Die Schwingungsbewegung

Nun kommen wir zur dritten einfachen Bewegungsart: zur **Schwingung**. Eine Schwingung zeigt einige Ähnlichkeiten mit der ebenen Kreisbewegung, z. B. sind beide **ortsgebunden**: die Kreisbewegung an den Kreismittelpunkt, die Schwingung an ihre sogenannte **Ruhelage**.

Es gibt jedoch einige wesentliche Unterschiede: die gleichförmige Kreisbewegung schreitet (auf der Kreisbahn) immer weiter fort, während sich die Schwingung zeitlich wiederholt. Die Kreisbewegung hat eine konstante **Zentripetalbeschleunigung**, bei der Schwingung treten aber während jedem Schwingungszyklus **unterschiedliche Beschleunigungen** (in Betrag und Richtung) auf. Die Kreisbewegung besitzt nur **kinetische (Rotations-) Energie**, die Schwingung aber sowohl **kinetische** als auch **potentielle Energie**.

Die Zeit, nach der sich eine Schwingung wiederholt, wird **Schwingungsdauer** T genannt. Der Kehrwert dieser Zeit gibt die *Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit* an und heißt **Schwingungsfrequenz** $\boldsymbol{\nu}$; sie wird in 1/Sek. = Hertz gemessen. Man verwendet oft auch die Kreisfrequenz ω, mit $\omega = 2\pi\nu$ (auch in Hz gemessen). Die Kreisfrequenz deutet auf eine andere Ähnlichkeit der Schwingung und der Kreisbewegung hin: betrachtet man eine gleichförmige, ebene Kreisbewegung in der Kreisebene, d. h. projiziert auf eine Linie in der Ebene, so scheint sich der Massenpunkt auf und ab entlang dieser Linie zu bewegen. Die scheinbare Bewegung ist identisch mit einer harmonischen Schwingung, wobei die Kreisfrequenz der Schwingung gleich die Winkelgeschwindigkeit ω der Kreisbewegung ist (siehe Abbildung 0.11).

