Mechanik

Die Mechanik behandelt Bewegungen, ihre Abläufe und ihre Erzeugung. Die Bewegungsgesetze (Newtonschen Axiome) können in axiomatischer Form eingeführt werden:

Lex prima:
Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmiger geradliniger Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Definition: Die Größe der Bewegung wird durch die Geschwindigkeit und die Menge der Materie vereint gemessen.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$\vec{p} = const; \text{ bei Abwesenheit von Kräften}$$

Lex secunda:
Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

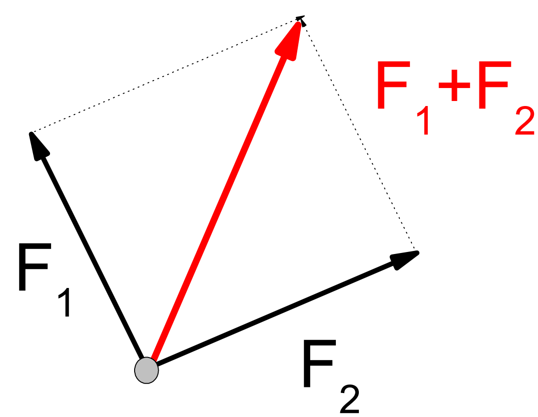
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$Masse\ mal\ Beschleunigung = Kraft$$

Lex tertia:
Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

$$\text{actio} = \text{reactio}; \qquad \vec{F}_R = -\vec{F}$$

Corollarium
Zwei Kräfte, die am gleichen Massenpunkt angreifen, setzen sich zur Diagonalen des von ihnen gebildeten Parallelogramms zusammen.



Basisgrößen, abgeleitete Größen

Quantitativ, reproduzierbar meßbaren Größen, sogenannten physikalischen Größen, sind als Produkt einer Maßzahl mit einer Einheit definiert:

$$\text{Physikalische Größe} = \text{Maßzahl} \cdot \text{Einheit}$$

Die **Maßzahl** ist das (numerische) Ergebnis einer Messung oder Berechnung (mit Messfehler oder Unsicherheit versehen);

Die **Einheit** legt die Meßskala in einer **Basiseinheit** oder einer **abgeleiteten Einheit** fest. Die abgeleiteten Einheiten haben oft Eigennamen. Beispiele siehe Tabelle.

Beispiele für physikalische Einheiten

Länge oder Strecke s	$s = 1{,}55$ m	(m $\widehat{=}$ Meter)
elektr. Stromstärke I	$I = 23{,}2$ A	(A $\widehat{=}$ Ampère)
Geschwindigkeit v	$v = 55$ km/h	(Kilometer/Stunde)
elektr. Spannung U	$U = 220$ V	(Volt $\widehat{=}$ J/As)

SI-Maßsystem

Das z. Z. international gültige Maßsystem ist das Système International d'Unités (kurz SI), welches sieben Grundgrößen mit entsprechenden Basiseinheiten definiert (siehe Tabelle). Aus diesen sieben Grundgrößen werden alle anderen (abgeleiteten) Größen zusammengesetzt.

Beispiele

- Geschwindigkeit: $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}}$, ; Einheit$[v] \mathrel{\widehat{=}} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- kinetische Energie: $E_{\mathrm{kin}} = \frac{m}{2}v^2$ Einheit$[E_{\mathrm{kin}}] \mathrel{\widehat{=}} \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = N \cdot m \equiv$ **J**oule

Urkilogramm: siehe auch http://physics.nist.gov/cuu/Units/kilogram.html

SI-Einheiten

Grundgröße	Basiseinheit	Realisierung (Genauigkeit)	Bemerkungen
Länge l (s,d)	Meter (m), (auch mm, μm, nm, km)	Wellenlänge eines Jod-stabilisierten He–Ne–Lasers $(2{\cdot}10^{-9})$	Lichtgeschwindigkeit $c = 2{,}99792458\ 10^8$m/s; $c = \lambda \cdot \nu$
Zeit t	Sekunde (s), (auch ms, µs, ns, min, h)	^{133}Cs Frequenz ν^{Cs} CH_4-stabilisierter He–Ne–Laser $(< 10^{-11})$	Übertragung auf Quarzuhren
Masse m	Kilogramm(kg), (auch g, mg, µg, t)	Massenprototyp (ca. 10^{-8})	
elektrische Stromstärke I	Ampère (A)	magnetische Spulenwaage $(< 10^{-6})$ (neu: Quanten-Halleffekt)	(auch Spannungsnormale)
Lichtstärke S	Candela (cd)	Hohlraumstrahler (ca. $2 \cdot 10^{-3}$) (neu: Synchrotronstrahlung)	Übertragung auf Glühlampen
Temperatur T	Kelvin (K) (1 °C = 1 K)	absoluter Nullpunkt: 0 K $\equiv$ $-273{,}15$°C (typ. 10^{-4})	Fixpunkte; Tripelpunkt von H_2O: 273,16 K
Stoffmenge n (oder ν)	Mol (mol) 1 mol = N_A Teilchen	Röntgenstreuung–Si-Einheitszelle (10^{-6})	

Drei einfache Bewegungsformen

1. Das bewegte Objekt läuft eindimensional entlang einer **Geraden**. Die Bewegung kann **gleichförmig** (mit konstanter Geschwindigkeit) oder **beschleunigt** sein. Beinhaltet kinetische (Translations-) Energie.

2. Das bewegte Objekt läuft auf einer **Kreisbahn** (Radius = konstant). Der Betrag der Bahngeschwindigkeit kann konstant bleiben (gleichförmige Kreisbewegung), jedoch ändert sich ständig ihre **Richtung** (Radial- oder Zentripetalbeschleunigung). Beinhaltet Rotationsenergie.

3. Das bewegte Objekt läuft hin und her um einen festen Punkt, die Bewegung wiederholt sich **zyklisch** (nach der Schwingungsdauer). Einfachste Art: die Bewegung beschreibt eine Sinus- oder Kosinusfunktion (harmonische Schwingung). Beschleunigungen treten in jedem Zyklus auf, die Energie wechselt hin und her zwischen kinetischer und potentieller Energie.

Eine beliebige, allgemeine Bewegung kann als Überlagerung dieser drei Bewegungsformen beschrieben werden.

- *Kinematik*: Beschreibung der Bewegung selbst: Ort, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung
- *Dynamik*: Ursache der Bewegung: Kräfte, Wechselwirkungen
- *Statik*: Ursache der Ruhe: Kräftegleichgewicht

Kinematik der geradlinigen Bewegung

Zur Beschreibung einer Bewegung, d. h. für die Kinematik, brauchen wir die Zeitabhängigkeit von drei Größen:

s-t-Diagramm, Weg
v-t-Diagramm, Geschwingdigkeit
a-t-Diagramm, Beschleunigung

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,, \\ a(t) &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}$$

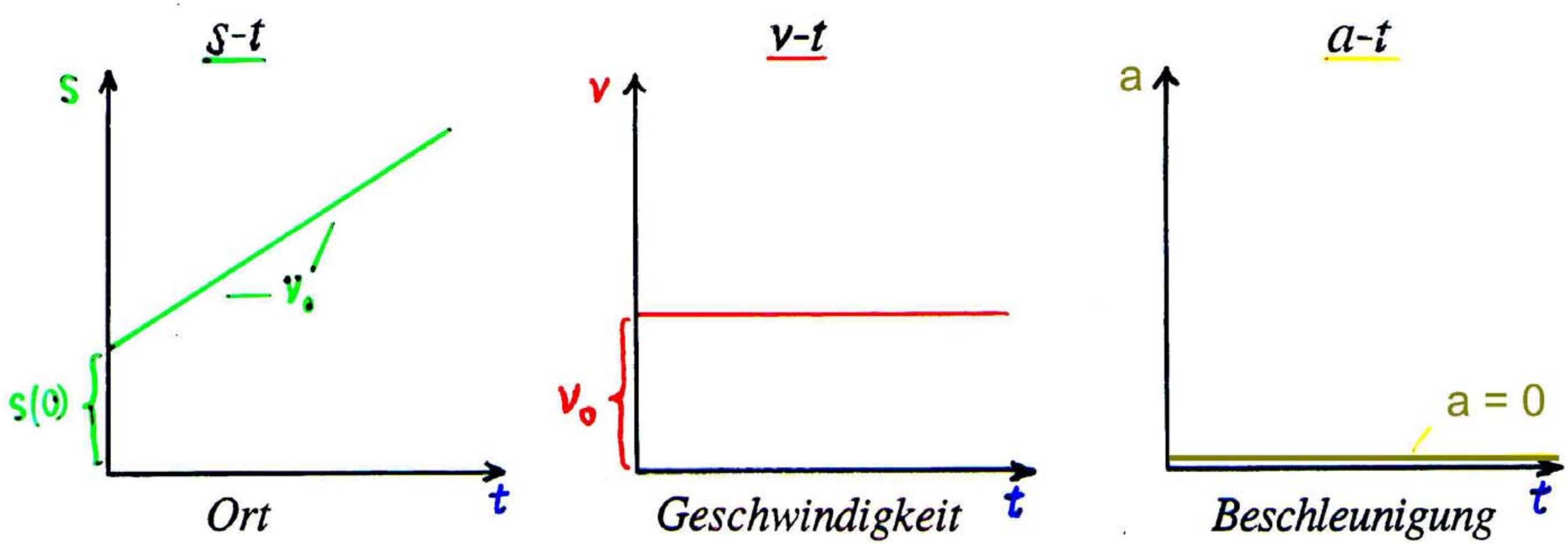
Oder in umgekehrter Richtung durch Integration:

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$$
$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$$

Die *Integration* gibt die Fläche unter der jeweiligen Kurve an (geometrisch).

Geradlinige, gleichförmige Bewegung

Die Geschwindigkeit $v(t) = v_0 =$ konstant, sie ist die »Konstante der Bewegung«. Die Beschleunigung ist Null: $a(t) = \mathrm{d}v_0/\mathrm{d}t = 0$. Das Integral $\int v\,\mathrm{d}t$ (Rechteckfläche) ergibt

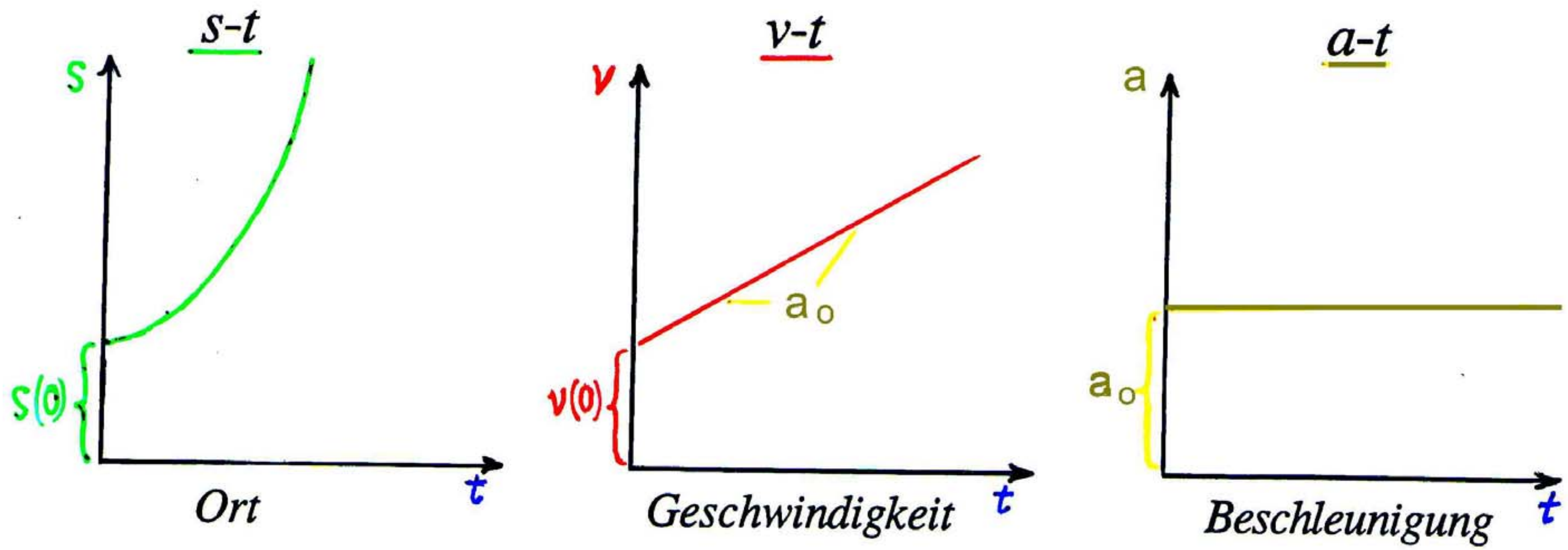


$$s(t) = v_0 t + s(0).$$

Der Ort wächst linear mit der Zeit. Die Konstante $s(0)$ (Anfangsort) ist eine Anfangsbedingung (Integrationskonstante). Mathematisch ist $s(t) = v_0 t + s(0)$ die Lösung der Bewegungsgleichung $v(t) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, mit $v(t) = v_0$.

Geradlinige, gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Die Beschleunigung ist $a(t) = a_0 =$ konstant, sie ist nun die »Konstante der Bewegung«.

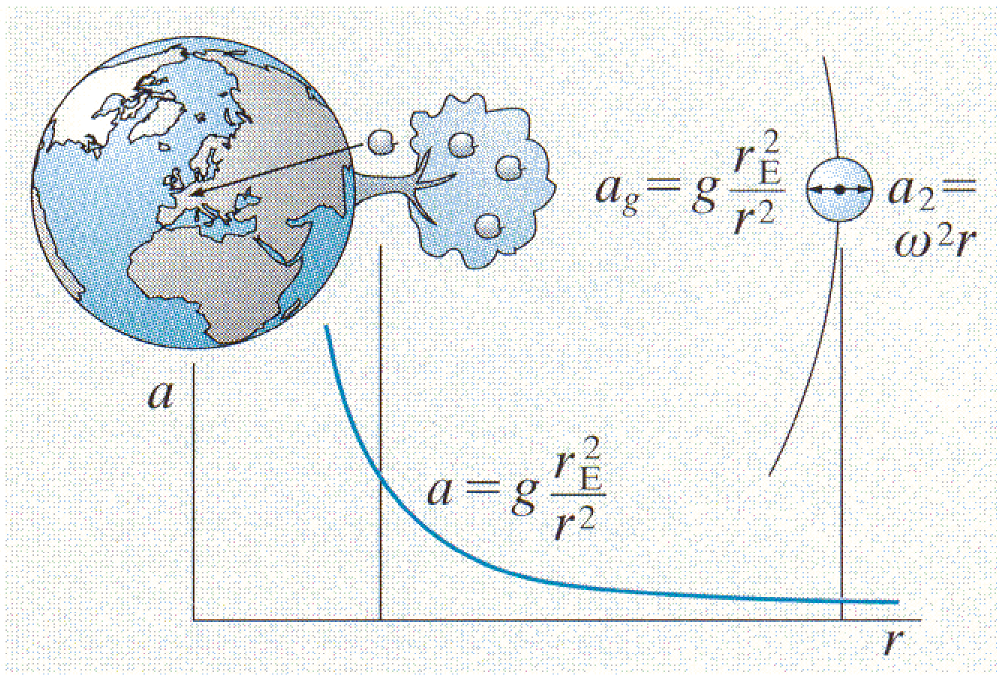


Die Integration der Bewegungsgleichungen $\frac{ds(t)}{dt} = v(t)$ und $\frac{dv(t)}{dt} = a(t)$ ergeben mit den Anfangswerten s_0, v_0 zur Anfangszeit t_0:

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a_0}{2}(t - t_0)^2.$$

Die Zeitabhängigkeit des Orts $s(t)$ ist parabelförmig.

Ein Beispiel der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die *Fallbewegung* eines Körpers durch die Schwerkraft der Erde.



