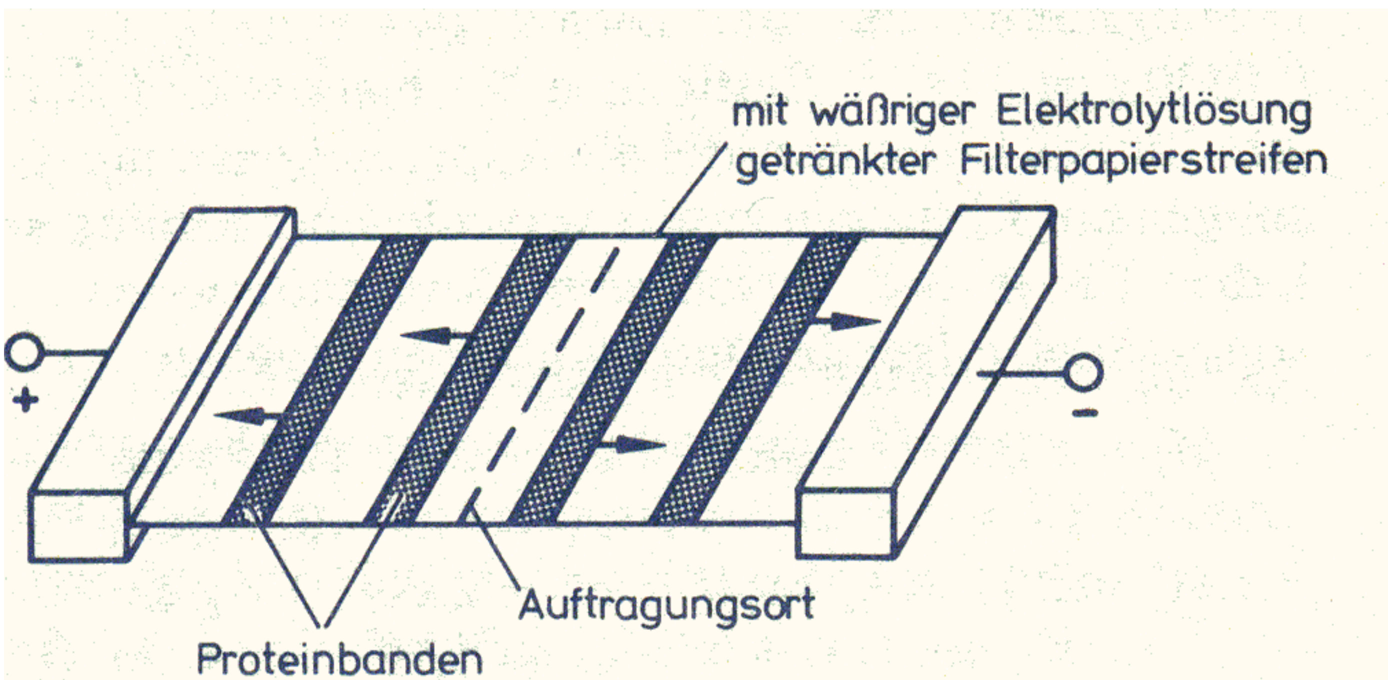
1. Dielektrika, mit $\varepsilon_{\mathrm{r}} > 1$ schwächen das elektrische Feld E;
2. Ferroelektrika besitzen ein spontanes elektrisches Feld E unterhalb ihrer 'kritischen Temperatur' T_C;
3. Paraelektrika, mit $\varepsilon_{\mathrm{r}} \gg 1$, sind Ferroelektrika bei $T > T_C$;

4. sowie Leiter, mit $\varepsilon_{\mathrm{r}} \to \infty$; sie schirmen das Feld E vollständig ab.

Bei der Verschiebungspolarisation ist P proportional E: $P = n\,\alpha\,E$, $n =$ Teilchendichte der polarisierbaren Teilchen; hier ist P relativ schwach, kann aber dem Feld E sehr schnell folgen. Bei der Orientierungspolarisation ist P eine Funktion von E und T, sie ist meistens viel stärker, aber folgt dem Feld E nur langsam.



$$v = \frac{\sigma_E l_D}{\eta} E$$



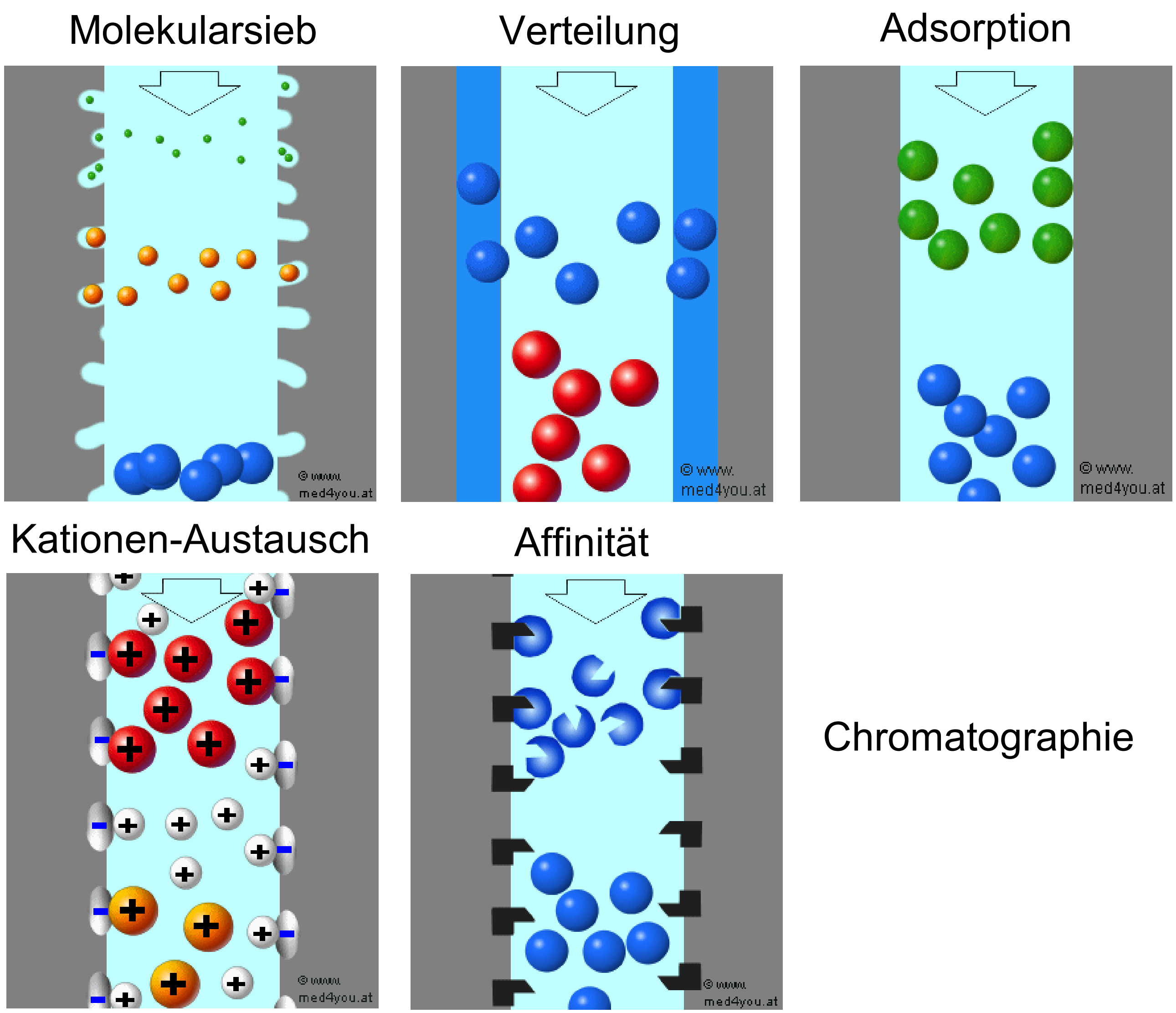


Abbildung 1.15.

Der elektrische Strom

Bisher haben wir statische Ladungen betrachtet, die als freie oder Überschußladungen an einer festen Stelle sitzen; dabei haben wir gesehen, daß es aufgrund der starken Coulomb-Kräfte sehr schwierig ist, eine größere Ladungsmenge zu trennen und als freie Ladung zu erhalten.

Der für allerlei Anwendungen weitaus wichtigere Fall ist jedoch der der bewegten Ladungen, d. h. des elektrischen Stroms. In einem nach Außen elektrisch neutralen Leiter lassen sich relativ große Ladungsmengen in Bewegung setzen; die Bewegung wird durch den elektrischen Strom $I = q/t$ bzw. $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ beschrieben, in exakter Analogie zu einer Flüssigkeitsströmung.

Ein elektrischer Leiter kann irgendein Material sein, welches bewegliche Ladungen enthält. Diese sind die Elektronen in Metallen und Halbleitern, die Ionen in Elektrolytlösungen und festen Ionenleitern, und Elektronen plus Ionen in geladenen Gasen (Plasmen).

Wieder in Analogie zur Flüssigkeitsströmung, beobachtet man beim elektrischen Strom immer einen Widerstand; ein Teil der Bewegungsenergie der Ladungen wird in eine ungeordnete Atombewegung umgesetzt, d. h. in Wärme. Dieser elektrischer Widerstand R hängt von der Geometrie und von Materialeigenschaften des Leiters ab. [n.b.: wie auch bei der Flüssigkeitsströmung, hat die Natur *bei tiefen Temperaturen* eine Ausnahme geschaffen. Dort gibt es den *supraflüssigen* Zustand (beim flüssigen Helium), wo eine Strömung ohne Widerstand, d. h. eine ideale Strömung, möglich ist. Auch eine Reihe von Metallen, Legierungen und Verbindungen zeigt bei tiefen Temperaturen ein *Verschwinden des elektrischen Widerstandes*, genannt Supraleitung.]