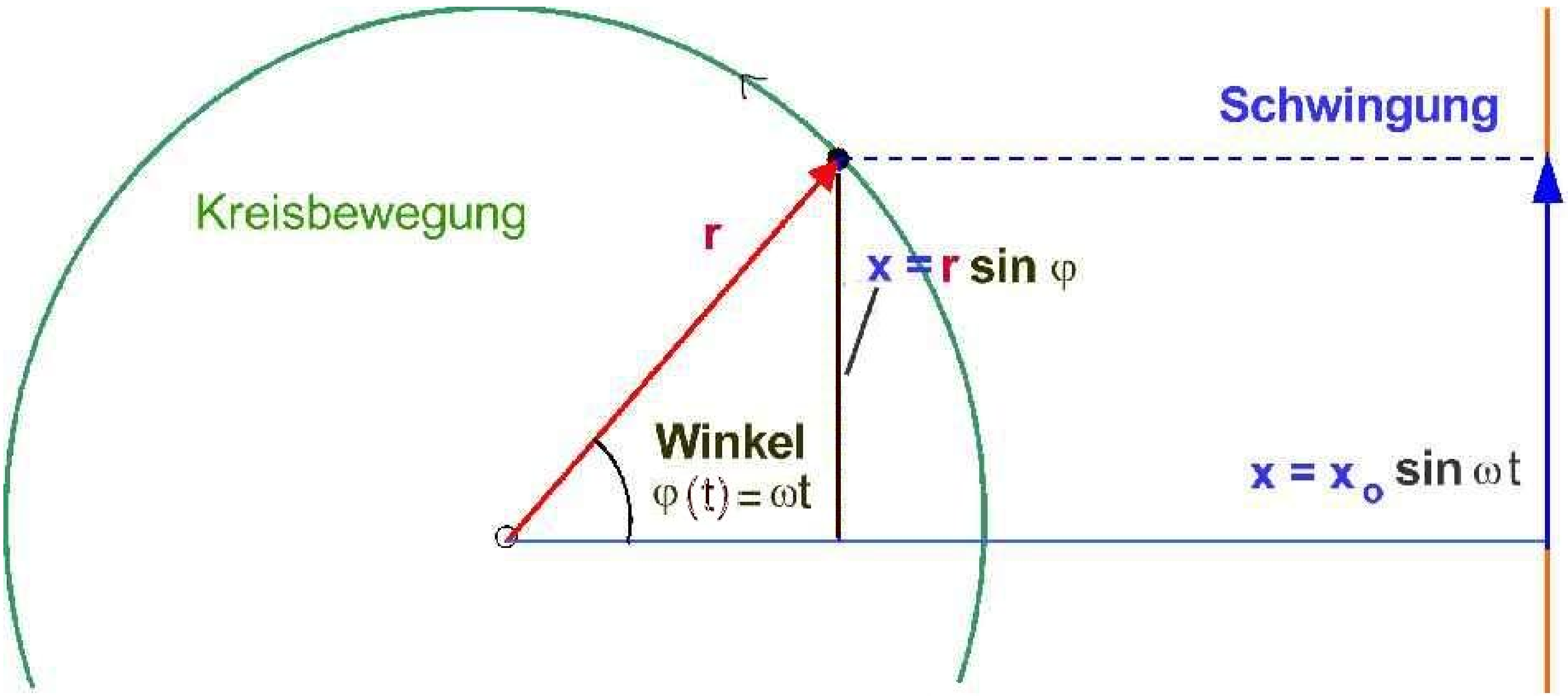

Abbildung 0.11.

Beschreibung der Schwingungsbewegung

Eine Schwingung entsteht, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

- es muß eine rücktreibende Kraft (zur Ruhelage hin) wirken, und
- eine Trägheit muß vorhanden sein.

Die Beschreibung der Bewegung erhalten wir dann einfach dadurch, daß wir die rücktreibende Kraft als F in die Newton'sche Bewegungsgleichung $F = ma$ einsetzen. Alternativ dazu, können wir die Summe von potentieller Energie (welche mit der rücktreibenden Kraft zusammenhängt) und kinetischer Energie (die die Trägheit enthält) konstant setzen (Energiesatz!).

Beispiel: Federpendel Die rücktreibende Kraft ist die elastische Kraft,

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}} = -D\boldsymbol{x} \qquad \text{(Hooke'sches Gesetz!)}$$

wobei D die »Federkonstante« und x die Auslenkung (relativ zur Ruhelage) sind. Einsetzen in $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t^2$ und Umformen ergibt:

$$\left(\frac{D}{m}\right)\ \boldsymbol{x}(t) + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

Diese Differentialgleichung (2. Ordnung) kann formell durch 2-maliges Integrieren gelöst werden; wir können sie aber einfach mit einer Versuchslösung

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 \sin[\omega_0\, t + \varphi_0]$$

lösen (Die 2. Ableitung der Sinus- oder Kosinus-Funktion ist proportional der Funktion selbst!). Die Lösung enthält zwei Integrationskonstanten:($\boldsymbol{x}_0$ = Anfangsauslenkung oder Amplitude; φ_0= Anfangsphase). Außerdem enthält sie eine Systemkonstante, die **Kreisfrequenz** ω_0, die durch Eigenschaften des schwingenden Systems (des harmonischen Oszillators), nämlich die Kraftkonstante D sowie die Trägheitskonstante m, bestimmt wird. Dieselbe Schwingungsgleichung erhalten wir mit dem Energie-Ansatz ...weitere Beispiele: Drehschwingungen (Torsionspendel), Fadenpendel, Wassersäule in einem U-Rohr.

Die Gedämpfte Schwingung

Alle wirklichen Schwingungen halten nicht ewig an, wie die obige Lösung für $x(t)$ andeuten würde; die Schwingungsenergie geht durch Reibung verloren. Die Schwingungen sind dann »gedämpft« durch eine Reibungskraft:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = -k\boldsymbol{v} = -k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$$

wo k die »Reibungskonstante« und v die momentane Geschwindigkeit der Schwingungsbewegung sind. (Andere Reibungskräfte, die nicht geschwindigkeitsproportional sind, sind auch bekannt, diese ist aber die wichtigste Form).