Gravitationsgesetz:

$$\vec{F} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|r|}; \quad wobei\ G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Zusammenfassung, geradlinige Bewegung

die geradlinige Bewegung – kinematische Größen

Alle Größen stehen parallel zueinander, wir können auf die Vektorschreibweise verzichten! (Ansonsten werden Vektorgrößen hier mit Fettdruck gekennzeichnet: $\vec{\boldsymbol{s}}$ = Strecke als Vektor, s oder $|s|$ = Betrag der Strecke.)

- $s(t)$=Bewegungsstrecke [auch $x(t)$ genannt; i.a. eine Vektorgröße] (m)
- $v(t)$=Geschwindigkeit = $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ (m/s): Steigung der s-t-Kurve
- $a(t)$=Beschleunigung =$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2 s/\mathrm{d}t^2 (m/s^2)$: Krümmung der s-t-Kurve

Bewegungsgleichungen und deren Lösungen

- *gleichförmige Bewegung*, $v(t) = v_0 = const$:

$$v(t) = v_0; \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 \;;$$

Lösung:

$$\begin{aligned} s(t) &= s(0) + v_0 \cdot (t - t_0) \\ s(t) &= s(0) + v_0\, t \quad f\ddot{u}r \quad t_0 = 0. \end{aligned}$$

v_0-Konstante der Bewegung
$s(0)$-Anfangsbedingung

- *gleichmäßig beschleunigte Bewegung,* $a(t) = a_0 = const$:

$$a(t) = a_0; \; \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = a_0 \; ;$$

Lösung:

$$\begin{aligned} s(t) &= s(0) + v(0) \cdot (t - t_0) + \frac{a_0}{2} \cdot (t - t_0)^2 \\ s(t) &= s(0) \; + v(0) \cdot t \; + \frac{a_0}{2} t^2 \quad f\ddot{u}r \quad t_0 = 0. \end{aligned}$$

Der Energiebegriff

Historisch ist der Energiebegriff relativ neu; er ist aus dem Begriff der Arbeit abgeleitet worden, der schon am Anfang der Mechanik zur Zeit Newtons stand.

Wir schauen uns deshalb die Begriffe *Arbeit, Energie, Leistung* in dieser Reihenfolge an. In der Physik haben diese Begriffe eine präzise Definitionen im Sinne der Einführung (»physikalischer Begriff«: genau und wiederholbar zu messen, durch Mathematik zu beschreiben).

Definition der (mechanischen) Arbeit

Mechanische Arbeit beschreibt die Wirkung einer Kraft F, die eine Bewegung entlang der Strecke s erzeugt. Diese Wirkung ist proportional der Stärke der Kraft und auch proportional der Länge der Bewegungsstrecke s. Wir definieren deshalb die Arbeit W mit

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Strecke}$$

oder

$$W = Fs$$

Einheit der Arbeit: Nach der obigen Definition hat die Arbeit die gleiche Einheit wie [Kraft · Strecke]. Die Einheit der Kraft F folgt aus $F = ma$ als

$$[F] = [m][a] = \mathrm{kg}\frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \equiv \mathbf{N}\mathrm{ewton}$$

Damit ist die Einheit der Arbeit gleich **N**ewton · Meter = Nm = $\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$. Diese Einheit erhält auch einen eigenen Namen, **J**oule:

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{Nm} \equiv 1\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Wir haben sie schon in Zusammenhang mit Energiedosis und Äquivalentdosis verwendet.

Nun gibt es einige Feinheiten, die in manchen Fällen die Definition der Arbeit noch komplizierter machen, als sie oben erscheint:

1. Die Größen Kraft und Strecke sind beide ***gerichtete*** Größen (Vektoren); sie haben sowohl einen Betrag $|F|, |s|$ als auch eine Richtung. Falls die Richtungen nicht übereinstimmen, ist nur die Kraftkomponente $F_{||}$ *parallel* zur Strecke wirksam bei der Berechnung der Arbeit. Wir müssen das Produkt $F \cdot s$ so definieren, daß nur diese Komponente berücksichtigt wird, und aus einem Produkt zweier Vektorgrößen eine skalare Größe machen. Genau dies tut das Skalarprodukt: $W = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{s}} = |F||s|\,cos\,\varphi\ = F_{||}|s|$, (wobei φ den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{\boldsymbol{F}}$ und $\vec{\boldsymbol{s}}$ bezeichnet).

2. Die Kraft ist nicht immer konstant über die Strecke s. Wir müssen einen geeigneten Mittelwert finden, um das Produkt von Kraft und Strecke zu berechnen. Dies ist möglich, wenn wir die Strecke s in viele, beliebig kurze differentiellen Teilstrecken $\mathrm{d}s$ aufteilen; in jeder Teilstrecke ist F dann annähernd konstant, es gilt dann: $\mathrm{d}W = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$ für die entsprechende differentielle Arbeit $\mathrm{d}W$. Um die gesamte Arbeit über die Strecke so zu erhalten, müssen wir integrieren (summieren über Teilstrecken):
$$W(s_0) = \int \mathrm{d}W = \int_{s_0} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}\,.$$
Dies ist die allgemeine Definition der Arbeit. Wir schauen nun einige Beispiele an.

»Die Bewegung des großen Steins«

Ein Mensch wird damit beauftragt, einen großen Steinblock von einem Ort zu einem anderen zu bewegen. Er fängt optimistisch an …

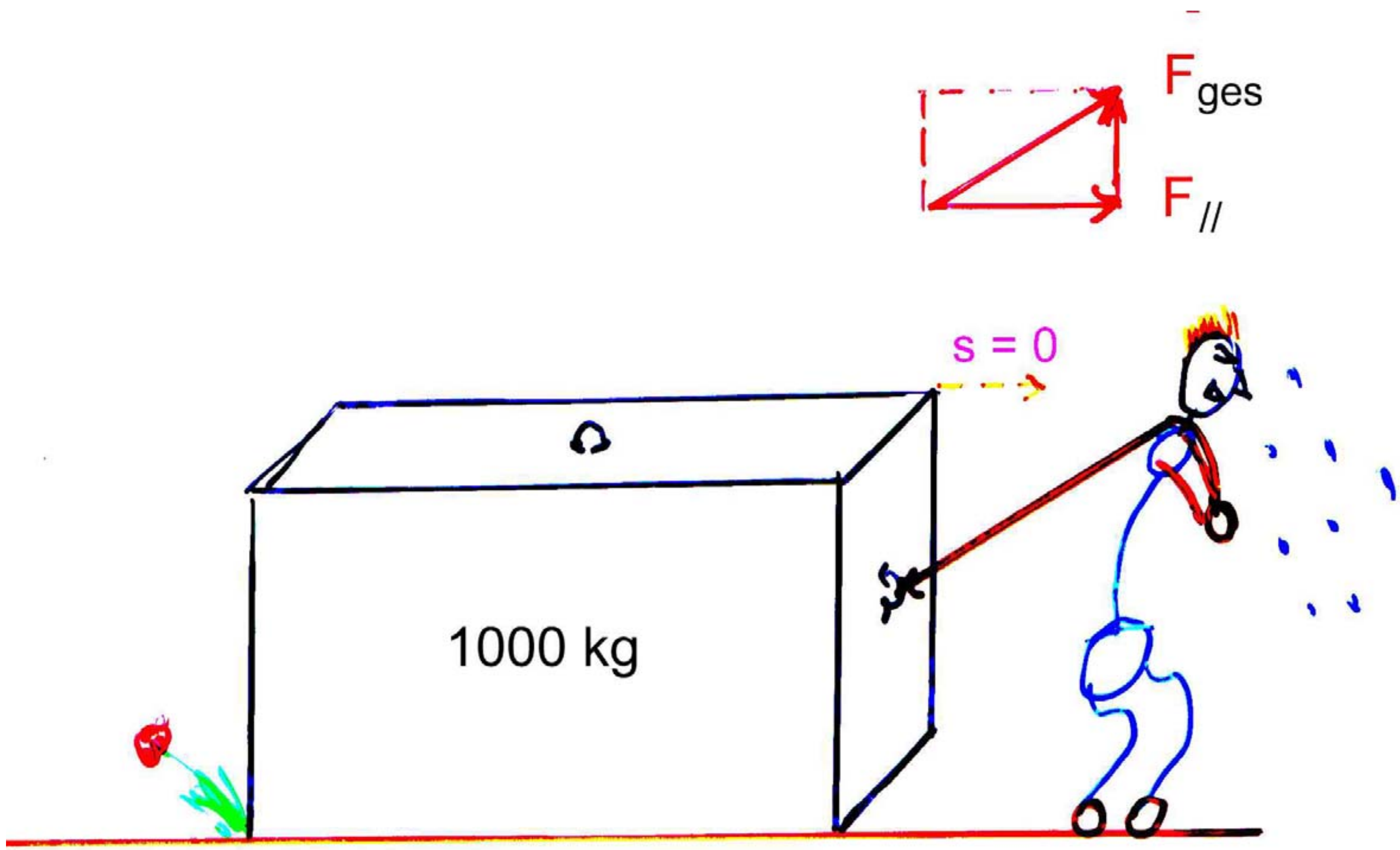


Abbildung 0.1. Tag 1 – die Kraft reicht einfach nicht aus . . . Eine parallele Kraft $F_{||}$ ist da, sie reicht aber nicht aus, die Strecke s bleibt Null. Damit ist die physikalische Arbeit gleich Null; die physiologische Arbeit ungleich Null; und die Lohnarbeit gleich Null

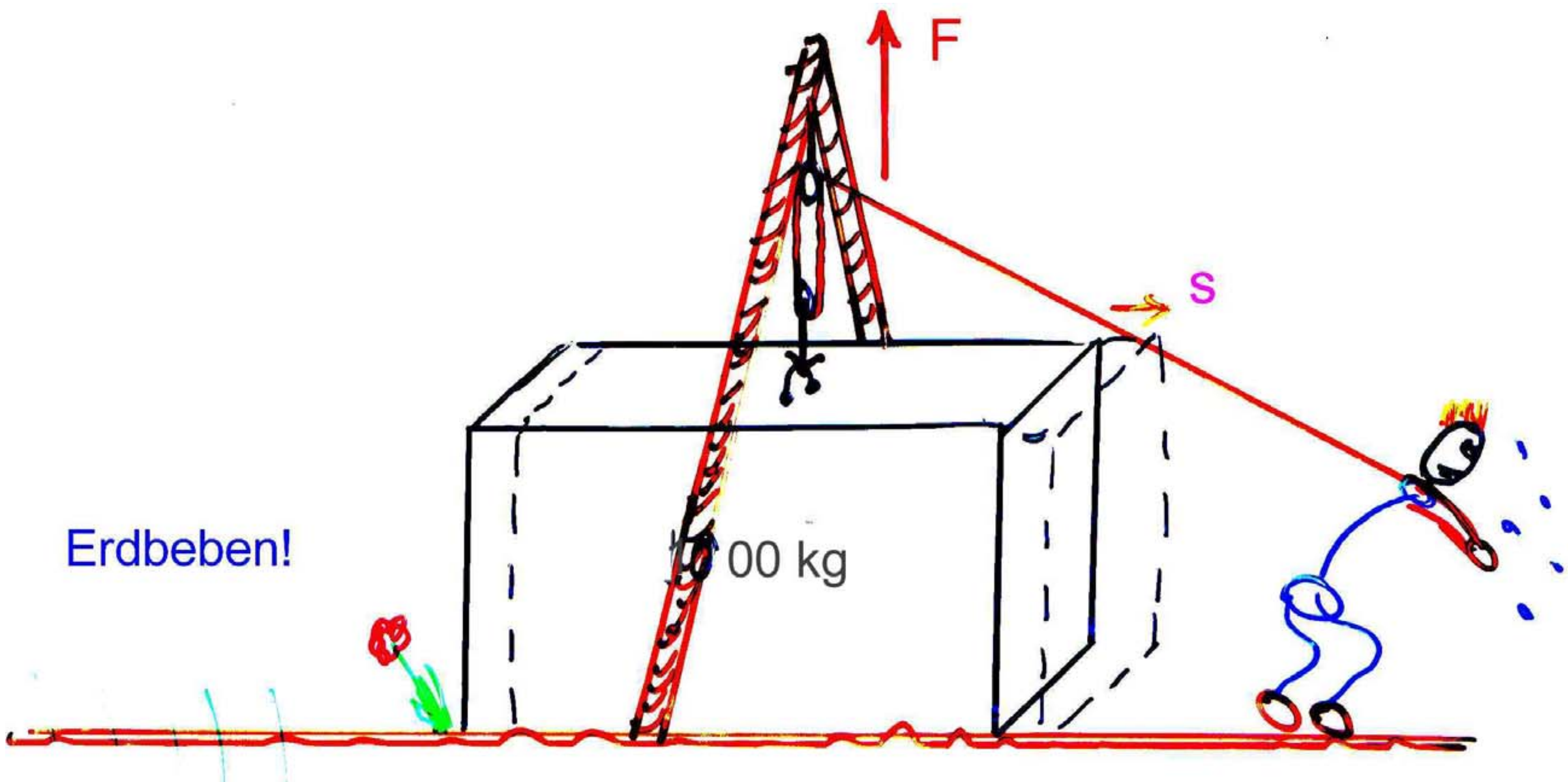


Abbildung 0.2. Tag 2 – ein anderer Versuch (mit Erdbeben...) Eine parallele Kraft $F_{||}$ ist nicht vorhanden. Durch Zufall ergibt sich eine Bewegungsstrecke in der erwünschten Richtung, die aber nicht durch die Arbeit des Menschen zustande kam. Daher ist die physikalische Arbeit gleich Null; die physiologische Arbeit ungleich Null; und die Lohnarbeit ungleich Null (zufällig)

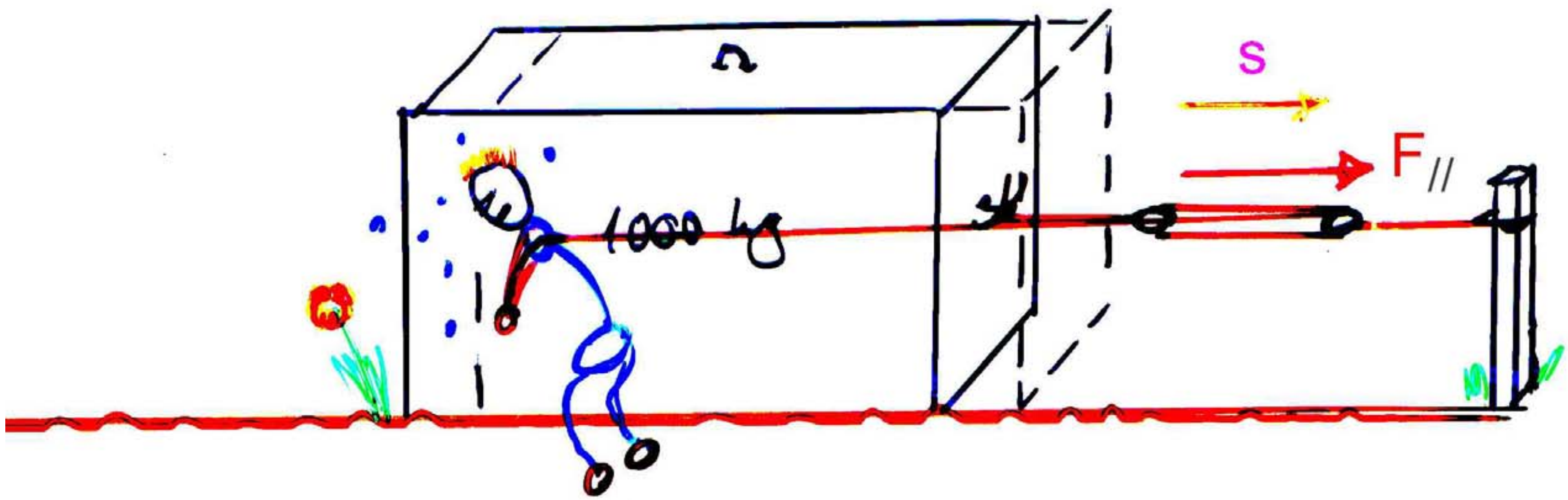


Abbildung 0.3. Tag 3 – endlich der richtige Weg … Eine parallele Kraft $F_{||}$ und eine Bewegungsstrecke sind vorhanden, die Kraft hat die Bewegung (gegen Reibungskräfte) verursacht. Daher ist die physikalische Arbeit ungleich Null; die physiologische Arbeit ungleich Null; und die Lohnarbeit ungleich Null