Analogie: elektrischer Strom, Flüssigkeitsströmung

Als Beispiel für den elektrischen Strom/Flüssigkeitsströmung vergleichen wir das Auslaufen eines Behälters durch einen Strömungswiderstand R_S mit der Entladung eines Kondensators durch einen elektrischen

Widerstand R (RCKreis). In beiden Fällen haben wir einen nicht-stationären Strom: die Stromstärke I_V bzw. I nimmt mit der Zeit ab, weil die »treibende Kraft« (Druckdifferenz Δp bzw. elektrische Spannung U) abnimmt, je weiter sich der »Speicher« ausleert (siehe Abb. 1.16).

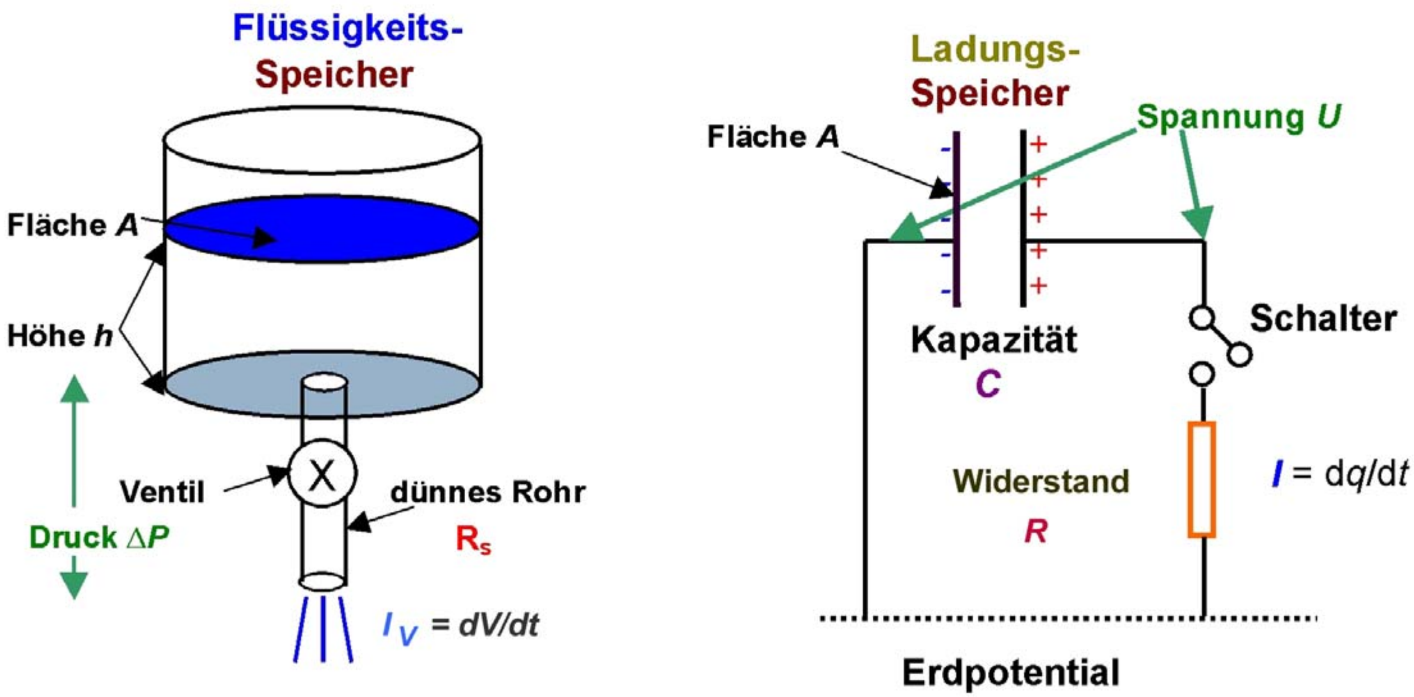


Abbildung 1.16.

In beiden Fällen gilt das gleiche Gesetz:

$$I_\mathrm{V} = \frac{\Delta p}{R_\mathrm{S}} \qquad \text{und} \qquad I = \frac{U}{R}\,.$$

Letzteres wird »Ohm'sches Gesetz« in der Elektrizitätslehre genannt; ein Widerstand, der unabhängig von Stromstärke und Spannung ist, heißt »ohm'scher Widerstand«.

Wir können in beiden Fällen die Beziehung zwischen der »gespeicherten Menge« (Volumen der Flüssigkeit, Ladungsmenge) und der »treibenden Kraft« (Druckdifferenz, elektrischer Spannung) einsetzen:

$$\Delta p = \rho g h = \rho g \frac{V}{A} \qquad \text{und} \qquad U = \frac{q}{C} = \frac{qd}{\varepsilon_0 A} \ .$$

Die Größen sind in beiden Fällen einander proportional, die Proportionalitätskonstante enthält geometrische Größen und Materialkonstanten:

$$\frac{\rho g}{A} \, , \qquad \frac{d}{\varepsilon_0 A} \ .$$

Einsetzen in die Gleichung für die Stromstärke ergibt

$$I_{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{\frac{\rho g}{A}}{R_{\mathrm{S}}} \, V$$

und

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC} \, q$$

(das Minuszeichen resultiert daraus, daß das gespeicherte Volumen bzw. die Ladung mit der Zeit abnimmt.) Umstellen dieser Gleichungen liefert:

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{\rho g}{A R_{\mathrm{S}}} \, \mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}q}{q} = -\frac{1}{RC} \, \mathrm{d}t \ .$$

Integration dieser Differentialgleichungen ergibt als Lösungen eine Exponentialfunktion der Zeit:

$$V(t) = V(0) \cdot e^{-t/\tau_{\mathrm{s}}} \qquad \text{und} \qquad q(t) = q(0) \cdot e^{-t/\tau}$$

mit den Zeitkonstanten $\tau_{\mathrm{s}} = R_{\mathrm{S}} A / \rho g$ bzw. $\tau = RC$.

Einheiten: den elektrischen Strom mißt man in Einheiten C/s ≡ As/s = A (Ampère), die Spannung in Einheiten J/As ≡ V (Volt), den Widerstand in Einheiten V/A ≡ Ohm (abgekürzt Ω). Man definiert auch die elektrische Leitfähigkeit L als Kehrwert des Widerstandes R:

$$L = \frac{1}{R}$$

mit der Einheit 1/Ω (= Siemens, 1 S $\widehat{=}$ 1 Ω^{-1}).

elektrische Stromkreise

- Kirchhoff'sche »Maschenregel«:

$$\sum_{\text{i um Kreis}} U_{\text{i}} = 0 \qquad \text{(Energieerhaltung)}$$

  wobei

  - Spannungen in Stromrichtung positiv,
  - Spannungen in Gegenstromrichtung negativ und
  - Spannungen von Stromquellen negativ zu nehmen sind.

- Kirchhoff'sche »Knotenregel«:

$$\sum_{\text{i am Punkt}} I_{\text{i}} = 0 \qquad \text{(Ladungserhaltung)}$$

  wobei

– Ströme zum Punkt hinein negativ,

– Ströme vom Punkt hinaus positiv zu nehmen sind.

Anwendungen: Parallel- und Reihenschaltungen

- Bei der Reihenschaltung gilt:

  $$U_0 = U_1 + U_2 \qquad \text{(Maschenregel)}$$

  und

  $$I_0 = I_1 = I_2 \qquad \text{(Knotenregel)}\ ;$$

  d. h.: spannungsproportionale Größen (R, L, U_{Quelle}) addieren sich einfach; aber strom- oder ladungsproportionale Größen (C) addieren sich reziprok.

  (Beispiele: der Gesamtwiderstand von drei $100\,\Omega$-Widerständen, die in Reihe geschaltet sind, beträgt $R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 = 100 + 100 + 100 = 300\,\Omega$; die Kapazität von zwei 10 μF-Kondensatoren in Reihe beträgt $C_{\text{ges}} = 1/[1/C_1 + 1/C_2]$, C_{ges} =1/[1/10 μF + 1/10 μF] = 5 μF.)

- Bei der Parallelschaltung gilt:

  $$U_0 = U_1 = U_2 \qquad \text{(Maschenregel)}$$

  und

  $$I_0 = I_1 + I_2 \qquad \text{(Knotenregel)}\ ;$$

  d. h. spannungsproportionale Größen (R, L) addieren sich reziprok; aber strom- oder ladungsproportionale Größen (C, I_{Quelle}) addieren sich einfach.

(Beispiele: der Gesamtwiderstand von zwei 150 Ω-Widerständen, die Parallel geschaltet sind, beträgt $R_{\text{ges}} = 1/[1/R_1 + 1/R_2], R_{\text{ges}} = 1/[1/150 + 1/150] = 75\,\Omega$; die Kapazität von zwei 20 μF-Kondensatoren in Parallel beträgt $C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 = 20\ \mu\text{F} + 20\ \mu\text{F} = 40\ \mu\text{F}$.)

Innenwiderstand Jede Stromquelle und jedes Meßinstrument besitzt einen Innenwiderstand. Man versucht, ihn bei Stromquellen, wie auch bei Ampèremetern (die in Reihe geschaltet werden), möglichst klein zu halten.

Bei Spannungsquellen, sowie bei Voltmetern (die parallel geschaltet werden) soll er möglichst groß werden, um Meßfehler zu vermindern.

Wirkungen des elektrischen Stromes

Ein elektrischer Strom hat drei Wirkungen; zwei davon in Verbindung mit der Materie, in der er fließt, die dritte auch im Vakuum:

- Wärmeproduktion (»Joule'sche Wärme«) aufgrund des elektrischen Widerstandes des Leiters;
- eine chemische Wirkung (Oxidation, Reduktion) aufgrund der Ladungsübertragung an Ionen (Elektrolyse, Galvanisieren, Photosynthese);
- die Erzeugung eines Magnetfeldes um einen stromdurchflossenen Leiter oder Stromfaden, auch im Vakuum.