Die Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ enthält wieder zwei Anfangsbedingungen, zeigt aber eine zusätzliche Zeitabhängigkeit :

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x_0} e^{(-t/\tau)} \sin[\omega_1\, t + \varphi_0]$$

mit der Dämpfungszeit $\tau = 2m/k$, und mit einer neuen Kreisfrequenz ω_1, gegeben durch:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4\, m^2}}$$

Das heißt die Frequenz wird i. a. *kleiner*, die Amplitude sinkt exponentiell mit der Zeitkonstante τ:

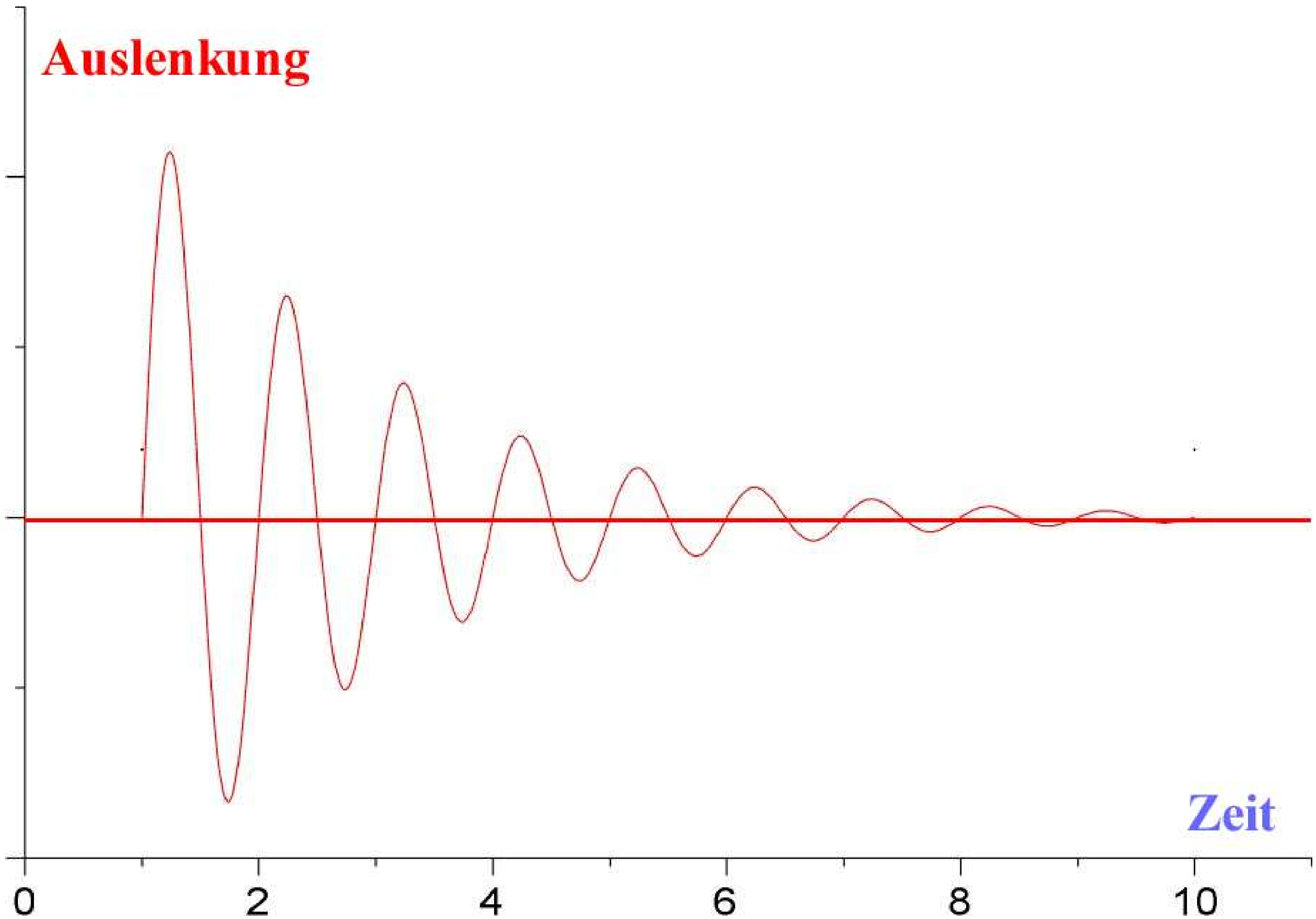

Abbildung 0.12. gedämpfte Schwingung

Wir können drei Fälle unterscheiden:

1. *Schwingfall*: es gilt $\omega_0^2 > k^2/4m^2$: der Oszillator schwingt, ist aber (wie oben) gedämpft.
2. *aperiodischer Grenzfall*: $\omega_0^2 = k^2/4m^2$: die Schwingung kommt nie zustande, die Dämpfung ist genauso schnell wie die Schwingung selbst. Nützlich für die Vermeidung von Schwingungen.
3. *Kriechfall*: $\omega_0^2 < k^2/4m^2$: der ausgelenkte Oszillator kehrt langsam, ohne zu schwingen, exponentiell zur Ruhelage zurück (»Kriechen«).