Drei Arten der mechanischen Arbeit

Es ist hilfreich, die mechanische Arbeit zu **klassifizieren**, je nach den Bedingungen, unter denen sie geleistet wird:

1. **Beschleunigungsarbeit** –der einfachste Fall ist der, daß keine weiteren Kräfte (außer der »äußeren« Kraft $\boldsymbol{F}$) wirken. Dann erzeugt die Kraft $\boldsymbol{F}$ eine Bewegung der Masse m, ausgedrückt durch die Newton'sche Gleichung $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a}$ = Beschleunigung = $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$). Die Beschleunigung (und die Bewegungsstrecke $\boldsymbol{s}$) sind immer parallel zur Kraft $\boldsymbol{F}$. Wir können die (differentielle) Arbeit schreiben als:

   $$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = ma\,\mathrm{d}s = m\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\,\mathrm{d}s = m\,\mathrm{d}v\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = mv\,\mathrm{d}v\,.$$

   Die gesamte Arbeit, für eine Beschleunigung vom Stand ($v = 0$) bis zu einer Endgeschwindigkeit $v = v_0$, ist gegeben durch Integration von $\mathrm{d}W$:

   $$W(0 \to v_0) = \int_0^{v_0} \mathrm{d}W = m\int_0^{v_0} v\,\mathrm{d}v = \frac{m}{2}v_0^2$$

   Beispiel: ein Radfahrer beschleunigt vom Stand bis zur Geschwindigkeit v_0. Danach fährt er mit konstanter Geschwindigkeit weiter (die Reibung sei vernachlässigbar). Er hat die Beschleunigungsarbeit $(m/2)\,v_0^2$ geleistet, wobei m die Gesamtmasse (Rad + Fahrer) ist:

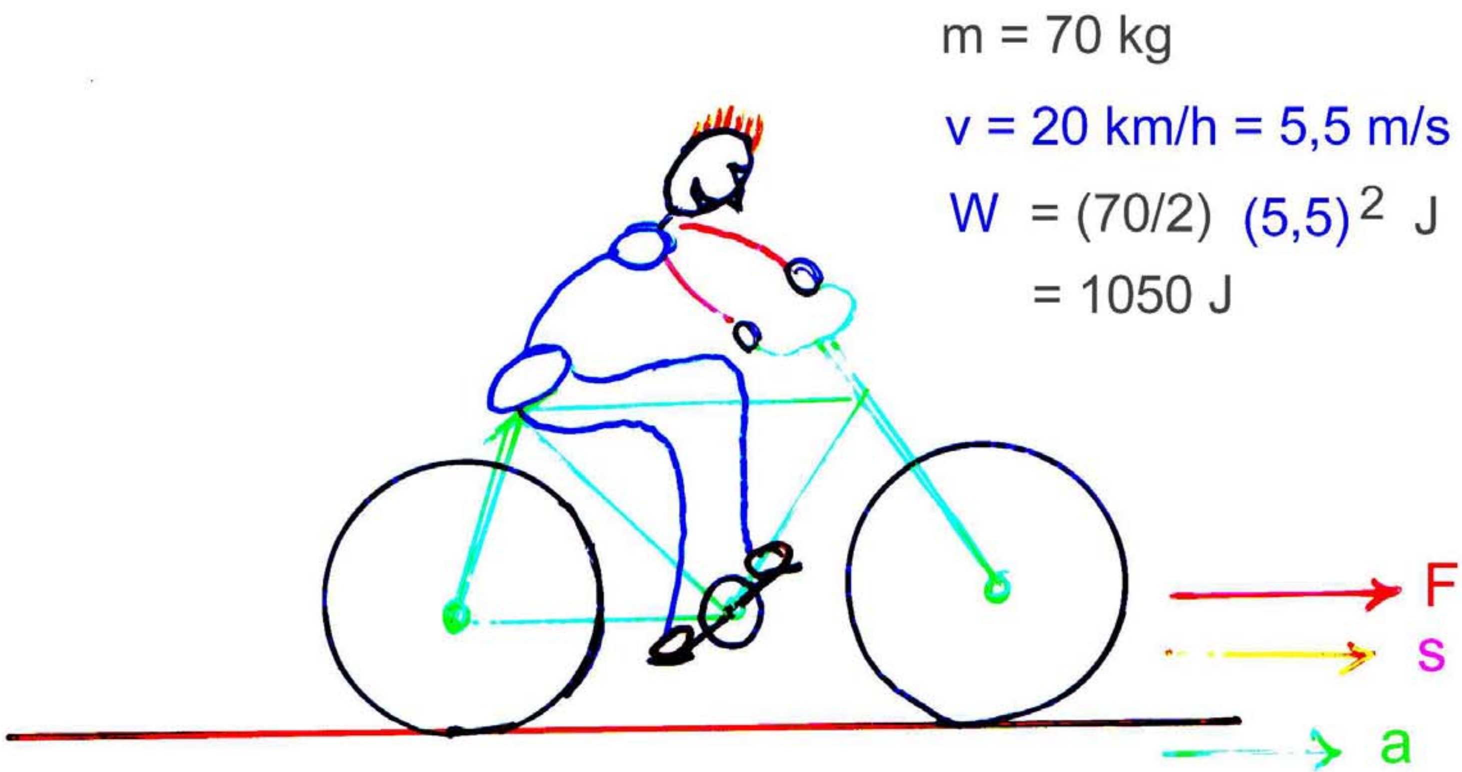


Abbildung 0.4. Zahlenbeispiel: Fahrrad + Fahrer haben eine Gesamtmasse von 70 kg; der Fahrer beschleunigt vom Stand ($v = 0$) bis zur Endgeschwindigkeit $v_0 = 20$ km/h (entsprechend 5,5 m/s). Die geleistete Beschleunigungsarbeit beträgt $\frac{70\,\mathrm{kg}}{2} \cdot (5{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = 1050\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}(\mathrm{J})$

2. **Verschiebungsarbeit** – die externe Kraft $\vec{\boldsymbol{F}}$ wirkt gegen eine Gegenkraft $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}$. Nach dem Arbeitsprozeß kommt das System zum Stillstand, es wird nur wenig Beschleunigungsarbeit geleistet; aber die Lage des Systems ändert sich durch die Arbeit (Verschiebung!), die geleistete Arbeit kann in der **Lage** gespeichert und später wieder freigesetzt werden.

   Beispiele:

   a) ***Hubarbeit*** – die Gegenkraft ist die *Schwerkraft*; z. B. wird ein Gewicht der Masse m um die Höhe h angehoben. Die Schwerkraft $m\boldsymbol{g}$ wirkt senkrecht nach unten ($\boldsymbol{g}$ = Erdbeschleunigung, eine Konstante, die die Stärke der Schwerkraft in der Nähe der Erdoberfläche angibt). Die wirkende Kraft $\boldsymbol{F}$ muß nur geringfügig größer als $m\boldsymbol{g}$ sein, sie wirkt senkrecht nach oben, parallel zur Bewegungsstrecke $\boldsymbol{s}$. Da die Kraft auch konstant ist, können wir die einfache Formel für die Arbeit benutzen:

   $$W(0 \to h) = Fs = mgh\ .$$

   Diese Arbeit ist in der Lage h des Gewichtes gespeichert, sie kann (durch Hinunterlassen des Gewichtes) *wieder freigesetzt* werden. Für ein Gewicht der Masse 1 kg beträgt die Hubarbeit zum Heben um $h = 1\,\mathrm{m}$:

   $$W = mgh = 1\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\,\mathrm{m} = 9{,}81\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 9{,}81\,\mathrm{J}\ .$$

Ähnlich ist es mit dem Radfahrer, wenn er bergauf fährt. Falls der Berg eine konstante Steigung des Winkels α hat, steigt er um die Höhe $h = s\ \sin\alpha$, wenn er die Strecke s zurücklegt. Die Gegenkraft ist die Parallelkomponente der Schwerkraft, $F_{\mathrm{G}||} = mg\sin\alpha$. Da die Kraft konstant ist, können wir für die Arbeit schreiben:

$$W = F_{\mathrm{G}||}s = mgs\sin\alpha = mgh\ ,$$

genau wie für das Heben eines Gewichtes. Diese Hubarbeit wird in der Lage des Fahrrads gespeichert und kann wieder freigesetzt werden (bergab fahren!).

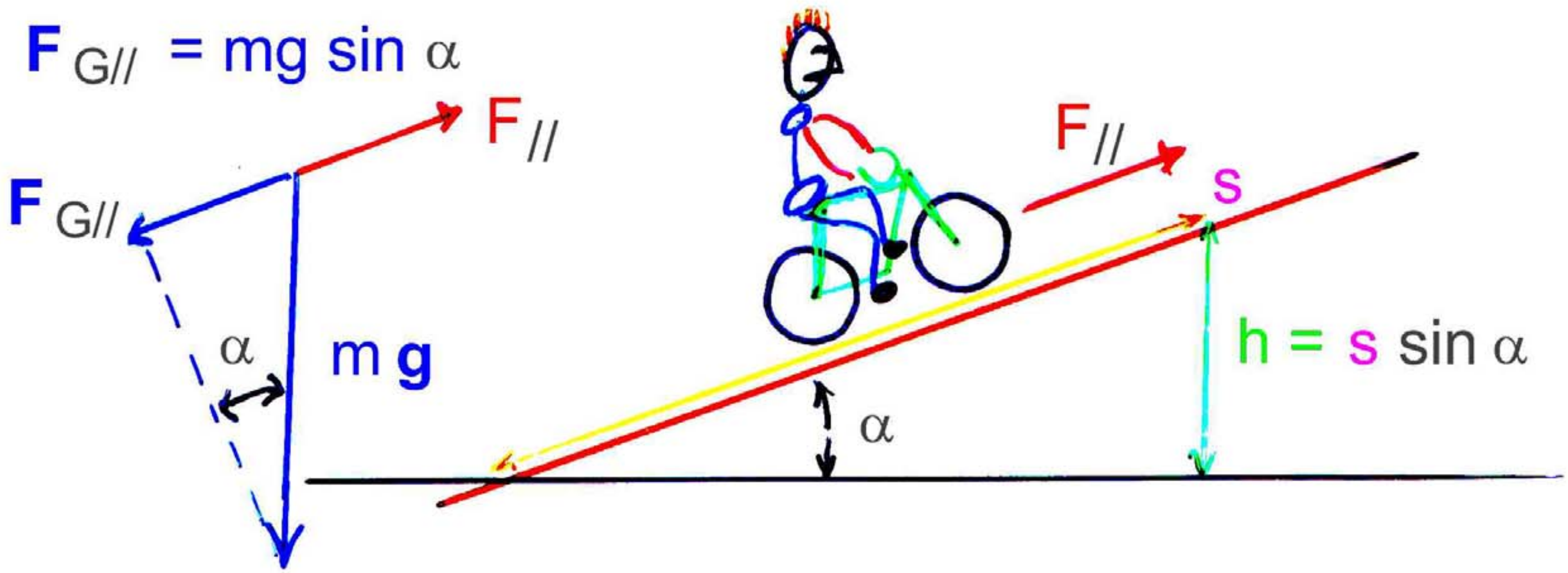


Abbildung 0.5.

b) *Volumenarbeit* – wird ein Gas in einem Zylinder der Querschnittsfläche A unter Druck P gespeichert, muß Arbeit geleistet werden, um es (durch Verschieben eines Kolbens) weiter zu komprimieren. Der Druck erzeugt eine Kraft $F = PA$ senkrecht zum Kolben; die externe Kraft zum Komprimieren muß geringfügig größer sein. Wird dadurch der Kolben um die Strecke $\mathrm{d}s$ hineingedrückt, ist die geleistete Arbeit:

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}s = PA\,\mathrm{d}s = \; -P\,\mathrm{d}V$$

wo $\mathrm{d}V = A\,\mathrm{d}s$ die Volumenänderung ist (Fläche · Länge). Das Minuszeichen kommt daher, daß eine Kompression eine Verkleinerung des Volumens ($\mathrm{d}V$ negativ) aber eine Erhöhung des Druckes bedeutet. Diese Arbeit kann auch gespeichert und wiederbenutzt werden (z. B. Druckluftbremse). [Um die Gesamtarbeit W auszurechnen, müßten wir den Zusammenhang zwischen P und V – die Zustandsgleichung des Gases – kennen; siehe später unter Abschnitt 1 (Wärmelehre).]

c) *elastische Arbeit* – wenn ein elastisches Objekt (z. B. eine Schraubenfeder) verformt wird, reagiert es mit einer Gegenkraft, $\boldsymbol{F}_{\text{el}} = -D\boldsymbol{x}$, wo $\boldsymbol{x}$ die Verformungsstrecke (Auslenkung aus der Ruhelage) und D eine Konstante (»Federkonstante«) sind. Die Auslenkung $\boldsymbol{x}$ ist parallel zur extern wirkenden Kraft $\boldsymbol{F}$, die die Auslenkung erzeugt. Die differentielle Arbeit (Auslenkung um eine geringe Strecke $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$) ist dann:

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = Dx\,\mathrm{d}x$$

und die Gesamtarbeit ist

$$W(x = 0 \to x_0) = \int \mathrm{d}W = D \int_{x_0} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} D\, x_0^2$$

(Integral s. oben!). Diese Arbeit ist in der Feder gespeichert, sie kann beim Entspannen freigesetzt werden.

3. *Reibungsarbeit* – wenn Reibungskräfte überwiegen, dient die externe Kraft F nur, um sie zu überwinden. Es wird weder Beschleunigungsarbeit noch Verscheibungsarbeit geleistet, das System kommt zur Ruhe, sobald die Kraft nicht mehr wirkt, und die ganze geleistete Arbeit geht schließlich in Wärme über. Sie ist meistens nicht im System gespeichert und kann nie (vollständig) wieder in mechanische Arbeit zurückverwandelt werden.
   Beispiel: ein Radfahrer fährt auf ebenem aber schlammigem Boden, die Reibung der Räder mit dem Boden ist groß. Sobald er aufhört zu treten bleibt er stehen. Er gewinnt weder an Höhe noch an Geschwindigkeit, seine Arbeit wird nur verwendet, um die Reibung zu überwinden.

   Zahlenbeispiel: Das menschliche Herz leistet Reibungsarbeit, um das Blut gegen den Strömungswiderstand der Gefäße zu pumpen. Es macht typisch 100 000 Schläge pro Tag und leistet dabei eine Arbeit von ca. 130 000 J. Bei einem 60-jährigen Menschen hat das Herz eine Gesamtarbeit von rund $4{\cdot}10^9$ J geleistet – das würde reichen, um 400 000 l Wasser (400 T!) um 1 000 m hochzuheben.

Die meisten Arbeitsprozesse bestehen aus einer Kombination der o.g. Arten der Arbeit, z. B. aus Hubarbeit, Beschleunigungsarbeit und Reibungsarbeit gleichzeitig. Das Radfahren oder Gehen sind Beispiele dafür.