Die Wärmeproduktion haben wir bereits erwähnt; sie ist gegeben durch die Stromstärke I, die durch einen Widerstand R fließt, mal Spannungsabfall U am Widerstand (Ladung $\cdot$ Potentialdifferenz/Zeit =

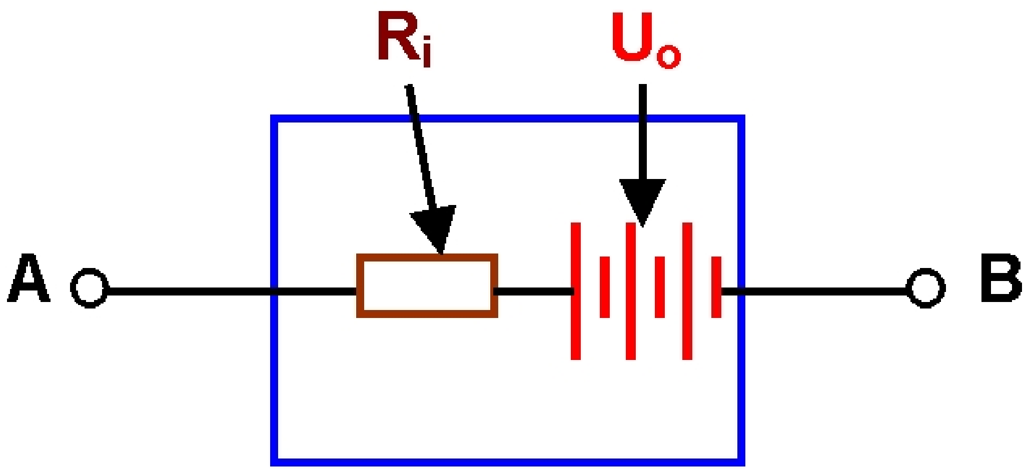


Abbildung 1.17. Schematische Darstellung des Innenwiderstandes: das »Gerät« (blaues Kästchen) enthält eine Spannungsquelle der Ausgangsspannung U_0 und einen Widerstand R_i (den Innenwiderstand). An den externen Klemmen A und B mißt man in »Leerlauf« (wenn kein Strom fließt) die volle Spannung U_0; fließt ein Strom I nach außen, so vermindert sich die Klemmspannung um den Betrag IR_i (die Spannung, die am Innenwiderstand R_i abfällt, wenn der Strom I durch ihn fließt).

Arbeit/Zeit $\to$ Wärme/Zeit):

$$\text{elektrische Leistung} = IU = \frac{U^2}{R} = I^2R \to \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

(Einheit VA = J/s $\equiv$ W, Wärmeproduktion).

Die elektrochemische Wirkung ist äußerst wichtig für die Technik (Chemie, Bau von Batterien und Akkus, Galvanik) aber auch für die Biochemie und Biophysik sowie die Physiologie (Gleichgewicht in Elektrolytlösungen, Membranspannungen, Leitung von Nervenimpulsen, Photosynthese, Sinnesorgane ...)

Die Beziehung zwischen Strom und Magnetfeldern wurde von H.C. Oersted im Jahre 1811 entdeckt. Sie basiert letztlich auf einem relativistischen Effekt: die Ladungsdichte einer *bewegten* Ladungsverteilung ändert such relativ zu der einer ruhenden Ladungsverteilung und hängt auch davon ab, ob der Beobachter sich bewegt. Dies bewirkt eine kleine Zusatzkraft zur üblichen Coulombkraft, welche wir als magnetische Kraft bezeichnen.

Vergleich – Flüssigkeitsströmung/elektrischer Strom

Sehen Sie dazu bitte Tabelle 1.4 auf der nächsten Seite.

Tabelle 1.4. Vergleich von Flüssigkeitsströmung und elektrischem Strom

Größe	Flüssigkeitsströmung	elektrischer Strom
Menge, Stromgröße	Volumen V; Volumenstrom $I_{\mathrm{V}} = \mathrm{d}V/\mathrm{d}t$	Ladung q; elektrischer Strom $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$
»treibende Kraft«	Druckdifferenz ΔP	Potentialdifferenz $\Delta\varphi =$ elektrische Spannung U
»Quelle«	Pumpe, Durchsatz I_{V0}; Druckdifferenz P_0	Stromquelle, Strom I_0; Spannung U_0
Leistung	$I_{\mathrm{V0}} \cdot P_0$	$I_0 \cdot U_0$
»Speicher«	Flüssigkeitsspeicher, Querschnittsfläche A : $\Delta P = \rho g h = [\rho g/A]V$	Kondensator: $U = q/C$
E_{pot} (Speicher)	$[\rho g V]h/2 = [\rho g A]h^2/2 = ([A/\rho g]/2)\,\Delta P^2$ oder $V^2/2[A/\rho g]$	$(C/2)\,U^2$ oder $q^2/2C$
»Trägheitskraft«	Druck durch Beschleunigung: $\Delta P = (m/A)\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (m/A^2)\,\mathrm{d}I_{\mathrm{V}}/\mathrm{d}t = [l\rho/A]\,\mathrm{d}I_{\mathrm{V}}/\mathrm{d}t$	Spule: $U = -L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$
E_{kin} (Trägheit)	$(V\rho/2)v^2 = ([l\rho/A]/2)\,I_{\mathrm{V}}^2$	$(L/2)\,I^2$
Widerstand	Rohr: $R_{\mathrm{S}} = (l/A)(8\pi/R^2); I_{\mathrm{V}} = \Delta P_{\mathrm{R}}/R_{\mathrm{S}}$	$R = (l/A)\rho_{\mathrm{E}}; I = U_{\mathrm{R}}/R$
E-Erhaltung:	Bernoulli: $P_0 + \rho g h + (\rho/2)v^2 = \Delta P_{\mathrm{R}}$	Kirchhoff, Maschenregel: $U_0 + q/C + L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = U_{\mathrm{R}}$
Kontinuität:	$I_{\mathrm{V}} =$ konst. (Erhaltung der Flüssigkeitsmenge)	Knotenregel: $\sum I_{\mathrm{i}} = 0$ (Ladungserhaltung)

Magnetfelder

Jede bewegte Ladung erzeugt eine Kraftwirkung auf eine andere bewegte Ladung – zusätzlich zur Coulombkraft F_C. Diese Zusatzkraft ist die magnetische oder **Lorentzkraft**. Sie definiert auch das magnetische Kraftfeld B:

$$\mathbf{F}_\mathrm{L} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

[Einheit von B: $\mathrm{N/Am} \equiv \mathrm{J/Am^2} \equiv \mathrm{Vs/m^2}$, genannt »Tesla« (T)].

Das Feld $\mathbf{B}$ wird auch das magnetische *Induktionsfeld* bzw. die **magnetische Flußdichte** genannt; die Einheit $\mathrm{Vs/m^2}$ heißt auch Tesla (s.o.). Die Kraft $\mathbf{F}_\mathrm{L}$ steht senkrecht zum Magnetfeld $\mathbf{B}$ sowie zur Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ der bewegten Ladung.

Wie auch im elektrostatischen Fall, definiert man außer dem Kraftfeld auch ein **Feld** H, das direkt mit seinen Quellen zusammenhängt (vgl. E, D). Dabei gibt es zur Elektrostatik zwei wichtige Unterschiede:

- man hat **keine magnetischen (Einzel-)Ladungen (Monopole)** gefunden; daher haben die magnetischen Feldlinien keinen Anfang und kein Ende – sie bilden in sich geschlossene Kurven, ihre Quellen sind Ströme, nicht Ladungen;

- das **Magnetfeld ist ein Wirbelfeld**. Die magnetischen Kraftfeldlinien um einen stromführenden Leiter sind kreisförmig (Richtung: rechte-Hand-Regel!). Die Feldstärke des Magnetfeldes H ist durch das Ampère'sche Gesetz gegeben:

$$I_{(\text{durch A})} = \int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

(vgl.: Gauß'sches Gesetz, $q_{(\text{in V})} = \int_{A \text{ um } V} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{A}$). Das Integral wird entlang einer Kurve K um die Fläche A gerechnet; der Strom I ist der Gesamtstrom, der durch diese Fläche fließt. Die

Magnetfeldstärke um einen Leiter mit Strom I nimmt mit Abstand r wie $1/r$ ab, sie ist gegeben durch $H = I/2\pi r$ (Lösung des Integrals um einen Kreis K) und hat daher die Einheit Ampère/meter (A/m). Innerhalb des Leiters gilt: $H = \frac{Ir'}{2\pi R^2}$, wobei R der Leiterradius und r' der Abstand vom Mittelpunkt ist.

Die beiden Felder B und H hängen (im Vakuum) einfach über die Konstante μ_0 zusammen:

$$B = \mu_0\, H \text{ (im Vakuum) };$$

(vgl. $D = \varepsilon_0\, E$; reziproke Definition!)