Erzwungene Schwingungen

Die bisher betrachteten Schwingungen sind *freie* Schwingungen, mit oder ohne Dämpfung – d. h., der Oszillator wird einmal »angestoßen« und läuft dann frei von zusätzlichen äußeren Kräften weiter. In der Natur sind alle Schwingungen mehr oder weniger stark gedämpft; ihre Schwingungsenergie wird durch Reibung o.ä. in Wärme umgewandelt, die Schwingung kommt allmählich zum Stillstand.

Ein wichtiger Fall ist dann die **erzwungene Schwingung**, wobei eine zyklisch wirkende externe Kraft die Schwingung trotz Dämpfung in Gang hält. Diese externe Kraft muß natürlich nicht stetig, sondern wiederkehrend wirken. Sie kann im Prinzip eine beliebige Form haben (z. B. das Stoßen einer Schaukel), jedoch ist der wichtigste Fall eine harmonische externe Kraft, d. h. eine Kraft der Sinus- oder Kosinusform:

$$\boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \boldsymbol{F}_0 \cos(\omega_{\text{ext}} t)$$

wobei $\boldsymbol{F}_0$ die Stärke (Amplitude) der externen Kraft und ω_{ext} ihre Kreisfrequenz sind. Beide sind frei wählbar, unabhängig von dem Oszillator, worauf die Kraft wirkt. Die Schwingungsgleichung hat nun eine andere Form: die Summe von rücktreibender Kraft, Trägheitskraft, und Reibungskraft ist nicht mehr Null, sondern gleich der externen Kraft:

$$\left(\frac{D}{m}\right)\boldsymbol{x}(t) + \left(\frac{k}{m}\right)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\boldsymbol{F}_0}{m}\right)\cos(\omega_{\text{ext}} t)$$

Die Lösung dieser Schwingungsgleichung ist komplizierter als bei der freien Schwingung. Sie besteht aus zwei Teilen:

1. *dem Einschwingen*: der Oszillator versucht, mit seiner Eigenfrequenz ω_0 zu schwingen; dies klingt mit der Dämpfungszeit τ ab ...

2. *dem stationären Zustand*: der Oszillator schwingt mit der von außen geprägten Frequenz ω_{ext}, die Amplitude und Phase der Schwingungen hängen von dem Verhältnis $\omega_0/\omega_{\text{ext}}$ sowie von der Dämpfung ab.

   Lösung: $y = y_0 \sin(\omega t - \beta)$

   mit: $y_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2)^2 + 4\delta^2\omega_{ext}^2}}$

   Dämpfungskonstante $\delta = \frac{k}{2m}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

   β: Phasenverschiebung zwischen Erreger-Kraft F(t) und erzwungener Schwingung, es gilt:

   $\tan\beta = \frac{2\delta\omega_{ext}}{\omega_0^2 - \omega_{ext}^2}$

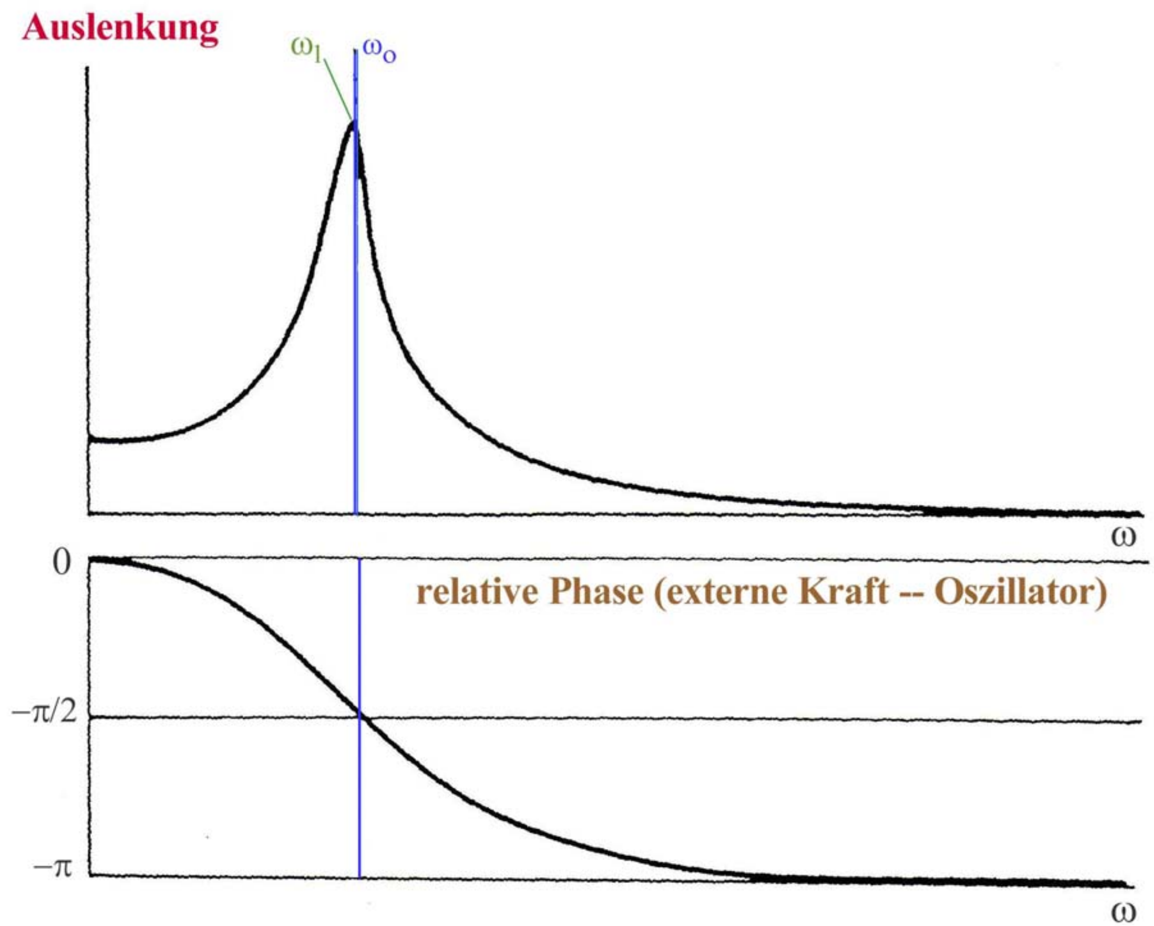

Abbildung 0.13. Die Auslenkung (Amplitude) und die relative Phase eines erzwungenen Oszillators im stationären Zustand als Funktion der externen Frequenz. Bei niedrigen Frequenzen »geht der Oszillator mit«, seine Auslenkung ist genauso groß, wie die Amplitude der externen Kraftquelle. Wenn die externe Frequenz gleich die Eigenfrequenz des Oszillators ist ($\omega_0/\omega_{\text{ext}} = 1$), ist die Leistungsübertragung optimal, es gibt eine »Resonanzüberhöhung« der Auslenkung. Die maximale Auslenkung findet man jedoch bei der gedämpften Frequenz, $\omega_{\text{ext}} = \omega_1$. Steigt die externe Frequenz noch weiter, so nimmt die Auslenkung wieder ab und geht gegen Null für hohe Frequenzen. Die relative Phase zwischen externer Kraftquelle und Oszillator ist Null für kleine Frequenzen, $90\,^\circ$ bei Resonanz, und geht gegen $180\,^\circ$ für große externe Frequenzen.