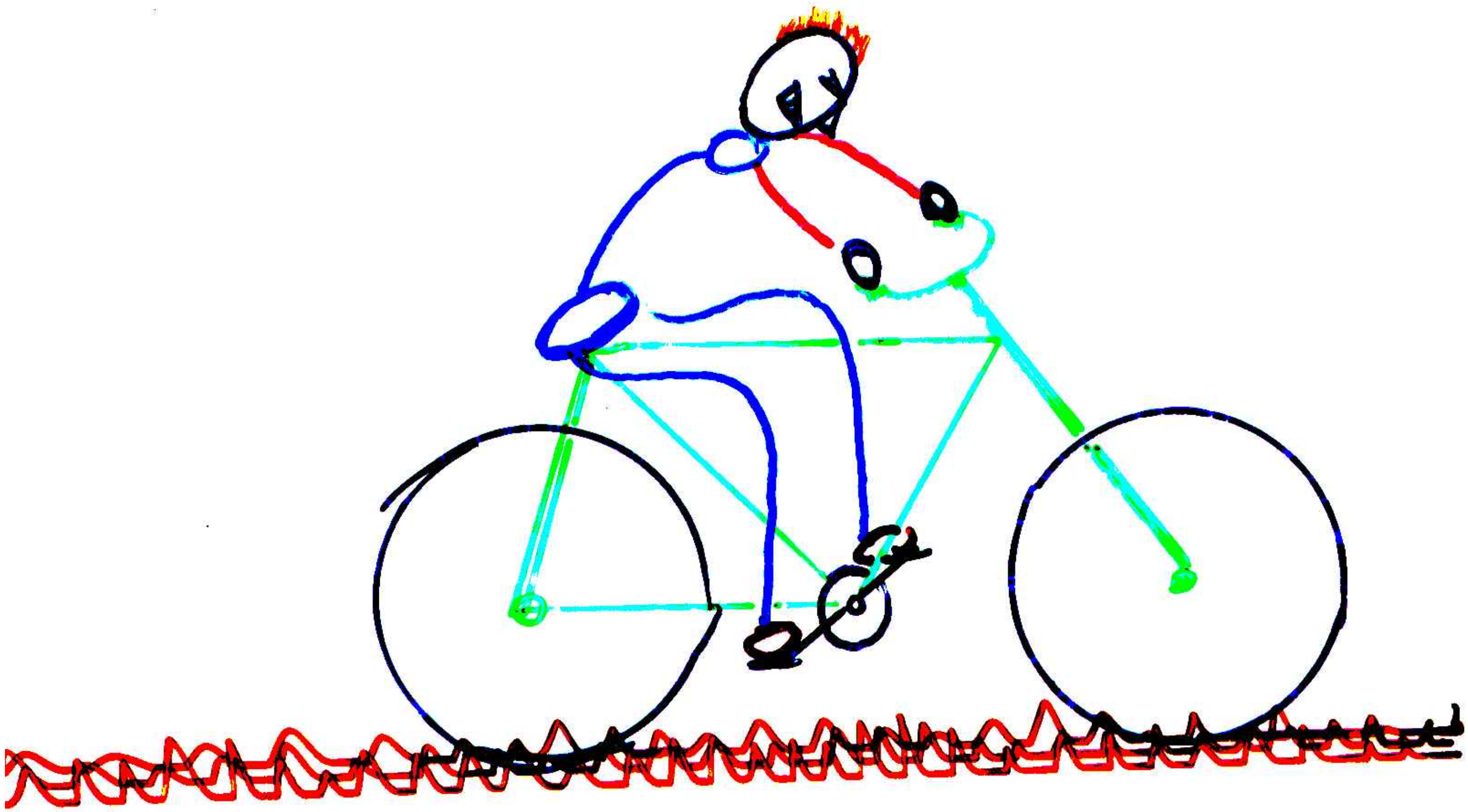


Abbildung 0.6.

Energieformen

Nun kommen wir zur zentralen Größe, zur *Energie*. Wir haben gesehen, daß die Arbeit eine Prozeßgröße ist – sie hängt von dem detaillierten Ablauf des Vorgangs ab.
Aber geleistete Arbeit kann den Zustand des Systems verändern; dieser Zustand hängt dann nicht mehr vom Ablauf ab.
Es ist beispielsweise völlig unerheblich, ob ein Wagen auf der Luftkissenschiene durch schnelles, kräftiges Entspannen einer Feder, durch gleichmäßiges Fallen eines Gewichtes, oder durch die sanfte Kraft eines Luftzuges auf einem kleinen Segel bis zur Endgeschwindigkeit v_0 gebracht wurde – er hat in jedem Fall den gleichen Zustand. Die entsprechende **Zustandsgröße** – die man als *gespeicherte Arbeit* bezeichnen könnte – ist die **Energie**.
Sie enthält weniger Informationen, als die Arbeit, da sie nicht mehr vom Ablauf des Arbeitsprozeßes abhängt. Dafür ist sie allgemein einsetzbar, um einen Zustand zu beschreiben. Sie hat die gleiche Einheit wie die Arbeit, d. h. **J**oule. Entsprechend der drei Arten der Arbeit gibt es verschiedene Typen von Energie:

1. Bewegungsenergie (*kinetische* Energie) ist gespeicherte *Beschleunigungsarbeit*; sie ist gegeben durch (s. oben)
$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2$$
für eine Masse m, die sich mit Geschwindigkeit v bewegt, egal, wie die Masse bis zu dieser Geschwindigkeit beschleunigt wurde.

2. Lageenergie (*potentielle* Energie) ist gespeicherte Verschiebungsarbeit; sie ist gegeben z. B. durch
$$E_{\text{pot}} = mgh$$
für die potentielle Energie eines Gewichtes der Masse m in der Höhe h über der Erdoberfläche; oder durch
$$E_{\text{pot}} = \frac{D}{2}x^2$$
für die elastische Energie einer Feder der Federkonstanten D, die um den Betrag x von ihrer Ruhelage ausgelenkt wurde.

3. Die Energieform, die durch Reibungsarbeit entsteht, ist die ungeordenete mikroskopische Bewegungsenergie, die wir *Wärme* nennen. Sie kann, im Gegensatz zu den rein mechanischen Energieformen, nicht frei und vollständig in andere Energieformen umgewandelt werden.

Es ist bemerkenswert, daß der Nullpunkt der Energie einigermassen willkürlich gewählt werden kann ($v = 0$ hängt vom Bezugssystem ab, Höhe $h = 0$ kann im 1. Stock oder im Keller sein, die Ruhelage einer Feder läßt sich durch eine konstante externe Kraft verschieben).

Energieerhaltung

Der Energieerhaltungssatz (»Energie-Satz«) Dies ist ein Erfahrungssatz, der erst in der Mitte des 19. Jh. formuliert wurde. Er besagt, daß man Energie weder erzeugen noch vernichten kann, nur umverteilen bzw. in andere, äquivalente Energieformen umwandeln kann. Eine Formulierung lautet:

> In einem abgeschlossenen System (keine Kräfte wirken von oder nach außen) bleibt die Summe aller Energieformen konstant.

Diese rein mechanische Aussage wird in der Wärmelehre ergänzt durch die Einbeziehung der Wärme als weitere Möglichkeit, die Energie eines Systems zu verändern. Die makroskopisch übertragene Wärme $\mathrm{d}Q$ ist, wie die Arbeit, eine Prozeßgröße; beide können zu einer Änderung der Energie (»inneren Energie« U) eines Systems beitragen. Dies nennt man den 1. Hauptsatz der Wärmelehre; mehr dazu später.

Leistung

Die Leistung ist eine vergleichsweise einfache Größe: sie gibt an, wie schnell Arbeit geleistet wird. Wenn die Rate konstant ist, kann man sie einfach definieren als:

$$P = \frac{W_{\text{ges}}}{t_0}$$

wo W_{ges} die gesamte in der Zeit t_0 geleistete Arbeit ist. Ihre Einheit ist J/s oder **W**att:

$$1\,\mathrm{W} \equiv 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}}$$

Falls die Rate, mit der die Arbeit geleistet wird, nicht konstant ist (dies ist der übliche Fall), muß man die momentane Leistung $P(t)$ verwenden:

$$P(t) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t},$$

wobei die in der Zeit t_0 geleistete Gesamtarbeit durch Integration über die Zeit zu berechnen ist:

$$W_{\text{ges}} = \int_{t_0} P(t)\,\mathrm{d}t$$

Die momentane Leistung bei einer Bewegung mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, verursacht durch eine Kraft $\boldsymbol{F}$, ist gegeben durch:

$$P(t) = \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{v}(t)\ .$$

Dynamik der geradlinigen Bewegung

Newton'sche Axiome

Newton, bauend auf die Ergebnisse Galileis, stellte drei Axiome auf, welche die Dynamik von Bewegungen allgemein und insbesondere der geradlinigen Bewegung beschreiben:

Trägheitsprinzip ein (massives) Objekt, worauf keine Kräfte wirken, beharrt in seinem jeweiligen Zustand der geradlinigen, gleichförmigen Bewegung.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = const \quad \vec{p}\, ist\, der\, Impuls;\ Einheit:\ kg\frac{m}{s}.$$

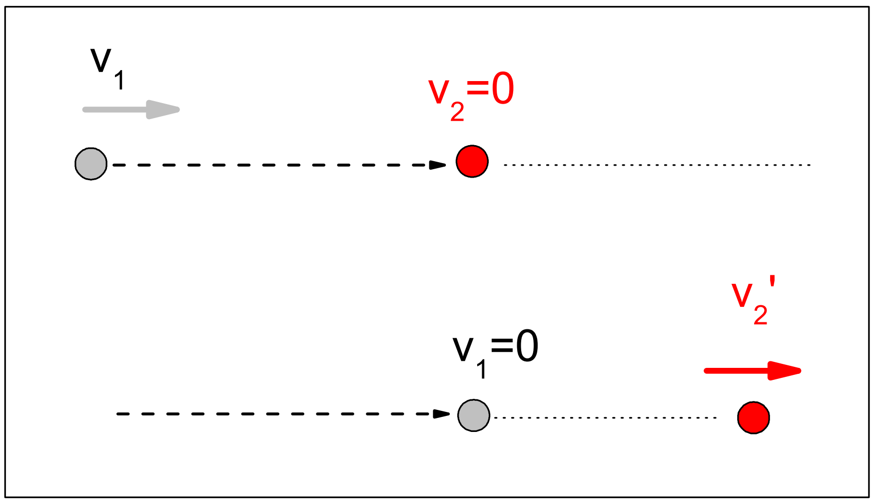
Impulserhaltungssatz

In einem abgeschlossenen (mechanischen) System (keine Kräfte wirken von oder nach außen) bleibt der Gesamtimpuls (Vektorsumme aller einzelnen Impulse) konstant.

Anders gesagt: in einem abgeschlossenen System kann Impuls weder erzeugt noch vernichtet werden.

Man kann die Impulserhaltung – zusammen mit der Energieerhaltung – verwenden, um Stoß-und Streuprozesse aller Art zu beschreiben. Impulserhaltung ist für das Funktionieren von Reaktionsmotoren (Düsenantrieb, Raketen) verantwortlich und spielt (meistens unbemerkt) im täglichen Leben eine entscheidende Rolle. [Impulserhaltung: Versuche– Impulsübertragung am Wagen; Rakete; Stöße auf der Luftkissenbahn; elastische und inelastische Stöße.]

Abbildung 0.7. Zentraler ideal elastischer Stoss



Zentraler ideal elastischer Stoß:

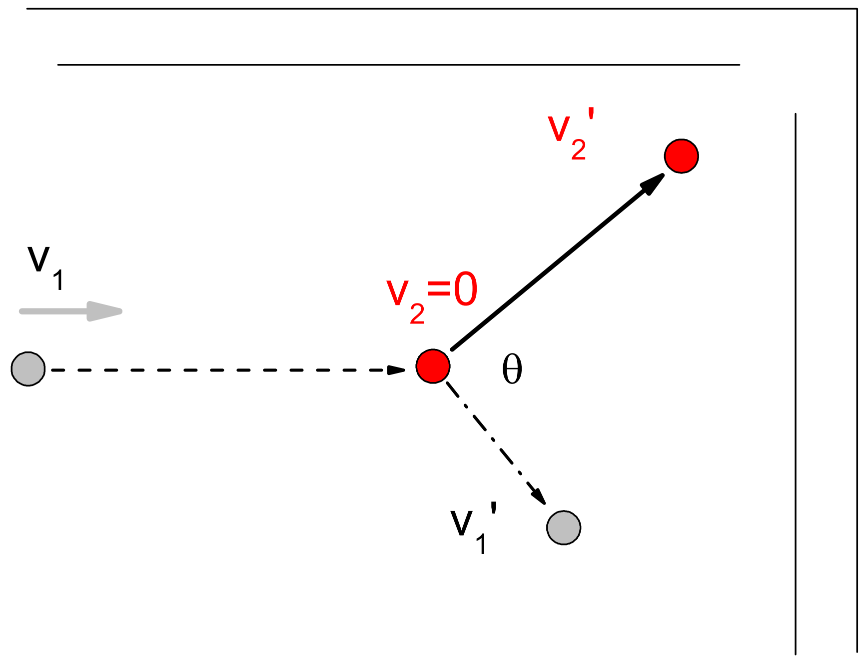
Anfangsbedingung: v_1 mit Masse m_1 in x-Richtung; $v_2 = 0\,m/s$ mit Masse m_2.

$$\begin{aligned} p_1 = p_1' + p_2' \quad & Impulserhaltung \\ \frac{1}{2m_1}p_1^2 = \frac{1}{2m_1}p_1'^2 + \frac{1}{2m_2}p_2'^2 \quad & Energieerhaltung \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_1' &= p_1 - p_2' \\ \Rightarrow p_1'^2 &= p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1p_2' \\ \Rightarrow \frac{1}{2m_1}p_1^2 &= \frac{1}{2m_1}(p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1p_2) + \frac{1}{2m_2}p_2'^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{m_1}p_1p_1' &= p_2'^2(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_2' = p_1\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \\ \Rightarrow p_1' = p_1\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Abbildung 0.8. Ideal elastischer Stoss



Bei gleichen Massen $m_1 = m_2$, $v_2 = 0\,m/s$ und ideal elastischem Stoß (nicht zentral) gilt:

$$\vec{p_1} = \vec{p_1'} + \vec{p_2'} \quad Impulserhaltung$$
$$\frac{1}{2m_1}p_1^2 = \frac{1}{2m_1}p_1'^2 + \frac{1}{2m_2}p_2'^2 \quad Energieerhaltung$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow p_1^2 &= p_1'^2 + p_2'^2 \quad da\ m_1 = m_2 \\
\Rightarrow p_1^2 &= p_1'^2 + p_2'^2 + 2\vec{p_1'} \bullet \vec{p_2'} \\
\Rightarrow 2\vec{p_1'} \bullet \vec{p_2'} &= 0
\end{aligned}
$$