Die Konstante μ_0 (Magnetfeldkonstante oder Permeabilität des Vakuums) ist eine Naturkonstante analog zu ε_0, wobei μ_0 den Wert $4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am oder $1,257 \cdot 10^{-6}$ Vs/Am hat. Die beiden Feldkonstanten μ_0 und ε_0 sind nicht voneinander unabhängig (relativistischer Ursprung des Magnetismus!), sondern hängen über die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c_0 zusammen:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\, \varepsilon_0}}\ .$$

Tabelle 1.5. Magnetfeldstärken im Vergleich

relative Magnetfeldstärke	Feldquelle
1 000 000 000 000	Neutronensterne
100 000 000 000	Pulsare
10 000 000 000	
1 000 000 000	
100 000 000	Forschung (kurzzeitig)
10 000 000	
1 000 000	Forschung (Dauerbetrieb)
100 000	Technik; Sterne
10 000	Sonnenflecken
1 000	
100	Norm-Grenzwert
10	Planeten-Feld, Jupiter
1	Planeten-Feld, Erde ($B \simeq 50\ \mu$T, $H \simeq 40$ A/m)
0.1	Elektrogeräte
0.01	Magnetsturm
0.001	Planeten-Feld, Mars; Fernsehgerät
0.000 1	
0.0 000 1	Mond, interplanetares Feld
0.00 000 1	Herz
0.000 000 1	interstellares Feld
0.0 000 000 1	Gehirn
0.00 000 000 1	Augen; intergalaktisches Feld

Magnetische Felder einfacher Stromverteilungen

Das magnetische Dipolmoment (analog zum elektrischen Dipolmoment): man definiert ein magnetisches Dipolmoment durch einen Kreisstrom, als Produkt der Stromstärke I mit der eingeschlossenen Fläche A (ein Vektor in Richtung der Flächennormale; (siehe Abb. 1.18).

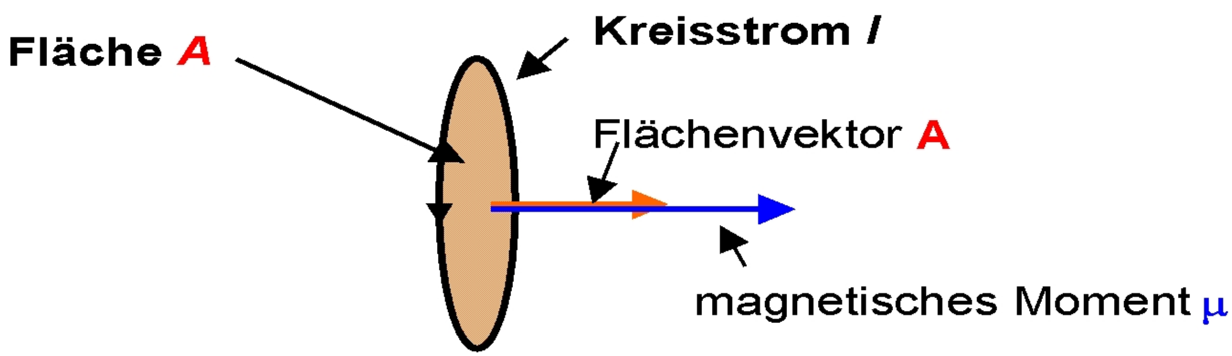


Abbildung 1.18. Magnetisches Moment als Kreisstrom.

damit ist:

$$\mu = I\,A$$

[Einheit: Am^2].

Magnetische Dipolmomente werden von einem homogenen B-Feld ausgerichtet (vgl. p,E).

Außer dem Feld eines langen, geraden Stromes (konzentrische Kreise) sowie dem Feld eines Kreisstromes (Dipolfeld) hat das Feld einer langen Spule eine einfache Form: es ist ein homogenes Feld (vgl. E-Feld des Plattenkondensators). Die Richtung des Feldes ist parallel zur Spulenachse, die Feldstärke ist gegeben durch (siehe Ampère'sches Gesetz):

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

mit N/l = Windungszahl/Länge. Die Spule ist also ein einfaches Bauelement, das eine analoge Rolle für

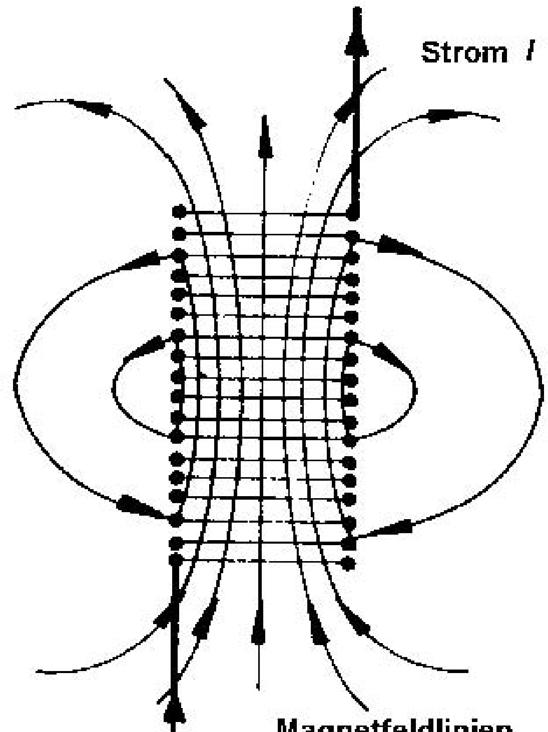


Abbildung 1.19. Stromführende Spule im Querschnitt. Das Magnetfeld H innerhalb der Spule ist nahezu homogen (überall gleiche Stärke und Richtung)

Magnetfelder spielt wie der Plattenkondensator für elektrische Felder (siehe Abb. 1.19 auf der vorigen

Seite).

Die elektromagnetischen Feldgleichungen

Wir haben nun einige (geometrische) Eigenschaften der elektrischen ($E-$,$D-$) und der magnetischen ($B-$, $H-$) Felder gefunden, die man in vier Feldgleichungen für statische Felder zusammenfassen kann:

1. Wirbelfreiheit des statischen E-Feldes (Energieerhaltung!):
$$\int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0 \; .$$

2. Ströme sind Quellen des H-Feldes (Ampère'sches Gesetz):
$$\int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I_{\text{durch } A}$$

3. Ladungen sind Quellen des D-Feldes (Gauß'sches Gesetz):
$$\iint\limits_{A \text{ um } V} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = q_{\ \text{in} V}$$

4. Es gibt keine magnetischen Ladungen (magnetischen Monopole):
$$\iint\limits_{A \text{ um } V} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0 \; .$$

Die Integrale werden in den ersten beiden Gleichungen entlang einer geschlossenen Kurve K gerechnet, welche die Fläche A umschließt; in den letzten beiden Gleichungen werden die Integrale über die geschlossene Fläche A gerechnet, die das Volumen V umschließt. Diese Gleichungen beschreiben vollständig die statischen Felder, die durch Ladungen und Ströme entstehen (aber ohne den Einfluß von Materie). Durch die Beziehungen $D = \varepsilon_0 E$ und $B = \mu_0 H$ sind die Gleichungen miteinander gekoppelt, sie enthalten nur zwei unabhängige Größen (z. B. E und B). Wir werden sehen, daß sie noch ergänzt werden müssen, wenn wir eine *Zeitabhängigkeit* der Felder zulassen!

Materie im magnetostatischen Feld

Ähnlich wie im elektrostatischen Feld reagiert die Materie im statischen Magnetfeld durch Bildung mikroskopischer Dipolmomente; nun sind es aber nicht elektrische, sondern magnetische Dipole.

Im Gegensatz zum elektrischen Fall gibt es in der Magnetostatik keine Ladungen – und daher keine magnetischen Leiter. Die magnetischen Feldlinien bilden geschlossene Kurven, ohne Anfang und Ende. Außerdem sind die Felder B und H etwas anders definiert als die entsprechenden elektrischen Felder E und D. Ansonsten verläuft die Behandlung von Materie im Magnetfeld genau analog zur Behandlung der Materie im elektrischen Feld.

Die magnetischen Dipole werden mit Hilfe von Dipolmomenten beschrieben, definiert als $\mu = I\mathbf{A}$, wobei I die Stärke eines (mikroskopischen) Ringstromes und A die vom Ringstrom eingeschlossene Fläche sind (der Vektor $\mathbf{A}$ zeigt in Richtung der Flächennormale, Richtungssinn durch die Rechte-Hand-Regel gegeben!). Die Einheit des magnetischen Dipolmomentes, $[\mu]$, ist Am^2.

Wirkt ein statisches Magnetfeld $B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 I_0 (N/l)$ ($I_0 =$ Strom von freien Ladungen in einer Spule mit N Windungen und der Länge l), so produziert dieses ausgerichtete magnetische Dipolmomente (durch Induktion von mikroskopischen Ringströmen bzw. Orientierung vorhandener Dipole). Diese heben sich innerhalb der Materie gegenseitig auf, wie im elektrischen Fall, und können insgesamt durch Flächenströme I_{M} beschrieben werden (Magnetisierungsströme).

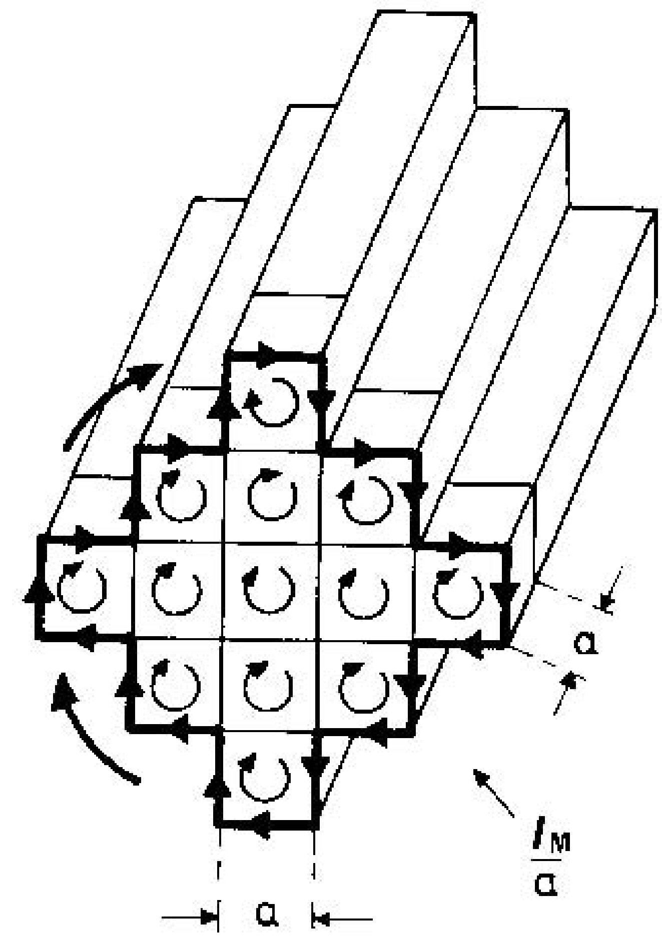


Abbildung 1.20. Schematische Darstellung von Materie in einem Magnetfeld. Atomare Dipole sind durch kleine Kreisströme symbolisiert; der Abstand der Atome ist gegeben durch die Gitterkonstante a. Sie fügen sich an den Enden des Materiestücks zu einem gesamten Flächenstrom I_{M} zusammen. Außerhalb der Materie entsteht durch die gerichtete Dipole ein äußeres Magnetfeld (gekrümmte Pfeile)

Man definiert die Magnetisierung der Materie als Gesamtdipolmoment pro Volumen, ganz analog zur elektrischen Polarisation:

$$|M| = \frac{\sum \mu_\mathrm{i}}{V} = \frac{I_\mathrm{M} A}{V} = \frac{I_\mathrm{M}}{d}\ ;$$

A ist die Fläche der Materie, d ihre Dicke.

Es existieren nun drei Felder:

- M nur innerhalb der Materie, mit $|M| = I_\mathrm{M}/d$;
- H überall, mit $|H| = I_0(N/l)$ (Spule);
- $B = B_0$ außerhalb der Materie, $B = B_\mathrm{m} \neq B_0$ (i.A.) innerhalb der Materie (B macht einen Sprung an der Oberfläche in der einfachen Geometrie einer langen Spule mit einem Materie-Zylinder im Inneren).

Allgemein gilt

$$B = \mu_0(H_0 + M) = \mu_0 H_\mathrm{m}.$$

Eine alternative Beschreibung des Vorgangs basiert auf der Änderung der B-Feldstärke in der Materie:

$$\frac{B_\mathrm{m}}{B_0} = \mu_\mathrm{r} \qquad \text{(dimensionslose Zahl, \textit{relative Permeabilitätszahl})}\ .$$

Die Feldstärke einer Spule, welche Materie der relativen Permeabilität μ_r enthält, ist gegeben durch:

$$B_\mathrm{m} = \mu_\mathrm{r} B_0 = \mu_0 \mu_\mathrm{r} I \left(\frac{N}{l}\right) = \mu I (N/l).$$

(die letzten beiden Formeln gelten für eine lange Spule der Länge l, Windungszahl N, Füllfaktor für die Materie = 100%).

Wir finden drei Typen der Materie bzgl. magnetischem Verhalten:

1. Diamagnetika, mit $\mu_\mathrm{r} < 1$ schwächen das magnetische Feld B;
2. Paramagnetika, mit $\mu_\mathrm{r} > 1$ verstärken das Feld B;
3. Ferromagnetika, mit $\mu_\mathrm{r} \to \infty$ besitzen ein eigenes spontanes Feld B (und daher eine spontane Magnetisierung!)

Die Magnetisierung M ist i. a. eine Funktion von B_0 und T.

Biomagnetismus

Unter Biomagnetismus versteht man die Magnetfelder, die in Lebewesen entstehen durch magnetische Substanzen in ihren Organen bzw. durch elektrische Ströme physiologischen Ursprungs. Die Tabelle 1.5 sowie die Abbildung 1.21 gibt eine Übersicht der Werte [als Induktionsfeld $B = \mu_0 H$, Einheit $\mathrm{Vs/m^2} \equiv \mathrm{T}$ (Tesla)], die am menschlichen Körper gemessen werden.

Eine Messung dieser Felder (Magnetokardiogramm MKG, Magnetoencephalogramm MEG) ergibt komplementäre und oft detailliertere Informationen als die entsprechenden elektrischen Messungen (EKG, EEG); sie ist aber noch aufwendiger und schwieriger zu interpretieren.

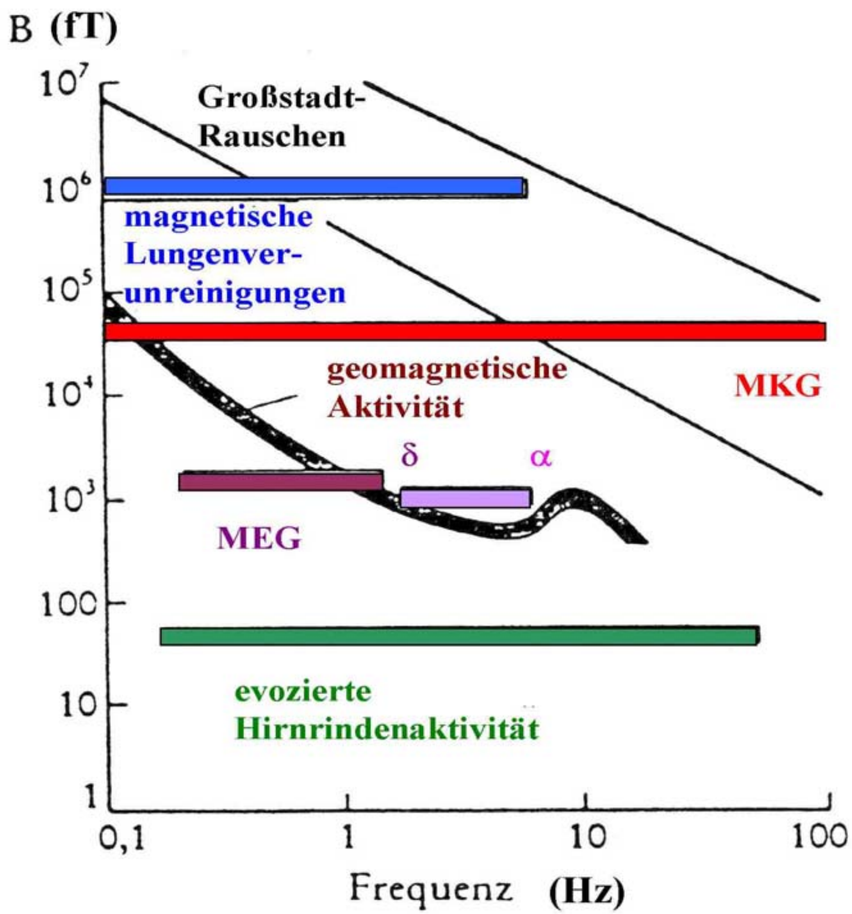


Abbildung 1.21. Biomagnetismus

Zeitlich veränderliche Spannungen und Ströme

Nun betrachten wir zeitabhängige elektrische Vorgänge, bei denen sich Strom und Spannung ständig verändern. Dabei kommt ein neues Phänomen zum Vorschein: die *Induktion*.

Das Induktionsgesetz

Michael Faraday entdeckte, daß ein sich zeitlich veränderndes Magnetfeld eine elektrische Spannung in einer Schleife oder Spule aus leitendem Material erzeugt: die Induktionsspannung U_i. Weitere Versuche zeigten, daß diese Spannung proportional zur zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses $\Phi(A)$ durch die Fläche A der Spule oder Schleife ist:

Der Fluß ist dabei die Anzahl der Magnetfeldlinien, die die Fläche A durchschneiden:

$$\Phi_\mathrm{B}(A) = \mu_0 \iint_A \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

wo hier der Fluß des magnetischen Induktionsfeldes B gemeint ist, mit

$$B = \mu_0 H \ .$$

Das Induktionsgesetz lautet nun:

$$U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{B}}{\mathrm{d}t} \ ;$$

die Induktionsspannung ist gegeben durch die zeitliche Änderung des Flußes (d. h. des Produktes aus B und A) und ist stets ihrer Ursache entgegengerichtet (Minuszeichen).

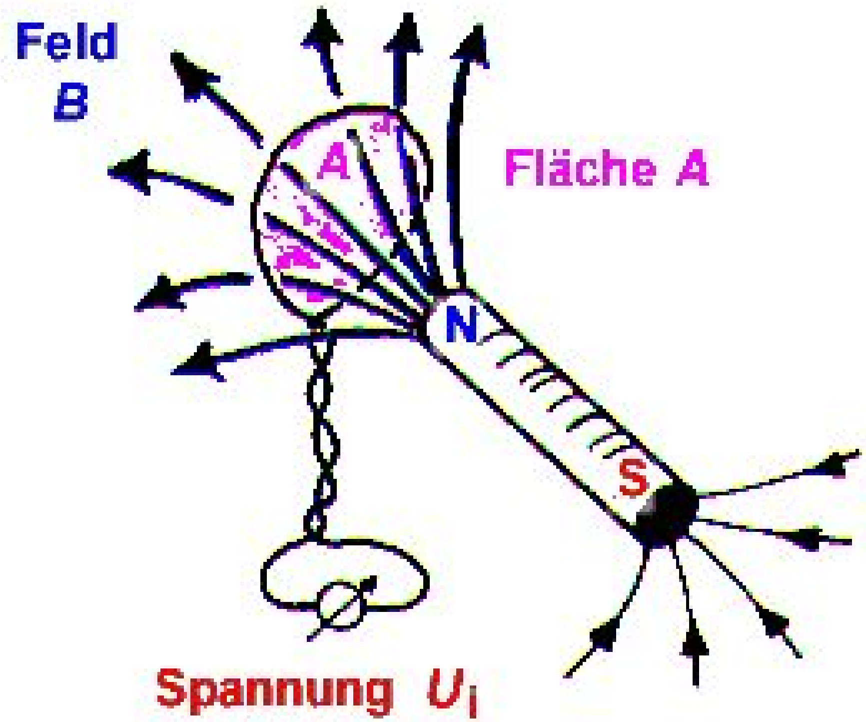


Abbildung 1.22. Drahtschleife im B-Feld eines Stabmagneten. Bewegung oder Drehung der Schleife induziert die Spannung U_{i} in der Schleife, nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz

Es gibt verschiedene Wege, eine zeitliche Änderung des Flußes zu produzieren: das Feld H (oder B) kann sich ändern (Änderung des Stromes durch eine Feldspule, Bewegung eines Dauermagneten), die Fläche A kann sich ändern (Zusammenziehen einer Drahtschleife), oder die relative Einstellung der Fläche zum Feld kann sich ändern (Drehung einer Drahtschleife). Die letzte Methode wird in elektrischen Generatoren (Dynamos, Lichtmaschinen) angewandt.