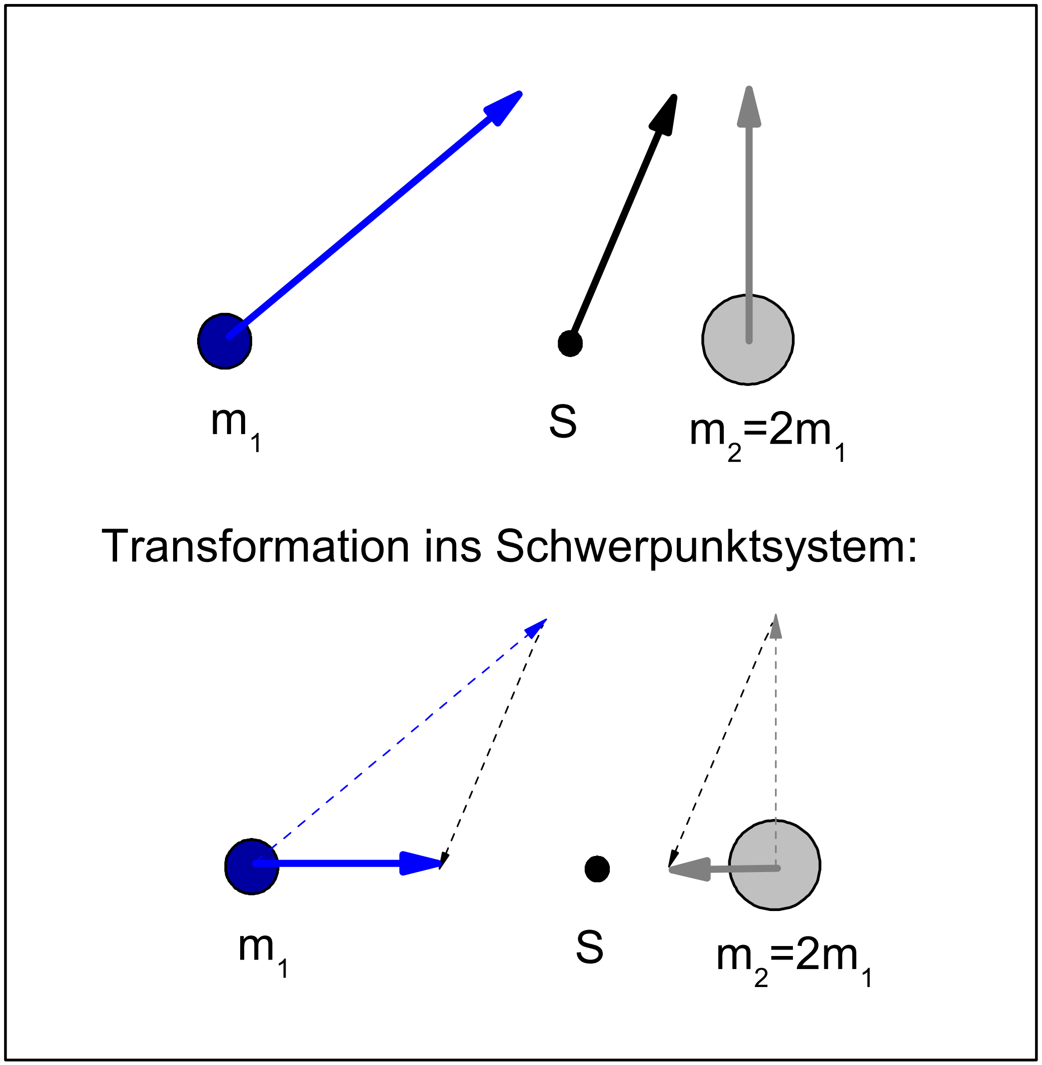
Also gilt: Stossen zwei gleichen Massen ideal elastisch, wovon eine vorher ruhte, so bewegen sie sich unter einem Winkel von 90 oder 270 Grad zueinander weiter oder aber eine ruht nach dem Stoss.

Das Null-Impuls-Bezugssystem

Betrachten wir zwei oder mehrere Körper die sich gegeneinander bewegen, so ist es oft sinnvoll ein Koordinatensystem zu wählen, in dem der Gesamtimpuls Null ist. Dies erhält man, indem von jedem Körper die Geschwindigkeit des Schwerpunktes aller betrachteten Körper $\vec{v_S}$ abzieht:

$$
\vec{v_S} = \frac{\vec{p_{ges}}}{m_{ges}} = \frac{\sum_i (m_i v_i)}{\sum_i (m_i)} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}
$$

Nun kann man den Koordinatenursprung z.B. in den Schwerpunkt oder einen der Körper legen und z.B. den Stossprozess berechnen. Am Ende muss das System wieder in das ursprüngliche zurückversetzt werden, indem $\vec{v_S}$ wieder zu allen Geschwindigkeiten dazu addiert wird. Das nennt man auch eine **Transformation von Bezugssystemen**.


m1
S
m2=2m1
Transformation ins Schwerpunktsystem:
m1
S
m2=2m1

Bezugssysteme

Im Beobachtungssystem eines **Beobachters A** (z.B. ein im fahrenden Zug stehender Schaffner) bleibt ein ruhender Gegenstand (z.B. ein schlafender Fahrgast), auf den keine äußeren Kräfte wirken, nach dem ersten Newtonschen Axiom in Ruhe. Ein zweiter **Beobachters B**, der sich in einem Beobachtungssystem befindet, welches sich relativ zum ersten Beobachtungssystem mit **konstanter Geschwindigkeit** $\vec{\boldsymbol{v}}$ bewegt (z.B. ein Zeitungsverkäufer auf dem Bahnsteig), gilt ebenfalls das erste Newtonsche Axiom für den Fahrgast und Schaffner, da der Impuls, bzw. die Geschwindigkeit konstant bleibt.

Bewegt sich B **nicht** mehr mit **konstanter Geschwindigkeit**, sondern beschleunigt er, so wird es für B so aussehen, als würden Fahrgast und Schaffner beschleunigt, obwohl keine äußeren Kräfte wirken. Hier **gilt das erste Newtonsche Axiom** offensichtlich **nicht** mehr.

Bezugssysteme, in denen das erste Newtonsche Axiom gültig ist heissen **Inertialsysteme**.

Beschleunigte Bezugssysteme:

In beschleunigten Bezugssystem werden zusätzliche Kräfte beobachtet.

Die Person im aufwärts beschleunigten Fahrstuhl erfährt zur Erdbeschleunigung g zusätzlich die Aufwärtsbeschleunigung a. Die Waage, auf der die Person im Fahrstuhl steht, zeigt dann eine Normalkraft F_N die gegeben ist durch:

$$\vec{F_N} = m \cdot \vec{g} + m \cdot \vec{a} \Rightarrow F_N = m(g + a)$$

Im abwärts beschleunigten Fahrstuhl erfährt der Fahrgast die Abwärtsbeschleunigung a'. Damit ist die Normalkraft F_N:

$$\vec{F_N} = m \cdot \vec{g} + m \cdot \vec{a'} \Rightarrow F_N = m(g - a')$$

Rotierendes Bezugssystem

Ruhende Körper erfahren in einem rotierenden Bezugssystem ständig eine Kraft, die dafür sorgt, dass der Körper in der Rotationsbewegung bleibt. Diese Kraft heisst **Zentripetalkraft**. Setzt die Zentripetalkraft schlagartig aus, dann bewegen sich die Körper nach dem ersten Newtonschen Gesetz geradlinig und gleichförmig weiter.

Die Zentripetalkraft für einen Massenpunkt m, der im Kreis mit dem Radius r bewegt wird gilt:

$$\vec{F_{Zp}} = -m \cdot \vec{a_{Zp}} = -m \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v_B}] = -m\frac{v_B^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$$

Hierbei zeigt die Zentripetalbeschleunigung $\vec{a_{Zp}}$ immer zum Kreismittelpunkt (daher zentripetal) und ist $\vec{r}$ entgegengerichtet. Die Richtung der Bahngeschwindigkeit ändert sich stetig aufgrund der Zentripetalkraft. Die Kreisbewegung wird deshalb durch die Winkelgeschwindigkeit ω beschrieben:

$$\omega\vec{(t)} = \frac{Drehwinkel\ddot{a}nderung}{Zeit\ddot{a}nderung} = \frac{d\phi\vec{(t)}}{dt}$$

Verläuft die Drehung im Antiuhrzeigersinn, so ist die Winkelgeschwindigkeit positiv, verläuft sie im Uhrzeigersinn, so ist sie negativ. Der Richtungsvektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist parallel zur Drehachse.

Das Aktionsprinzip oder die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

kann als Definition der Kraft angesehen werden (»wenn eine Masse m eine Beschleunigung a erfährt, wirkt auf sie eine Kraft F nach $F = ma$«).
Sie ist eine Differentialgleichung ($a(t) = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$ zweifache zeitliche Ableitung vom Ort s), die eine Bewegung mathematisch beschreibt.
Die Lösungen der Bewegungsgleichung erhalten wir durch Integration; in zwei Fällen ist das sehr einfach:

1. die Kraft $\boldsymbol{F}$ ist gleich Null, $\boldsymbol{F} = 0$. Dann ist die Geschwindigkeit konstant, $v = v_0$ (Trägheitsgesetz!), wir brauchen nur einmal zu integrieren:

   $$x(t) = v_0\, t + x(0).$$

   Die Konstante $x(0)$ (Anfangsort) ist eine Integrationskonstante.

2. die Kraft $\boldsymbol{F}$ ist konstant, z. B. gleich der Schwerkraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$. Dann ist auch die Beschleunigung konstant, wir haben:

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\boldsymbol{F}_\mathrm{G}}{m}\right) = \boldsymbol{g} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}$$

und zweimaliges Integrieren ergibt:

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{\boldsymbol{g}}{2}t^2 + \boldsymbol{v}(0)t + \boldsymbol{x}(0)$$

(freier Fall). Hier erhalten wir zwei Integrationskonstanten, $\boldsymbol{v}(0)$ (Anfangsgeschwindigkeit) und $\boldsymbol{x}(0)$ (Anfangsort).

Bei Stoßprozessen (z. B. Schlagen eines Tennisballs durch den Schläger, Stößen von Billardkugeln) benutzt man den sogenannten Kraftstoß, um den Vorgang zu beschreiben:

$$\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \mathrm{d}(m\boldsymbol{v}) = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

(momentan; letzte Gleichung gilt, wenn m konstant ist), oder (für den gesamten Vorgang):

$$\int \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{p}(0)$$

(Kraftstoß = Impulsänderung). Dies ist nützlich, weil man meistens nicht die Einzelheiten der Kraftwirkung als Funktion der Zeit, $\boldsymbol{F}(t)$, kennt, aber die *Impulsänderung* leicht messen kann.

Wie ist es aber, wenn die **Masse** m **nicht zeitlich konstant** ist?
Beispiele sind: ein fliegendes Flugzeug oder eine Rakete (die Masse nimmt während des Fluges wegen Treibstoffverbrauch ständig ab) oder ein Teilchen, das zu hoher Geschwindigkeit beschleunigt wurde (Massenzunahme aufgrund der relativistischen Beziehung $E = mc^2$). In solchen Fällen muß man die Zeitabhängigkeit der Masse berücksichtigen, indem man sie in die Zeitableitung hineinnimmt:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}\ .$$

d. h. die Kraft ist die *zeitliche Änderung des Impulses*.

Eine Rakete, die kontinuierlich Masse (z.B. Gas) mit der Geschwindigkeit $\vec{v_A}$ nach hinten ausstösst wird beschleunigt. Dabei ändert sich die Masse der Rakete. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{dm \cdot v(\vec{t})}{dt} + \frac{dp_{\vec{Gas}}}{dt} &= 0 \\
m\frac{dv(\vec{t})}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} + v_{\vec{Gas}}\frac{dm_{Gas}(t)}{dt} &= 0 \\
m\frac{dv(\vec{t})}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} - v_{\vec{Gas}}\frac{dm}{dt} &= 0 \\
m\frac{dv(\vec{t})}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} - (\vec{v} + \vec{v_A})\frac{dm}{dt} &= 0 \\
\Rightarrow m\frac{dv(\vec{t})}{dt} = \vec{v_A}\frac{dm}{dt} &= \vec{F_S} \\
m\frac{dv(\vec{t})}{dt} + \vec{v_A}\frac{dm}{dt} &= \vec{F_{ext}}\,; \quad \textit{Raketengleichung}
\end{aligned}$$

Die Lösung der Raketengleichung für konstante Ausströmgeschwindigkeit $\vec{v_A}$ des Treibmittels, konstanter externer Gewichtskraft $\vec{F_{ext}} = m\vec{g}$, Anfangsmasse m_0 und Anfangsgeschwindigkeit $v(t = 0) = 0\,m/s$ lautet:

$$v(\vec{t}) = \vec{v_A} \cdot \ln \frac{m_0}{m(t)} - gt$$

Trägheitskräfte

Wir können die Newton'sche Gleichung auch in einer weiteren Weise interpretieren, als Kräftebilanz (*actio = reactio*): jede wirkende Kraft $\boldsymbol{F}$ ruft eine gleich große, engegengerichtete **Reaktionskraft** hervor. Bei einem Objekt der Masse m ist dies die Trägheitskraft $-m\boldsymbol{a}$, die jeder Änderung des Bewegungszustandes (Beschleunigung) widerstrebt.

Wie wir gesehen haben, ist bei der **ebenen Kreisbewegung** ständig eine Beschleunigung vorhanden (Zentripetalbeschleunigung), selbst wenn der *Betrag* der Bahngeschwindigkeit konstant bleibt. Diese Beschleunigung wird durch eine Kraft (**Zentripetalkraft**) hervorgerufen, sie erzeugt eine (gleich große, entgegengerichtete) Reaktionskraft (hier: Trägheitskraft), nämlich die **Zentrifugalkraft** oder Fliehkraft. Diese Kraft ist die Reaktion des massiven Objektes, welches aufgrund seiner Trägheit einfach geradeaus weiterfliegen würde (Trägheitsgesetz), jedoch durch die Zentripetalkraft gezwungen wird, auf der Kreisbahn zu bleiben. Die Zentrifugalkraft ist nach außen gerichtet (vom Mittelpunkt der Kreisbahn weg), sie ist gegeben durch :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\mathrm{Zf}} &= \text{Masse} \cdot (-)\text{Zentripetalbeschleunigung} \\
&= -m\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{Zp}} = m\,\omega^2\,\boldsymbol{r} \equiv \frac{mv^2}{r}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)
\end{aligned}$$

Kinematik der ebenen Kreisbewegung

Hier ist es sinnvoll, neben den linearen Größen s, v, a (die als Bahnstrecke s_B, Bahngeschwindigkeit v_B bzw. Bahnbeschleunigung a_B auftreten), auch *Winkel*größen zu verwenden: Bewegungswinkel φ [rad], Winkelgeschwindigkeit ω [rad/s], sowie Winkelbeschleunigung α [rad/s^2].

Tabelle 0.1. Kinematik der ebenen Kreisbewegung

Winkelgröße	lineare Größe	Verknüpfung
$\varphi(t)$ = Drehwinkel	s_B = Kreisbogen (Strecke auf der Bahn)	$s_\mathrm{B} = \|\varphi\|\|r\|$, $\varphi = s_\mathrm{B}/r$ r = Radius = konst.
$\omega(t)$ = Winkelgeschwindigkeit $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$	v_B = Bahn-oder Tangentialgeschw. $v_\mathrm{B} = \mathrm{d}s_\mathrm{B}/\mathrm{d}t$	$\|v_\mathrm{B}\| = \|\omega\|\|r\|, \omega = v_\mathrm{B}/r$ (vektoriell: $v_\mathrm{B} = \omega \times r$)
$\alpha(t)$ = Winkelbeschleunigung $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2$	a_B = Bahn-oder Tangentialbeschl. $a_\mathrm{B} = \mathrm{d}v_\mathrm{B}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2 s_\mathrm{B}/\mathrm{d}t^2$ Betragsänderung von v_B	$\|a_\mathrm{B}\| = \|\alpha\|\|r\|, \alpha = a_\mathrm{B}/r$ (vektoriell: $a_\mathrm{B} = \alpha \times r$)

Auch **ohne Winkelbeschleunigung** gibt es eine *Zentripetalbeschleunigung* a_{Zp}:

$$a_{\mathrm{Zp}} = |v_{\mathrm{B}}| \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

aufgrund der ständigen *Richtungs*änderung von $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$. Sie ist im Betrag gegeben durch:

$$|a_{\mathrm{Zp}}| = \frac{v_{\mathrm{B}}^2}{r} = \omega^2\, r$$

und zeigt immer zum Kreismittelpunkt hin ($\boldsymbol{a}_{\mathrm{Zp}} \parallel -\boldsymbol{r}$, daher »zentripetal«).