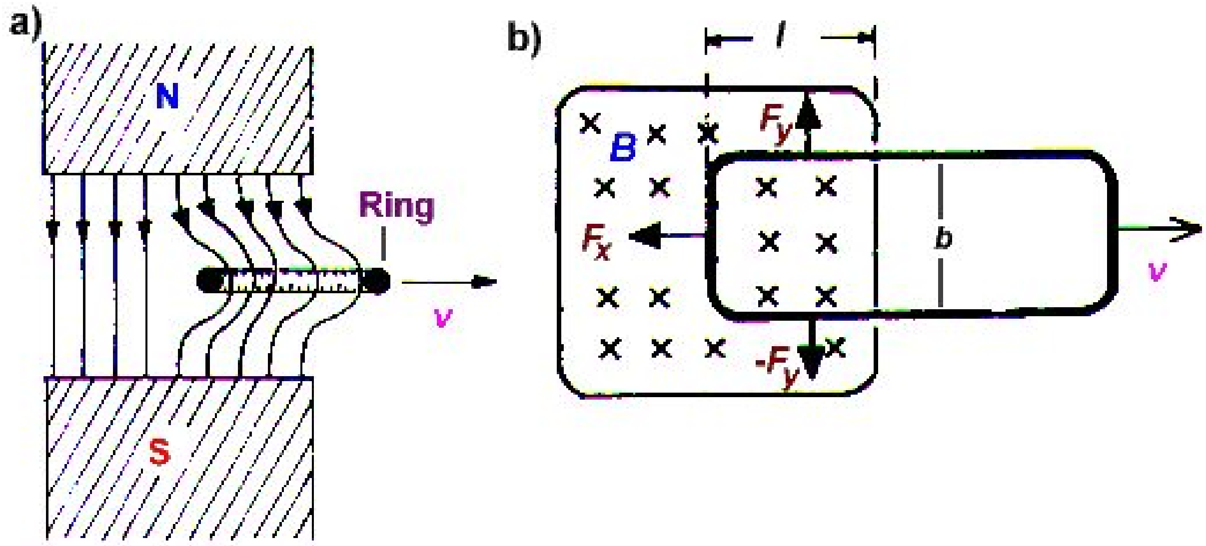


Abbildung 1.23. Induktion durch Bewegung: ein Metallring wird aus dem Feldbereich eines Dauermagneten mit der Geschwindigkeit v in $+x$-Richtung gezogen. Die dabei entstehende Änderung des magnetischen Flusses Φ durch den Ring induziert die Spannung U_i im Ring und führt zu einem Induktionsstrom I_i. Dieser erzeugt wiederum ein eigenes Induktionsfeld B_i, das sich zum äußeren Feld B addiert. Das Gesamtfeld wirkt der Ursache der Induktion entgegen, d. h. der Fluß in dem Ring tendiert dazu, konstant zu bleiben [die Feldlinien werden »mitgezogen«, siehe Teilbild a)]. Im Teilbild b) (Draufsicht) sieht man den Ring von oben, die Fläche $A = l\,b$ im Feld ändert sich und bewirkt die Änderung des Flußes Φ. Der Induktionsstrom erzeugt eine Kraftwirkung (Lorentzkräfte) im Feld B, die Kraft F_x wirkt der Bewegung v entgegen

Dreht man eine Spule mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem konstanten, homogenen Magnetfeld, so verläuft die Induktionsspannung U_i in der Spule sinusförmig:

$$U_\mathrm{i}(t) = U_0 \sin[\omega t + \varphi]\ .$$

Wechselspannung

Diese zeitlich-sinusförmige Spannung nennt man eine Wechselspannung, die rotierende Spule im Magnetfeld einen Wechselspannungsgenerator. Schließt man die Spannung $U(t)$ an einen Widerstand R an, so fließt ein Strom $I(t)$ nach dem Ohm'schen Gesetz,

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} \ .$$

Strom und Spannung laufen synchron, ihre Phasen φ sind gleich; sie sind nicht *phasenverschoben*. Die Leistung, die im Widerstand als Joule'sche Wärme verbraucht wird, ist wie beim zeitlich konstanten Strom das Produkt aus Strom und Spannung:

$$\begin{aligned} P(t) = U(t)I(t) &= U_0 \sin[\omega t + \varphi]\frac{U(t)}{R} \\ &= U_0 \sin[\omega t + \varphi]\frac{U_0}{R}\sin[\omega t + \varphi] \\ &= \frac{U_0^2}{R}\sin^2[\omega t + \varphi]. \end{aligned}$$

Die mittlere Leistung $<P>$, gemittelt über eine Sinusschwingung, ist dann

$$\begin{aligned} <P> &= \frac{U_0^2}{R} <\sin^2[\omega t + \varphi]> \\ &= \frac{U_0^2}{2R} \qquad \text{oder} \qquad \frac{U_0 I_0}{2} \ , \end{aligned}$$

da der Mittelwert $<\sin^2>$ über eine volle Schwingung gleich $1/2$ ist:

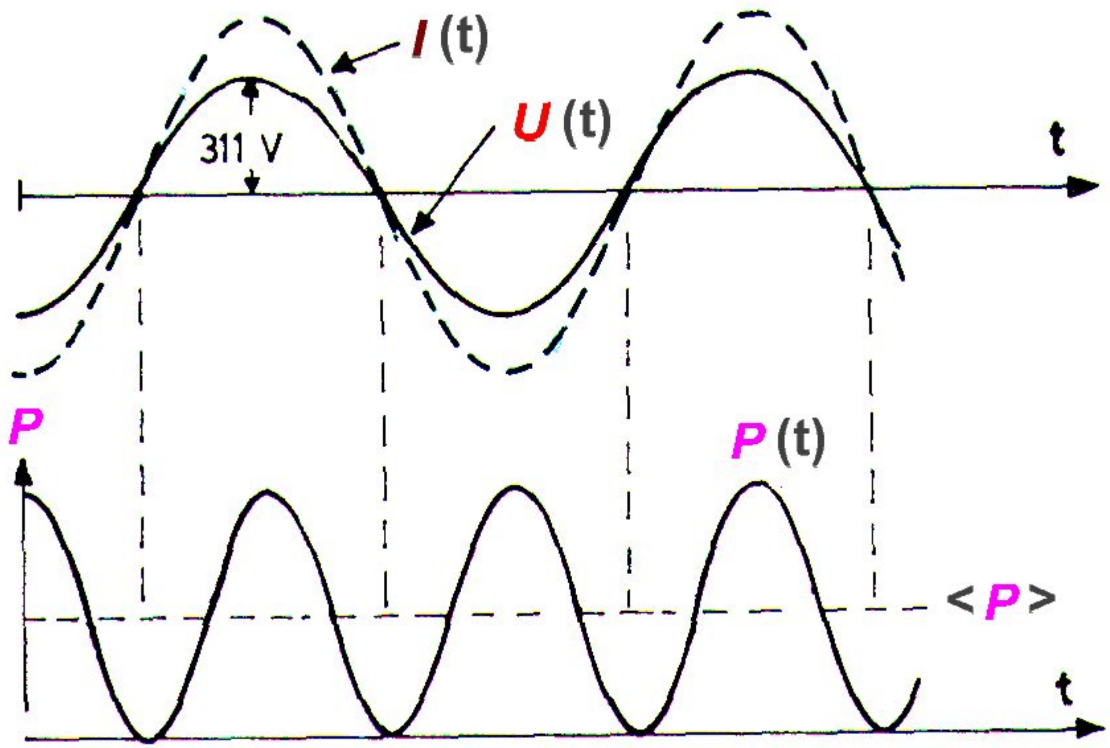


Abbildung 1.24. Strom $I(t)$, Spannung $U(t)$ und Leistung $P(t)$ in einem Wechselstromkreis mit Ohm'schem Widerstand. Strom und Spannung sind sinusförmig und in Phase miteinander. Der Effektivwert der Spannung ist 220 V, die maximale Spannung U_0 (Maximum der Sinusfunktion) beträgt 311 V: 220 V = 311 V$/\sqrt{2}$. Die Leistung $P(t)$ ist proportional zu $\sin^2(\omega t)$: $P(t) = P_0 \sin^2(\omega t)$. Die mittlere Leistung $< P >$ ist als gestrichelte Linie dargestellt, sie hat den Wert $1/2 P_0$

Man definiert daher Effektivwerte $U_{\text{eff}}, I_{\text{eff}}$ für Strom und Spannung mit $U_{\text{eff}} = U_0/\sqrt{2}$ und $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$, so daß

$$U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \frac{U_0 I_0}{2} = < P > \quad .$$

Wechselstromwiderstände

Läßt man eine Wechselspannung auf *andere* Schaltelemente wirken, wie z. B. einen Kondensator oder eine Spule, so laufen Strom und Spannung *auseinander*.

Die Spannung am Kondensator führt zu einem Ladestrom, der phasenverschoben ist relativ zur Spannung. Dies kann man für eine sinusförmige Spannung leicht ausrechnen:

$$q(t) = CU(t) \qquad \text{und} \qquad I(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$= CU_0 \frac{\mathrm{d}(\sin[\omega t + \varphi])}{\mathrm{d}t}$$

d. h.

$$I(t) = \omega C U_0 \cos[\omega t + \varphi] = \omega C U_0 \sin\left[\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right] \; .$$

(Die letzte Gleichung folgt aus der trigonometrischen Beziehung $\sin[\alpha + \frac{\pi}{2}] = \cos\alpha$.)

Wir finden daher folgende Wirkungen des Kondensators auf eine Wechselspannung $U(t)$:

- der Strom $I(t)$ ist phasenverschoben um $+\frac{\pi}{2}$ relativ zur Spannung $U(t)$; dann ist die mittlere Leistung $<P>$ im Kondensator gegeben durch:

$$U(t)I(t) = U_0 I_0 < \sin[\omega t + \varphi] \cos[\omega t + \varphi] >= 0!!$$

- die Amplituden von Spannung und Strom verhalten sich wie

$$I_0 = \omega C U_0 = \frac{U_0}{R_{\text{eff}}} \qquad \text{mit} \qquad R_{\text{eff}}(\omega) = \frac{1}{\omega C} \; .$$

Man nennt den Effektivwiderstand $R_{\text{eff}}(\omega)$ auch »Scheinwiderstand« oder »Blindwiderstand«, da er keine Leistung verbraucht: der Kondensator speichert nur Energie und gibt sie wieder (1/4 Schwingung später) frei.

Wir können eine ähnliche Rechnung für eine Spule durchführen: wenn die Spule einen Wechselstrom trägt, erzeugt sie in ihrer Mitte ein magnetisches Wechselfeld $H(t)$ bzw. $B(t)$; dieses (zeitlich veränderlicher Fluß durch die Spule, $B(t) \cdot A$!) induziert wiederum eine Spannung $U_{\mathrm{i}}(t)$, die proportional der zeitlichen Ableitung des Feldes $B(t)$ ist:

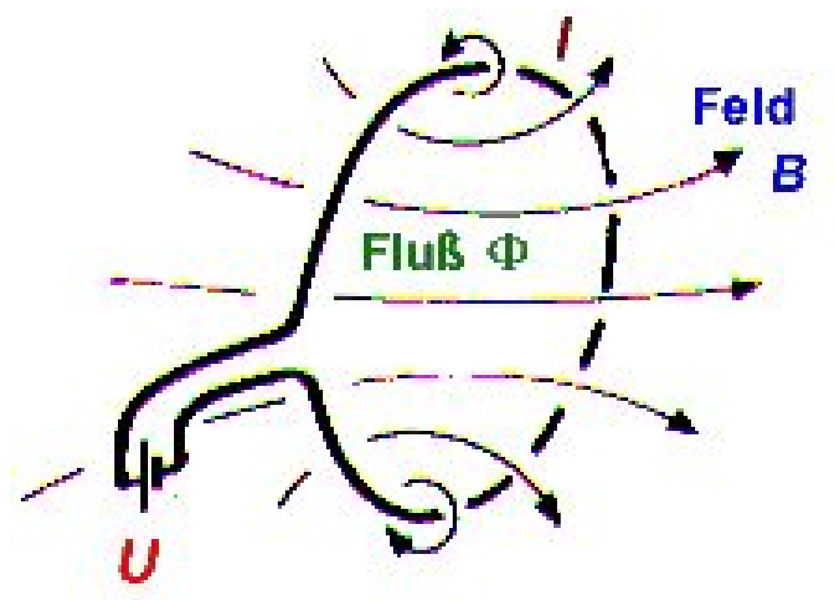


Abbildung 1.25. Drahtschleife mit einer externen Spannungsquelle. Der Strom I im Draht erzeugt das magnetische Induktionsfeld B und somit den Fluß $\Phi = BA$ (A = Fläche der Schleife). Ändert sich die Spannung U zeitlich (z. B. $U(t) = U_0 \sin[\omega t + \varphi]$), so werden B und Φ auch zeitlich verändert, eine Induktionsspannung $U_{\mathrm{i}} = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ erscheint zwischen den Enden der Drahtschleife [entgegengesetzt zur momentanen externen Spannung $U(t)$]

Bei einer Spule der Länge l, Windungszahl N und des Radius r ist:

$$\begin{aligned}
U_{\mathrm{i}}(t) &= -\frac{\mathrm{d}[B(t)A]}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{\mathrm{d}\left[\left(\frac{\mu_0 N}{l}\right)\, I(t)\left(\pi\, r^2\, N\right)\right]}{\mathrm{d}t} \\
&= -\left[\frac{\mu_0\, \pi\, r^2\, N^2}{l}\right]\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= -L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\ .
\end{aligned}$$

Die Konstante $L = [\mu_0 \pi\, r^2\, N^2/l]$ nennt man die Selbstinduktivität der Spule. [Einheit: $\frac{Tm^2}{A} = H{=}\mathrm{H(enry)}$]. Die Spule zeigt eine Art »elektrische Trägheit«: sie widerstrebt jeglicher Änderung des Stromes $I(t)$, indem sie eine Gegenspannung $U_{\mathrm{i}}(t)$ aufbaut. (Enthält die Spule in ihrem Inneren Materie mit der relativen Permeabilitätszahl μ_{r}, muß man anstatt μ_0 das Produkt $\mu = \mu_0\, \mu_{\mathrm{r}}$ in L einsetzen.)

Setzen wir für den Strom einen Wechselstrom $I(t) = I_0 \sin[\omega t + \varphi]$ an, so finden wir (ähnliche Rechnung wie beim Kondensator) daß in der Spule, der Strom um $-\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben ist relativ zur Spannung $U_{\mathrm{i}}(t)$, die Leistung ist wieder im Mittel gleich Null.

Der Effektivwiderstand der Spule ist gegeben durch:

$$R_{\mathrm{eff}}(\omega) = \omega L\ .$$

Kondensator und Spule wirken also beide bei Wechselspannung als Energiespeicher, sie verschieben Spannung und Strom so gegeneinander, daß keine Leistung verbraucht wird. Die Effektivwiderstände von beiden sind frequenzabhängig; R_{eff} des Kondensators wird unendlich, wenn $\omega \to 0$ geht (Gleichspannung, keinen Ladungsdurchgang), R_{eff} der Spule geht gegen Null, wenn $\omega \to 0$ geht (nur Ohm'scher Widerstand).

Der elektrische Schwingkreis

Schließt man einen Kondensator und eine Spule zusammen, so führen ihre gegenläufige Frequenzabhängigkeiten zu einem Resonanzverhalten: sie haben eine Resonanzfrequenz, wo der Gesamtwiderstand maximal (bzw. minimal, je nach Schaltung) ist. Dies nennt man einen Schwingkreis:

Er läßt sich in exakter Analogie zum mechanischen harmonischen Oszillator beschreiben (Schwingungsgleichung!). Man kann mit einem Schwingkreis auch Wechselspannung erzeugen, in dem man ihm Energie zuführt (Aufladen des Kondensators, Induktion in der Spule).Die Eigenfrequenz ω_0 ist gegeben durch $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Vergleich von elektrischen und mechanischen Schwingungen

Sehen Sie dazu bitte die Tabelle 1.6 auf der folgenden Seite.

Feldgleichungen bei zeitlich veränderlichen Feldern

Feldgleichungen (Maxwell-Gleichungen) Wie in Abschnitt 1.1.1 auf Seite 203 erwähnt, müssen die Feldgleichungen im Falle nicht statischer Felder noch modifiziert werden.

Zunächst ist das Faraday'sche Induktionsgesetz zu berücksichtigen; es ändert die Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes E. Ein elektrostatisches Feld muß wirbelfrei sein, da man sonst durch ewiges Kreisen

Tabelle 1.6. Vergleich von elektrischen mit mechanischen Schwingungen

Größe	Parallel-Schwingkreis	Federpendel
»Auslenkung«	Ladung q (As)	Strecke x (m)
»Bewegungsgröße«	Strom $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ (A)	Geschwindigkeit $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ (m/s)
»Beschleunigung«	$\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2q/\mathrm{d}t^2$ (A/s)	$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ (m/s^2)
»rücktreibende Kraft«	$U_\mathrm{C} = (1/C)\,q$ (V)	$F_\mathrm{el} = -Dx$ (N)
»Trägheit«	Induktivität L (Vs/A) $U_L = -L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = -L\mathrm{d}^2q/\mathrm{d}t^2$	Masse m (kg) $F_\mathrm{Tr} = ma = m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$
»Bewegungsenergie«	magnetische Feldenergie $E_\mathrm{B} = (L/2)I^2$ (J)	kinetische Energie $E_\mathrm{kin} = (m/2)v^2$ (J)
»potentielle Energie«	elektrische Feldenergie $E_E = (1/2\,C)q^2$ (J)	elastische Energie $E_\mathrm{el} = (D/2)x^2$ (J)
»Kräftegleichgewicht«	Maschenregel, $U_L - U_\mathrm{C} = 0$	actio = reactio, $F_\mathrm{el} = F_\mathrm{Tr}$
Energieerhaltung	$E_\mathrm{B} + E_E =$ konst.	$E_\mathrm{kin} + E_\mathrm{el} =$ konst.
Schwingungsgleichung	$\mathrm{d}^2q/\mathrm{d}t^2 + (1/LC)q = 0$	$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 + (D/m)x = 0$
Lösung	$q(t) = q_0 \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$ mit $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$	$x(t) = x_0 \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$ mit $\omega_0 = \sqrt{D/m}$
Dämpfung	elektr. Widerstand $U_R = RI$	Reibungskraft $F_R = -kv$