Zusammenfassung – Kinematik der ebenen Kreisbewegung

Bewegungsgleichungen und Lösungen

- gleichförmig:

$$\omega(t) = \omega_0; \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega_0;$$

  Lösung:

$$\varphi(t) = \omega_0\, t + \varphi(0) \quad \text{oder} \quad s_{\mathrm{B}}(t) = v_{B0}\, t + s_{\mathrm{B}}(0)$$

- gleichmäßig beschleunigt:

$$\alpha(t) = \alpha_0; \qquad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \alpha_0;$$

  Lösung:

$$\varphi(t) = \left(\frac{\alpha_0}{2}\right) t^2 + \omega(0)\, t + \varphi(0)$$

Analogie Translation (geradlinige Bewegung) und Rotation (Drehbewegung)

Tabelle 0.2. Größen und Einheiten für die Translation (links) und die Rotation (rechts).

Größe	Einheit	Größe	Einheit
Weg s, ds	m	Winkel φ, $d\varphi$	Radiant (rad)
Geschwindigkeit $v = ds/dt$	m/s	Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\varphi/dt$	rad/s = 1/s
Beschleunigung $a = dv/dt = d^2s/dt^2$	$\mathrm{m/s^2}$	Winkelbeschleunigung $a = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$	$\mathrm{rad/s^2 = 1/s^2}$
Masse (Trägheit) m	kg	(Massen)Trägheitsmoment $\Theta = \Sigma\, mr^2$	$\mathrm{kg\ m^2}$
Kraft $F = ma = dp/dt$	$\mathrm{N = kg\ m/s^2}$	Drehmoment $M = \Theta\alpha = dL/dt$	$\mathrm{Nm = kg\ m^2/s^2}$
(Linear-)Impuls $p = mv$	kg m/s	Drehimpuls $L = \Theta\omega$	$\mathrm{kg\ m^2/s = Nms}$
Arbeit $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$	J = N m	Arbeit $dW = \mathbf{M} \cot d\varphi$	J = N m
kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}} = (m/2)v^2$	$\mathrm{J= kg(m/s)^2}$	Rotationsenergie $E_{\mathrm{rot}} = (\Theta/2)\omega^2$	$\mathrm{J = (kgm^2)/s^2}$
Leistung $P = dW/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$	W = J/s	Leistung $P = dW/dt = \mathbf{M} \cdot \omega$	W = J/s
Kraftkonstante $D = \lvert F/s \rvert$	N/m	Winkel-richtmoment $D* = \lvert M/\varphi \rvert$	Nm
Spannarbeit $W = (D/2)s^2$	Nm = J	Spannarbeit $W = (D^*/2)\varphi^2$	Nm = J

Dynamik der ebenen Kreisbewegung

Eine Kreis- oder Rotationsbewegung entsteht, wenn ein *Drehmoment*

$$\boldsymbol{M} = \text{Kraftarm} \times \text{Kraft} = \boldsymbol{r}\boldsymbol{F}$$

um den Aufhängungspunkt des Kraftarms $\boldsymbol{r}$ (von der Drehachse) wirkt; die Einheit des Drehmoments $\boldsymbol{M}$ ist Nm oder $\mathrm{kg\,m^2/s^2}$. Um den vektoriellen Charakter von $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{M}$ auszudrücken und die Richtungsabhängigkeit von $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{r}$ zu berücksichtigen, verwenden wir das *Vektorprodukt*:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

wobei $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ bedeutet: »$\boldsymbol{C}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ steht und den Betrag $|C| = |A|\,|B| \sin\vartheta$ besitzt, mit $\vartheta =$ Winkel zwischen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$«. Die Richtung von $\boldsymbol{M}$ ist also parallel zur Drehachse.

Um komplizierte Bewegung im Gravitationsfeld der Erde in Drehbewegung und translatorische Bewegung zu zerlegen, definiert man den Schwerpunkt x_S des Systems:

$$x_S = \sum_i \frac{m_i \cdot x_i}{m_{ges}}$$

Der Schwerpunkt ist der Punkt, an dem die Gewichtskraft, die auf den Körper wirkt zum Drehmoment Null führt. Damit ist die Schwerpunktsbewegung eine reine translatorische Bewegung.

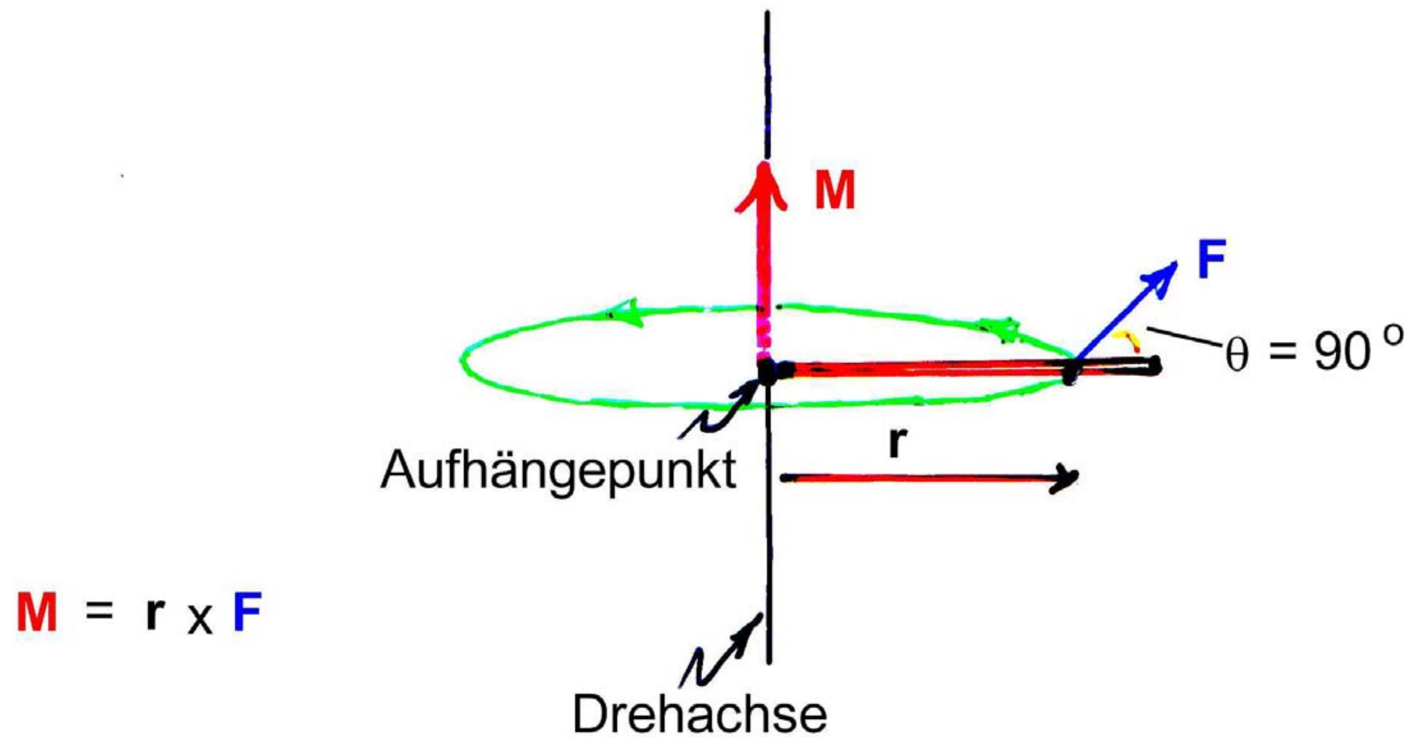
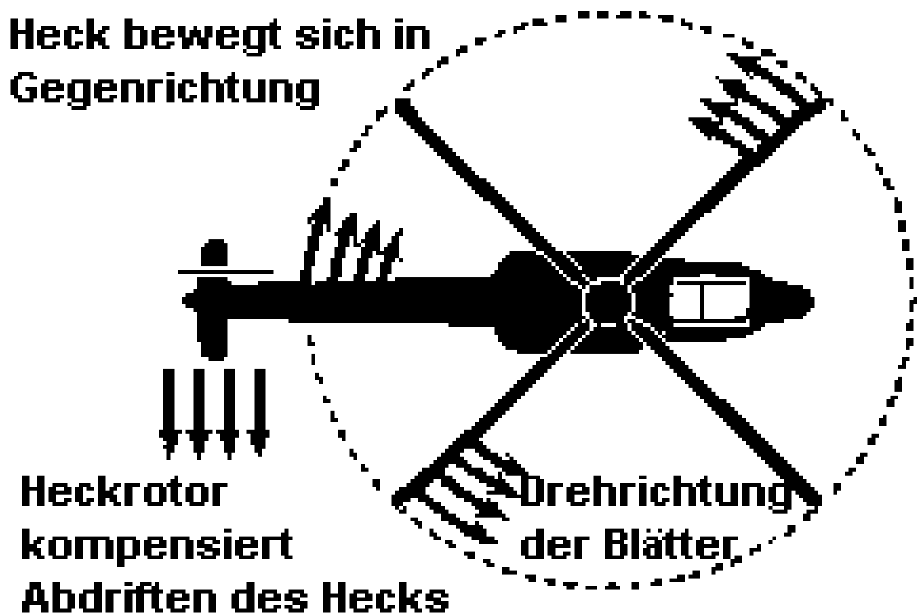


Abbildung 0.9. Rechte-Hand-Regel: (hier abgebildet für den speziellen Fall, daß die Kraft $\boldsymbol{F}$ senkrecht zum Kraftarm $\boldsymbol{r}$ steht, d. h. $\vartheta = 90\,^\circ$)

Newton'sche Axiome für die Drehbewegung

Trägheitsprinzip	ein (massives) Objekt, worauf keine Drehmomente wirken, beharrt in seinem jeweiligen Zustand der gleichförmigen Drehbewegung.
Aktionsprinzip	wenn ein Drehmoment $\boldsymbol{M}$ auf ein Objekt wirkt, erzeugt es eine Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}$ (rad/s^2), nach der Bewegungsgleichung $$\boldsymbol{M} = \Theta\,\boldsymbol{\alpha}$$ Hierbei ist Θ das Trägheitsmoment des Objektes. Aus den Einheiten der obigen Bewegungsgleichung sieht man, daß Θ die Einheit $\mathrm{N\,m\,s^2} = \mathrm{kg\,m^2}$ haben muß. Für eine Punktmasse m im Abstand r von der Drehachse gilt $$\Theta = m\,r^2$$
actio = reactio	ein wirkendes Drehmoment $\boldsymbol{M}$ ruft immer ein gleich großes, entgegengerichtetes Gegenmoment (Reaktionsmoment) $$\boldsymbol{M}_\mathrm{R} = -\boldsymbol{M}$$ hervor (z. B. Gegendrehung eines Hubschraubers).


Heck bewegt sich in
Gegenrichtung
Heckrotor
kompensiert
Abdriften des Hecks
Drehrichtung
der Blätter

Der Drehimpuls

Die Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{M} = \Theta\,\boldsymbol{\alpha}$$

für die Drehbewegung kann genau analog zur Newton'schen Gleichung für eine lineare Bewegung durch 2-maliges Integrieren gelöst werden.

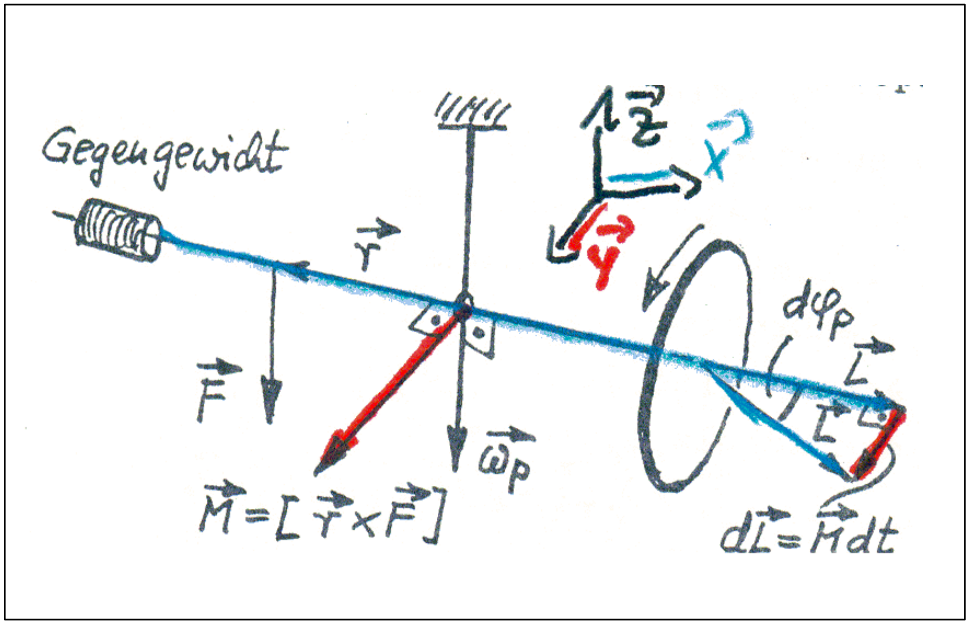
Analog zum Linearimpuls $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ definieren wir auch den Drehimpuls:

$$\boldsymbol{L} = \Theta\boldsymbol{\omega} = m\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} \times \boldsymbol{r}$$

(die letzte Definition gilt für eine Punktmasse m auf einer Kreisbahn vom Radius $\boldsymbol{r}$ mit der Bahngeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$). Hier gilt ebenfalls ein Erhaltungssatz, die *Drehimpulserhaltung*. Die allgemeine Form der Bewegungsgleichung für die Drehbewegung lautet nun:

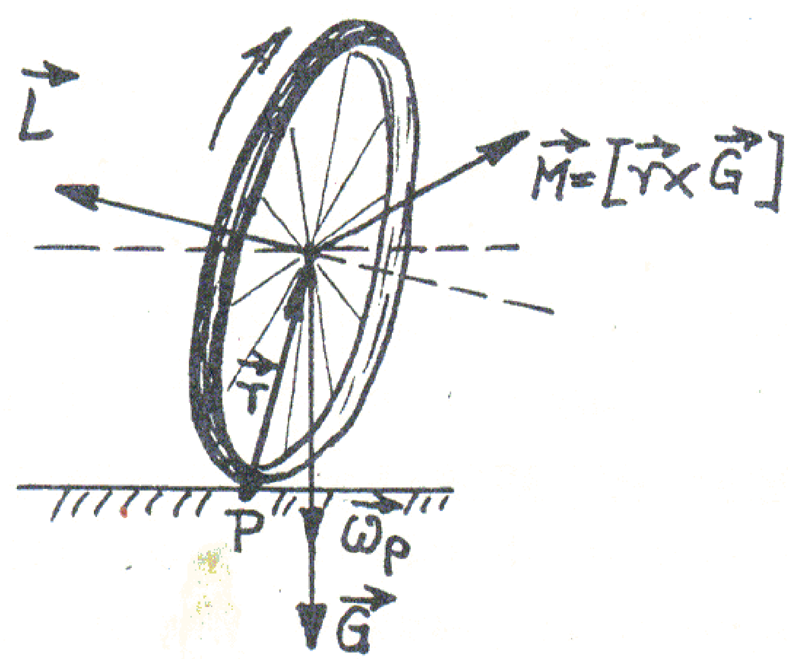
$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\ .$$

Wird der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ eines Gegenstandes (z.B. ein Kreisel) durch ein Drehmoment $\boldsymbol{M}$ verändert, so kann die Änderung in Richtung von $\boldsymbol{L}$ zeigen, und damit den Betrag des Drehimpulses erhöhen oder senkrecht zu $\boldsymbol{L}$ wirken und nur die Richtung ändern.