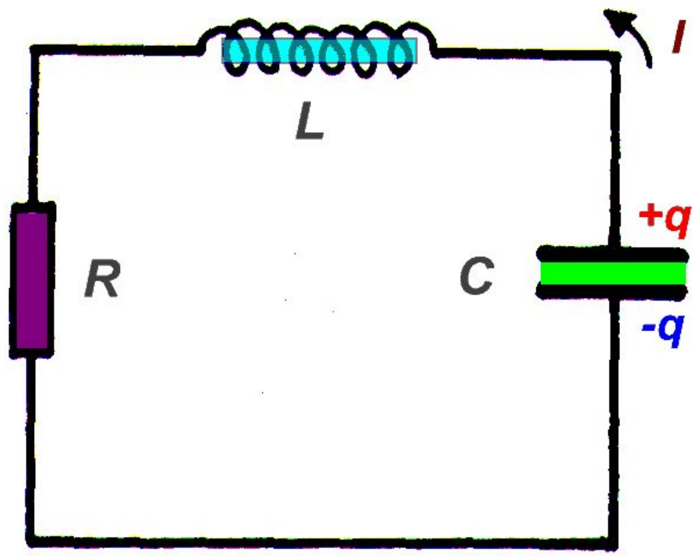


Abbildung 1.26. Elektrischer Schwingkreis (LRC-Kreis). Der Kondensator speichert elektrische Energie in seinem elektrischen Feld, die Spule speichert magnetische Energie in ihrem Magnetfeld. Die Schwingungsenergie wechselt zwischen diesen beiden Formen, wie in einem mechanischen Oszillator zwischen potentieller und kinetischer Energie. Der Widerstand wandelt Schwingungsenergie in Wärme um und bewirkt damit eine Dämpfung der Schwingungen.

einer Ladung ein *perpetuum mobile* bauen könnte, was den Energieerhaltungssatz verletzen würde. Bei einem zeitlich-veränderlichen Feld ist dies jedoch kein Problem mehr, da die Veränderung des Feldes mit Arbeit verbunden ist, so daß die Energie nicht aus dem Nichts entstehen müßte. Die Induktionsspannung U_i kann mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen Potentialdifferenz und elektrischem Feld als Integral des Feldes um eine geschlossene Kurve ausgedrückt werden:

$$U_\mathrm{i}(t) = \int_{K \text{ um } A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

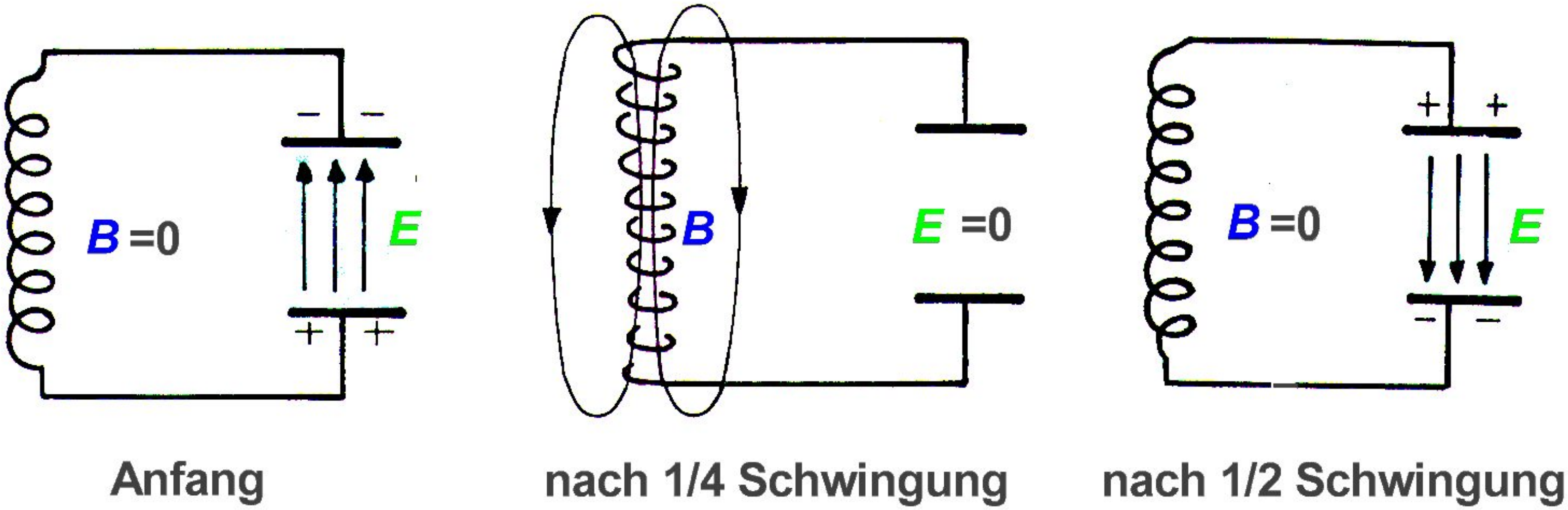


Abbildung 1.27. Elektromagnetische Schwingungen in einem LC-Kreis. Im linken Bild ist der Kondensator gerade aufgeladen, die Schwingungsenergie ist in seinem elektrischen Feld gespeichert, der Strom ist null. Im mittleren Bild, nach einer Viertelschwingung, hat sich der Kondensator entladen, der Strom ist maximal und erzeugt das Magnetfeld B in der Spule, wo auch die Energie nun gespeichert ist. Im rechten Bild, nach einer halben Schwingung, hat der Induktionsstrom aus der Spule den Kondensator umgekehrt aufgeladen, die Energie ist wieder dort gespeichert. Der Vorgang wiederholt sich nun mit umgekehrtem Vorzeichen, bis der Anfangszustand wieder (nach einer vollen Schwingung) erreicht wird.

so daß, mit dem Induktionsgesetz, $U_\mathrm{i}(t) = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}/\mathrm{d}t(\int \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A})$,

$$\int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} \;=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint\limits_{A} \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}\right)$$

als erste Feldgleichung gilt. Das doppelte Integralzeichen bedeutet, daß über die Fläche A (eingeschlossen von der Kurve K) integriert wird. Dies ist die allgemeine, integrale Form des Induktionsgesetzes; im zeitunabhängigen Fall wird die rechte Seite wieder gleich Null.

Zur Vervollständigung der Feldgleichungen muß das Ampère'sche Gesetz (d. h. die zweite Feldgleichung, $\int_{K \text{ um } A} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I_{\text{durch } A}$) auch ergänzt werden. J.C. MAXWELL bemerkte, daß sie bei zeitlich veränderlichen Vorgängen (z. B. der Entladung eines Kondensators in einem RC-Kreis) zu Widersprüchen führt, da die Fläche A so gewählt werden könnte, daß z. B. der Anschluß zum Kondensator, der den Entladestrom führt, diese Fläche nicht durchschneidet und der Strom $I_{\text{durch}\,A}$ scheinbar verschwinden würde; trotzdem entsteht ein Magnetfeld während des Stromflusses. Er schlug vor, einen zweiten, zeitabhängigen Term hinzuzufügen, analog der rechten Seite der Gleichung für das Induktionsgesetz: im Kondensator während der Entladung exisitert nämlich ein zeitabhängiges elektrisches Feld, der elektrische Fluß Φ_{E} durch die Fläche A zwischen den Kondensatorplatten ändert sich zeitlich:

$$\int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I_{\text{durch } A} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\varepsilon_0 \iint\limits_{A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d} \; bf A \right) \; .$$

Der Faktor ε_0 sorgt dafür, daß die Einheiten stimmen. Dieser Zusatzterm wird »Maxwell'scher Verschiebungsstrom« genannt, er hat die Einheit eines Stromes und spielt eine analoge Rolle zu der des freien Stromes I. Damit lauten die vier Feldgleichungen (ohne Materie aber mit Zeitabhängigkeit), die Maxwell'schen Gleichungen, wie folgt:

1. Induktionsgesetz für das E-Feld (Faraday'sches Gesetz):

$$\int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\iint\limits_{A} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \right) \; . \tag{1.9}$$

2. Ströme sind Quellen des H-Feldes (Ampère'sches Gesetz plus Maxwell'schen Verschiebungsstrom):

$$\int\limits_{K \text{ um } A} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I_{\text{durch } A} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\varepsilon_0 \iint\limits_{A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \right) \ . \tag{1.10}$$

3. Ladungen sind Quellen des D-Feldes (Gauß'sches Gesetz):

$$\iint\limits_{A \text{ um } V} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = q_{\text{in } V} \tag{1.11}$$

4. Es gibt keine magnetischen Ladungen (Monopole):

$$\iint\limits_{A \text{ um } V} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0 \ . \tag{1.12}$$

Diese Gleichungen sind fast symmetrisch bezüglich der Felder D und H sowie $E = (1/\varepsilon_0)D$ und $B = \mu_0 H$; die verbleibende Unsymmetrie resultiert daraus, daß elektrische Ladungen q (Monopole) existieren, magnetische Ladungen (oder Ströme) jedoch nicht. Letztere sind nicht durch irgendein physikalisches Gesetz verboten, sie sind aber bis jetzt nie beobachtet worden. Verwendung der Beziehung $B = \mu_0 H$ erlaubt es, die Gleichungen (1.9) und (1.10) miteinander zu koppeln, so daß ein sich zeitlich änderndes E-Feld ein B-Feld aufbaut und umgekehrt; als Ergebnis erhält man zwei Wellengleichungen (hier eindimensional angegeben, vgl. im Abschnitt auf Seite 118):

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} \ ,$$

$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2} \; .$$

Diese beschreiben eine elektromagnetische Welle, in x-Richtung laufend, die aus senkrecht-(in y- bzw. z-Richtung) stehenden, sinusförmigen E- und B-Feldern besteht. (Die Bedingungen für die Feldrichtungen ergeben sich aus den anderen beiden Feldgleichungen.)