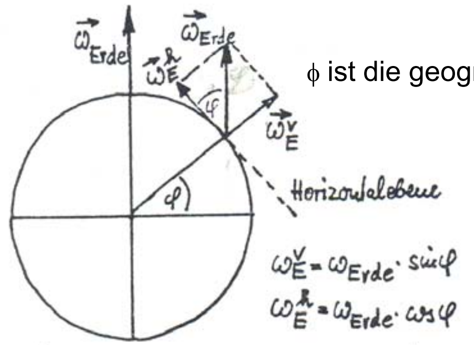
$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, der Wirkung dieser Kraft weicht der Kreisel senkrecht zur Kraftrichtung aus. Er führt eine **Präzession** aus, wobei $\boldsymbol{\omega_p}$ senkrecht auf $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{L}$ steht.

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\omega_p} \times \boldsymbol{L} \quad \boldsymbol{\omega_p} = \frac{\boldsymbol{M}}{\Theta\boldsymbol{\omega}}$$



Kippt das Rad nach rechts, so wird die Vorderachse durch das Drehmoment $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F_G}$ im Uhrzeigersinn gedreht. Die Vorderachse weicht dieser Drehung durch eine Präzession mit lotrechter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega_p}$ aus, d.h. die Radachse dreht sich von oben gesehen nach rechts.

Corioliskraft



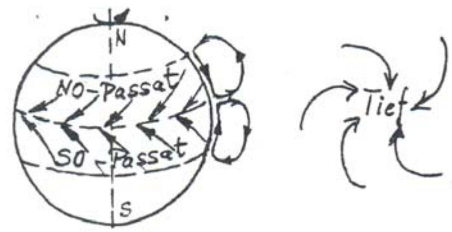
ϕ ist die geographische Breite

Corioliskraft:

$\mathbf{F}_c = -2m(\omega \times \mathbf{v})$, allgemein

$\mathbf{F}_{cV} = -2m(\omega_{EV} \times \mathbf{v})$, Vertikalebene

$\mathbf{F}_{cH} = -2m(\omega_{EH} \times \mathbf{v})$, Horizontalebene



Die vertikale Komponente der Corioliskraft führt auf der Nordhalbkugel zu: (i) Steilere Rechtsufer der Flüsse, (ii) stärkere Abnutzung der linken Schienenseite bei Eisenbahnschienen, (iii) Rechtsablenkung der Winde aus den Subtropen zum Äquator (NO-Passat) (iv) Winde im Tiefdruckgebiet laufen im Uhrzeigersinn.

Die horizontale Komponente führt dazu, dass ein lotrecht fallender Körper nach Osten und ein nach oben bewegter Körper nach Westen abgelenkt wird. (Siehe auch Foucaultsches Pendel)

Trägheitsmomente

Das Trägheitsmoment Θ eines Körpers, der durch ein System von Massepunkten beschrieben werden kann ist:

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2$$

Besteht ein Körper nicht aus einzelnen diskreten Massepunkten, sondern hat eine kontinuierliche Masseverteilung, so ist die Summation durch Integration zu ersetzen:

$$\Theta = \int_{Volumen} r^2 dm$$

Beispiel Vollzylinder:

$$\begin{aligned}
dm &= 2\pi r h \rho dr \quad h:\ Höhe\ \rho:\ konstante\,Dichte \\
\Theta &= 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi R^4 h \rho \\
\Theta &= \frac{1}{2} m R^2 \quad m:\ Gesamtmasse\ R:\ Radius
\end{aligned}$$

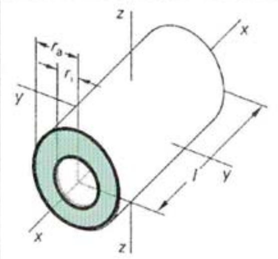
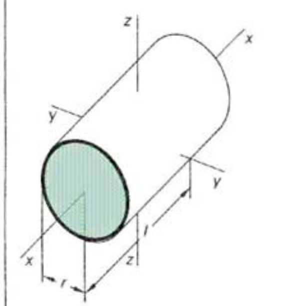
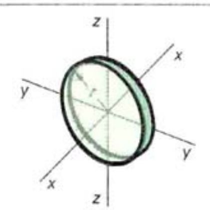
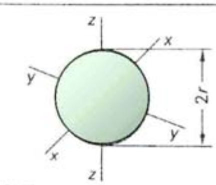
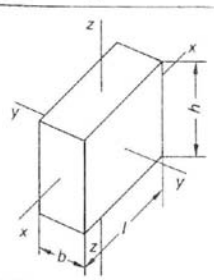
	Hohlzylinder	$\Theta_x = (m/2)[r_a^2+r_i^2]$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)[r_a^2+r_i^2+l^2/3]$
	dünnwandiger Hohlzylinder	$\Theta_x = mr^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)[2r^2+l^2/3]$
	Vollzylinder	$\Theta_x = (m/2)r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)r^2+(m/12)\,l^2$
	dünne Scheibe ($l \ll r$)	$\Theta_x = (m/2)r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)r^2$
	dünner Stab ($l \gg r$) unabhängig von der Form des Querschnitts	$\Theta_x = (m/2)r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/12)\,l^2$
	dünner Ring	$\Theta_x = m\,r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/2)r^2$
	Kugel, massiv	$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = (2m/5)r^2$
	dünne Kugelschale	$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = (2m/3)r^2$
	Quader	$\Theta_x = (m/12)[b^2+h^2]$ $\Theta_y = (m/12)[l^2+h^2]$ $\Theta_z = (m/12)[l^2+b^2]$

Abbildung 0.10. Beispiele für das Trägheitsmoment Θ von verschiedenen Körpern

Statik

Die Statik behandelt die Kräfte und Drehmomente die wirken, wenn sich ein Körper im **ruhenden Zustand** oder im **Gleichgewicht** befindet. Hierbei handelt es sich stets um ein Gleichgewicht der Kräfte $\boldsymbol{F}$ und der Drehmomente $\boldsymbol{M}$, die sich gegenseitig aufheben:

$$\sum_i \boldsymbol{F_i} = 0$$
$$\sum_i \boldsymbol{M_i} = 0$$

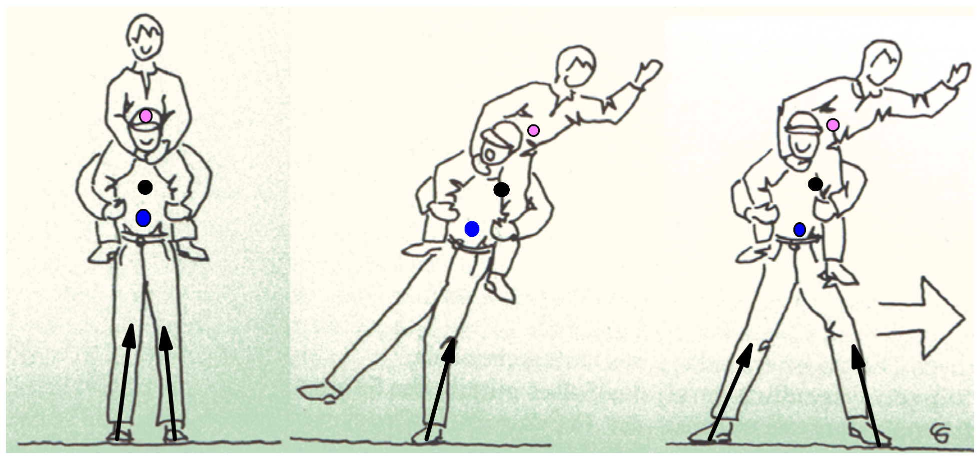
Die Kräfte und Drehmomente im Gleichgewicht wirken auf den Körper (z.B. Baum, Leiter) und müssen von diesem übertragen werden. Werden die Kräfte zu gross kann der Körper irreversibel verformt und sogar zerstört werden.

Wird das Gleichgewicht gestört findet Bewegung statt.

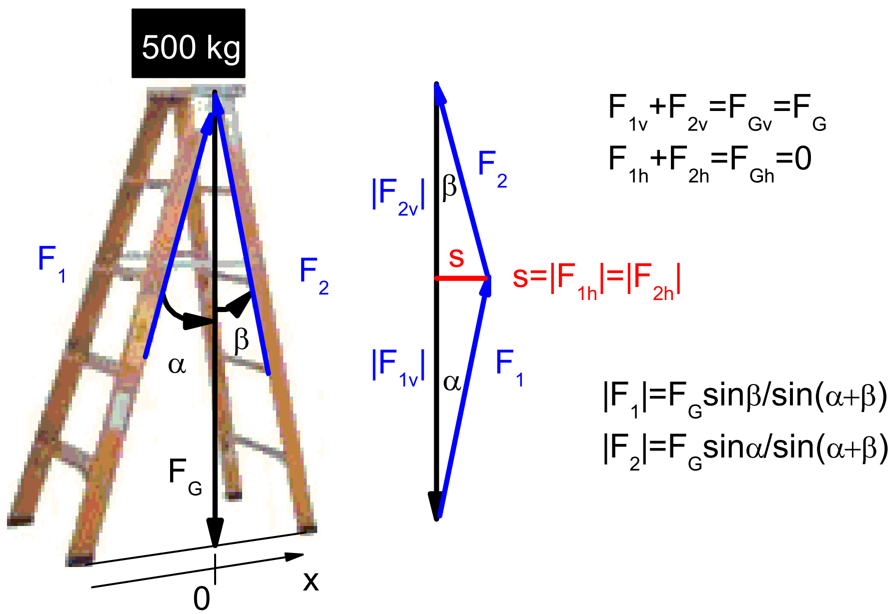
Eine Leiter, die mit einem Gewicht von 500 kg belastet ist, überträgt die Gewichtskraft, durch die Leiterfüsse auf den Boden. Die Leiter erzeugt somit eine Gegenkraft zur Gewichtskraft. Es gilt:

Schiefer Baum

Gleichgewicht und Störung des Gleichgewichtes



Kraftverteilung



$$\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} = \boldsymbol{F_G} \quad \boldsymbol{F_G} : \ Gewichtskraft$$

$$|F_{1v}| + |F_{2v}| = |F_{Gv}| = |F_G|$$

$$F_{1h} = -F_{2h}$$

$$\frac{s}{|F_{1v}|} = \tan\alpha, \quad \frac{s}{|F_{2v}|} = \tan\beta$$

$$\frac{|\boldsymbol{F_1}|}{|\boldsymbol{F_2}|} = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$$

$$|\boldsymbol{F_1}| = \frac{|F_{1v}|}{\cos\alpha}, \quad |\boldsymbol{F_2}| = \frac{|F_{2v}|}{\cos\beta}$$

$$|\boldsymbol{F_2}| = \boldsymbol{F_G}(\frac{\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha+\tan\beta}}{\cos\beta})$$

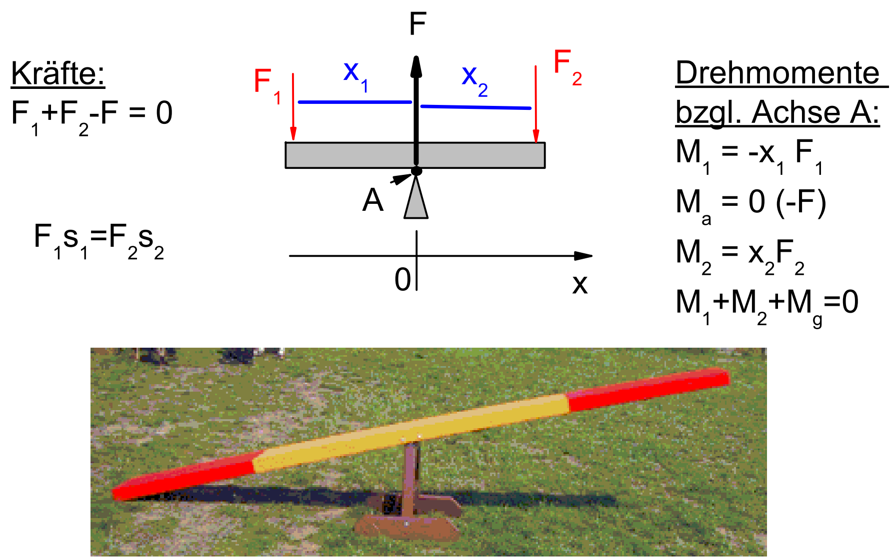
$$\sin\alpha + \beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$|\boldsymbol{F_2}| = F_G(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \beta})$$

$$|\boldsymbol{F_1}| = F_G(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \beta})$$

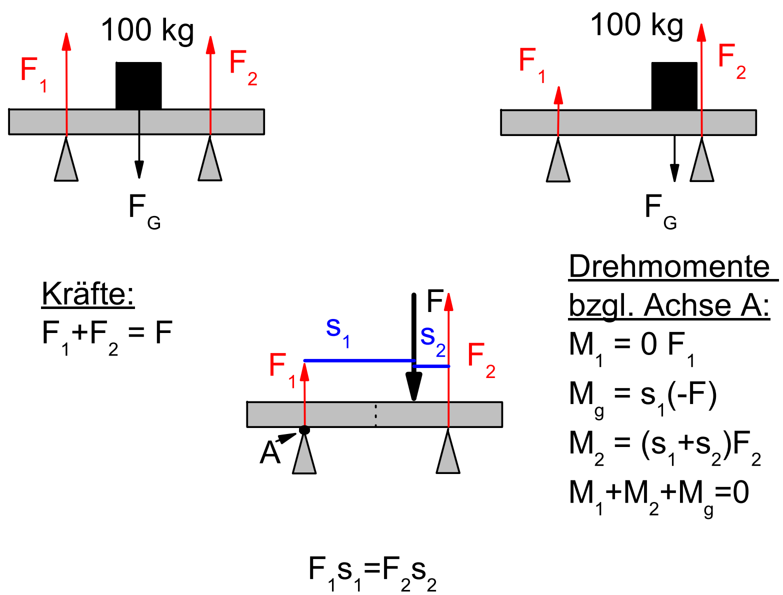
Gleichgewicht einer Wippe

2 Personen auf einer Wippe im Gleichgewicht:



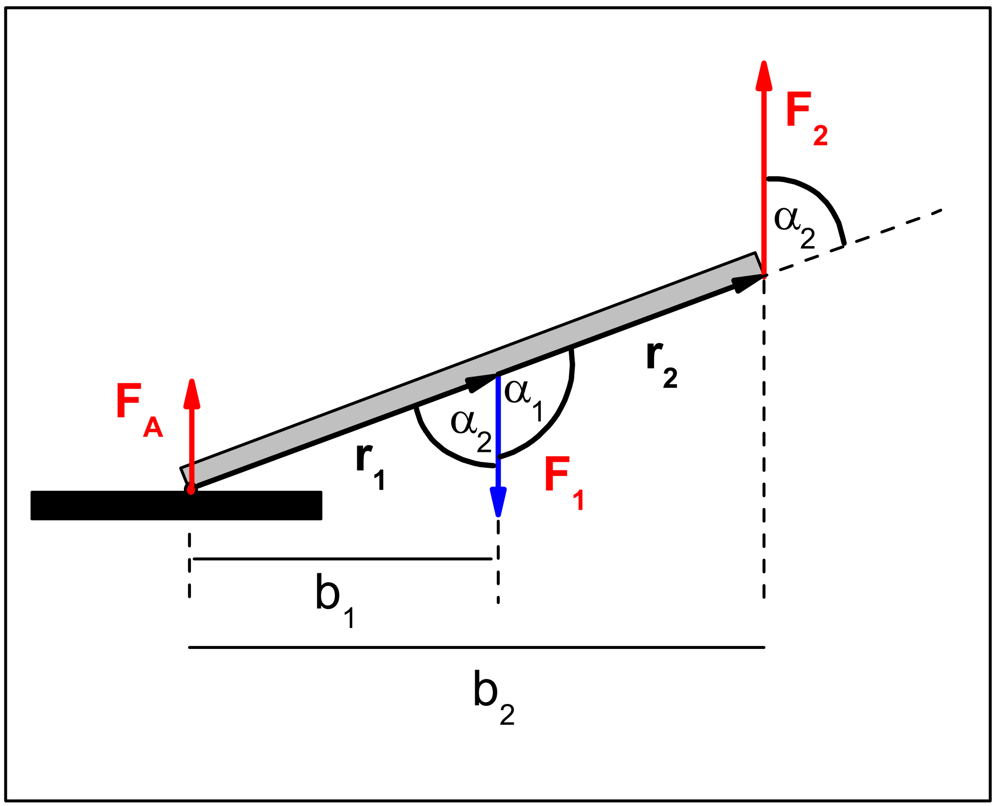
Hieraus ersieht man das **Hebelgesetz**, dass das Verhältniss der Kräfte gleich dem umgedrehten Verhältniss der Hebelarmlängen ist.

Krafteinwirkung auf Auflagen



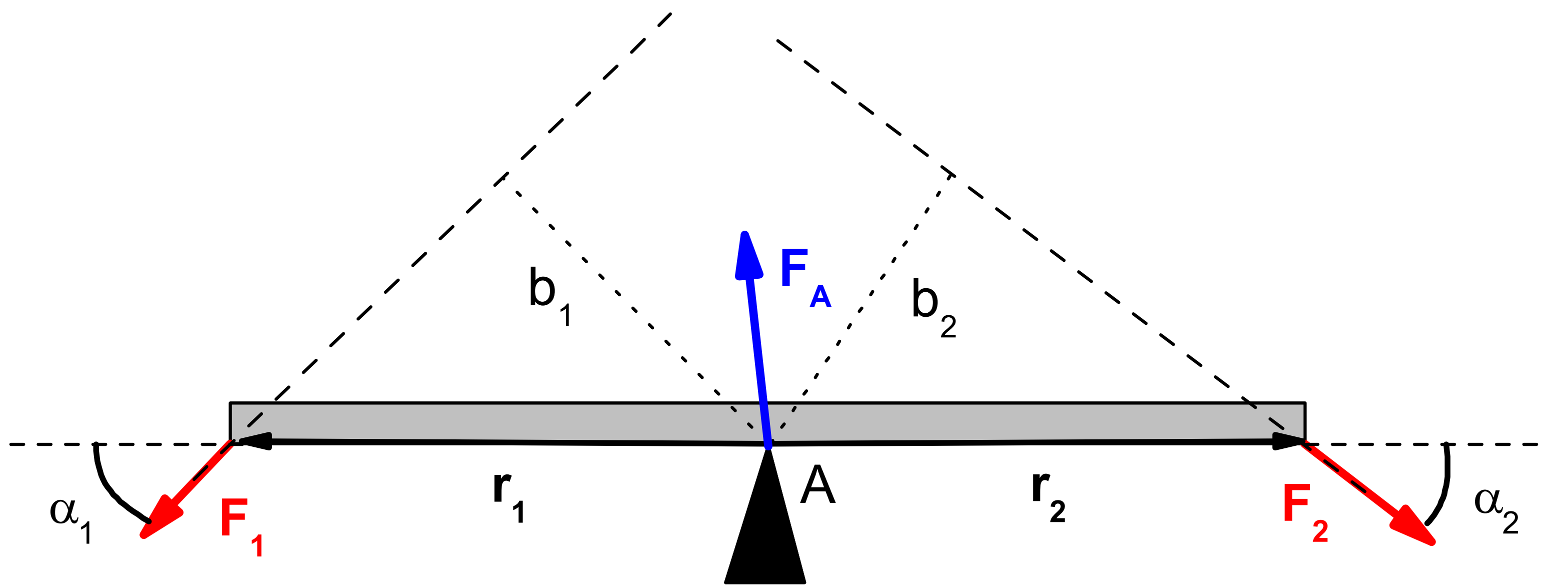
Mit Hilfe der Gleichgewichtsgleichungen, kann die wirkende Kraft auf Teile eines Gesamtkörpers berechnet werden. Dies ist wichtig z.B. beim Bau eines Fachwerkhauses oder eines Gerüstes (Statiker). Um die Stabilität von Gebäuden zu gewährleisten, müssen die Kräfte und Drehmomente stets so gering sein, dass das Gebäude nicht stark verformt oder gar zerstört wird.

Einarmiger Hebel



Für den Fall des einarmigen Hebels lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen folgende Kraftverhältnisse herleiten:

$$\begin{aligned}
\sum_i \boldsymbol{F_i} &= \boldsymbol{F_A} + \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} = 0 \\
\Rightarrow \boldsymbol{F_A} &= -(\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}) \\
\sum_i \boldsymbol{M_i} &= \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{F_2} = 0 \\
&= r_1 F_1 \sin\alpha_1 - r_2 F_2 \sin\alpha_2 \\
&= r_1 F_1 \sin\alpha_2 - r_2 F_2 \sin\alpha_2 = 0 \\
mit \quad r_1 \sin\alpha_2 &= b_1 \\
und \quad r_2 \sin\alpha_2 &= b_2 \\
\Rightarrow b_1 F_1 &= b_2 F_2
\end{aligned}$$

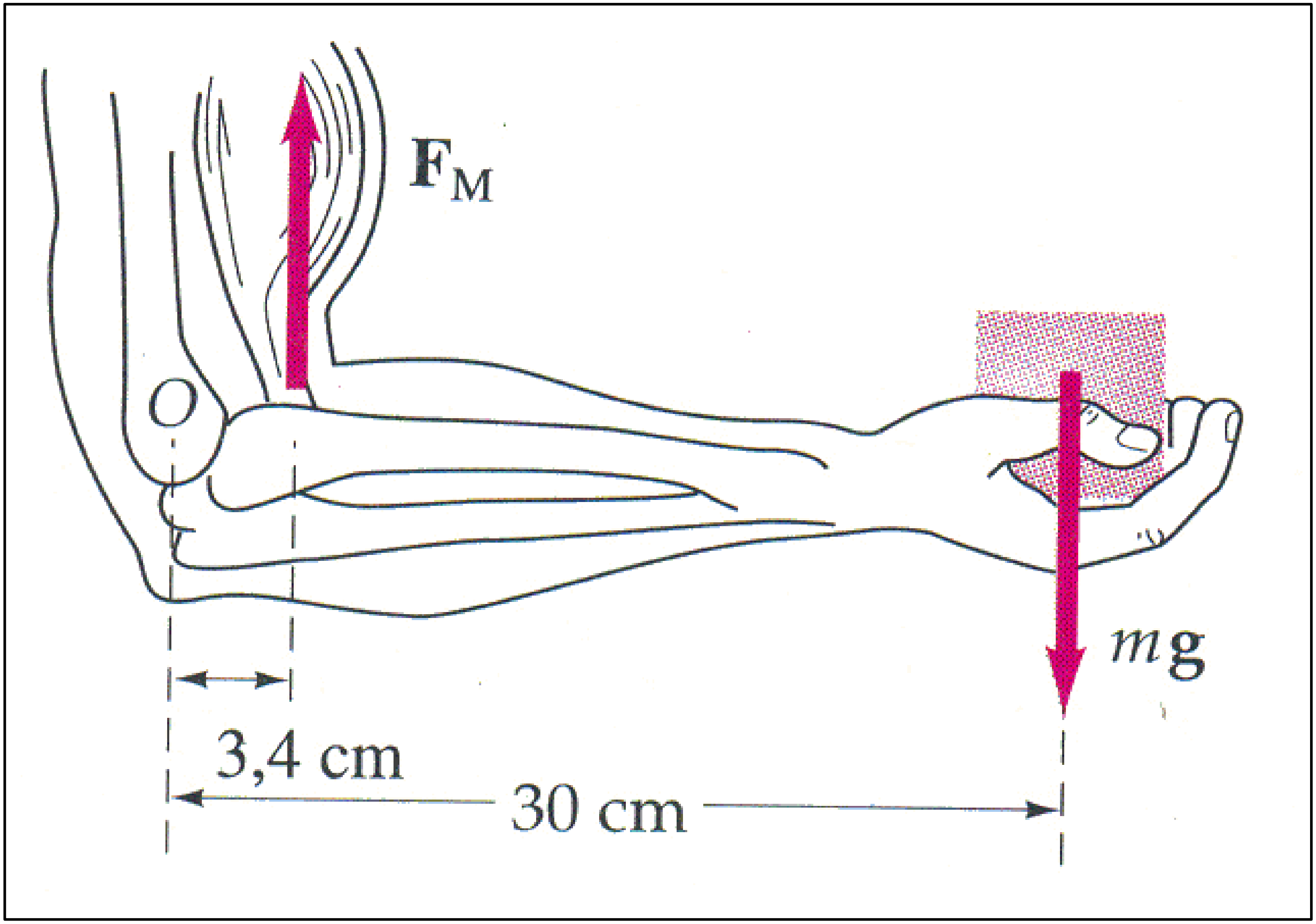

F
A
b
1
b
2
A
r
1
r
2
α
1
F
1
F
2
α
2

Für einen zweiarmigen Hebelarm folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_i \boldsymbol{F_i} &= \boldsymbol{F_A} + \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} = 0 \\
\sum_i \boldsymbol{M_i} &= \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{F_2} = 0 \\
&= r_1 F_1 \sin\alpha_1 - r_2 F_2 \sin\alpha_2 \\
Kraftarme: \quad b_1 &= r_1 \sin\alpha_1 \\
b_2 &= r_2 \sin\alpha_2 \\
\Rightarrow F_1 b_1 &= F_2 b_2
\end{aligned}$$

Also gilt das Hebelgesetz: $F_1 b_1 = F_2 b_2$

Der menschliche Arm



Verformung, Elastizität

Wie biegen sich die Balken? Bisher haben wir angenommen, daß die Materie entweder aus punktförmigen Massen besteht (geradlinige Bewegung, Kreisbewegung) oder vollständig starr ist (Drehbewegung des »starren Körpers«). In Wirklichkeit hat feste (sowie z.T. auch flüssige) Materie eine gewisse Elastizität; das heißt, sie widerstrebt Form- bzw. Volumenänderungen durch eine äußere Kraft und gewinnt ihre ursprüngliche Form und Größe wieder, sobald diese Kraft nicht mehr wirkt. Dabei wird die aufgewendete Arbeit (Spannarbeit, Volumenarbeit) wieder freigesetzt.

Die drei verschiedenen Aggregatzustände der Materie (fest, flüssig, gasförmig) zeigen sehr unterschiedliche Eigenschaften bzgl. ihrer Elastizität (siehe Tabelle 0.3). Den flüssigen sowie den gasförmigen Zustand

Tabelle 0.3. Aggregatzustände und ihre Elastizitäten

Aggregatzustand	Formelastizität	Volumenelastizität
fest	Ja	Ja
flüssig	Nein	Ja
gasförmig	Nein	Nein

werden wir später betrachten; zuerst schauen wir die Elastizität der festen Materie an. Grundsätzlich gibt es vier Arten der Verformungskräfte:

1. Eine Zugkraft oder Druckkraft, die eindimensional (in einer bestimmten Richtung) wirkt. Diese produziert eine Dehnung oder Stauchung Δl (oder relative Dehnung $\varepsilon = \Delta l / l$) der Materie;

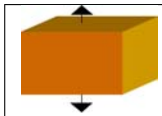
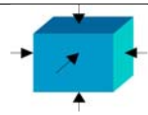
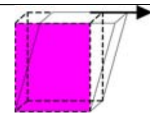
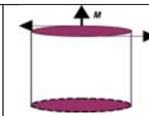
2. Ein dreidimensionaler Druck (allseitiger Druck), der eine Kompression ΔV (relative Kompression $\Delta V/V$) erzeugt;

3. Eine Scher- oder Schubkraft, die tangential zu einer Fläche der Materie wirkt und eine Scherung (Scherwinkel α) zur Folge hat; sowie

4. Die Torsion: eine Drillung der Materie um den Winkel φ_0 durch ein Drehmoment.

Diese Vorgänge sind charakterisiert durch Materialkonstanten, die miteinander zusammenhängen. Sie sind in der Tabelle 0.4 auf der folgenden Seite zusammengefasst.

Tabelle 0.4. Materialkonstanten

Dehnung	allseitiger Druck	Scherung	Torsion
			
Beobachtungen $F_{\mathrm{n}} \sim \Delta l$	$\Delta V \sim \Delta P$	$\alpha \sim F_{\mathrm{tg}}$	$\varphi_0 \sim M$
Verformung $\varepsilon = \Delta l / l$ (relative Dehnung)	$\Delta V / V$ (relative Kompression)	α (Scherwinkel)	φ_0 (Torsionswinkel)
Kraftgröße $\sigma = F_{\mathrm{n}}/A$ (mech. Spannung)	$P = F_{\mathrm{n}}/A$ (Druck)	$\tau = F_{\mathrm{tg}}/A$ (Schubspannung)	$M = F_{\mathrm{tg}}\, r$ (Torsionsmoment)
Gesetze $\sigma = E\,\varepsilon$ (E = Elastizitätsmodul)	$\Delta P = -K \Delta V/V$ (K = Kompressionsmodul; $\kappa = 1/K$ = Kompressibilität)	$\tau = G\alpha$ (G = Schubmodul)	$M = (\pi R^4 / 2\, l)\, G\, \varphi_0$
Querkontraktion $\varepsilon_{\mathrm{Q}} = \Delta b / b = -\varepsilon\, \nu$ (ν = Poissonzahl)	Relationen zwischen Konstanten: K = E/3(1-2ν)	G = E/2(1+ν)	
makroskopische Beziehungen $Fel = -D \Delta l$, $D = AE/l$			$M_{\mathrm{tor}} = -D^* \varphi_0$ $D^* = (A/l)(R^2/2) \cdot G$
elastische Energie $E_{\mathrm{el}} = (VE/2)\varepsilon^2$ $[E_{\mathrm{el}} = \left(\frac{D}{2}\right) \Delta l^2]$	Volumenarbeit $-P\Delta V$		$E_{\mathrm{el}} = (D^*/2)\varphi_0^2$

Kräfte

Beispiele für Kräfte

fundamentale Kräfte

Kernbindungskraft - wirkt zwischen Nukleonen	sehr stark, sehr kurze Reichweite
Coulombkraft - wirkt zwischen elektrischen Ladungen	mittelstark, lange Reichweite
(magnetische Kraft) - wirkt zwischen *bewegten* Ladungen	(relativistische Korrektur zur Coulombkraft)
schwache Kraft - wirkt zwischen Nukleonen und Elektronen (β-Zerfall)	sehr schwach, sehr kurze Reichweite
Gravitationskraft - wirkt zwischen (Schwere-) Massen	extrem schwach, sehr lange Reichweite

makroskopische Kräfte

Kohäsionskraft	Zusammenhalt der Materie
Adhäsionskraft	»Zusammenkleben« verschiedener Materialien
elastische Kräfte	Widerstand fester Materie gegen Verformung
Reibungskräfte	Widerstand der Materie gegen Bewegung
Trägheitskräfte	Gegenkraft der (trägen) Masse gegen Beschleunigung
Zwangskräfte	Kräfte, die eine Bewegung einschränken

Symmetrien und Erhaltungssätze (für Kenner)

die Korrespondenz zwischen Erhaltungssätzen, Symmetrien, Invarianzen (universellen Symmetrien)

Erhaltung von …	Symmetrie	Invarianz gegenüber …
Energie	Homogenität der Zeit	Zeittranslation $t \to t + t_0$
Linearimpuls	Homogenität des Raumes	Raumtranslation $s \to s + s_0$
Drehimpuls	Isotropie des Raumes	Raumdrehung $\varphi \to \varphi + \varphi_0$
elektrische Ladung		Eichtransformation des elektrischen Potentials $\Phi \to \Phi + \Phi_0$
– (T)	Isotropie der Zeit	Zeitumkehr $t \to -t$
»Parität« (P)	»Chiralsymmetrie«	Rauminversion $x \to -x$
– (C)	Teilchen–Antiteilchen	»Ladungskonjugierung« $p \to \overline{p}$
–	CPT-Invarianz	Ladungskonjugation + Rauminversion + Zeitumkehr