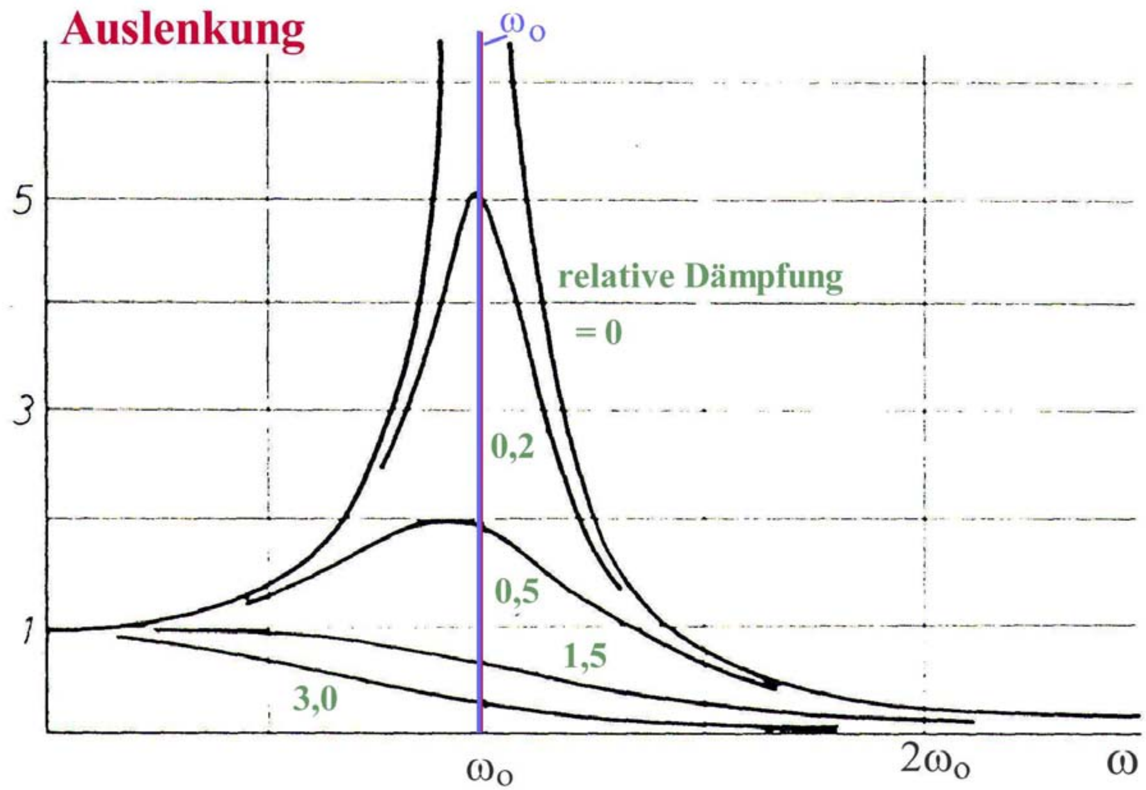

Abbildung 0.14. Die Auslenkung eines erzwungenen Oszillators der Eigenfrequenz ω_0 in Abhängigkeit der externen Frequenz ω für verschiedene relative Dämpfungsfaktoren $k/\sqrt{m\,D}$. Bei kleiner Dämpfung wächst die Auslenkung im Resonanzfall gegen Unendlich (Resonanzkatastrophe!). Bei großer Dämpfung gibt es keine Resonanzüberhöhung der Auslenkung mehr. Die Breite der Resonanzkurve wird geringer, wenn die Dämpfung kleiner wird.

Tabelle 0.5. Vergleich von verschiedenen Oszillatoren (schwingungsfähigen Systemen)

Größe, Eigenschaft	Federpendel	Drehpendel	Fadenpendel (Länge l)
Auslenkung	Strecke $x(t)$	Winkel $\varphi(t)$	Winkel $\varphi(t)$ oder Bahnstrecke $s_\mathrm{B}(t)$
rücktreibende Kraft	elastische (Feder-)Kraft $F = -Dx$	elastisches (Torsions-) Moment $M = -D^*\varphi$	Schwerkraft $F = -m\,g\sin\varphi$ (nicht harmonisch!)
Trägheit	Masse m	Trägheitsmoment Θ	Masse m
Dämpfung	Reibungskraft $F = -kv$	Torsionsreibung $M = -k^*\varphi$	Reibungskraft $F = -kv$
Lösung der Bewegungsgleichung	$x(t) = x_0\,\sin[\omega_0\,t + \varphi_0]$	$\varphi(t) = \varphi_0\,\sin[\omega_0\,t + \xi_0]$	$s_\mathrm{B}(t) = s_0\,\sin[\omega_0\,t + \xi_0]$ *oder* $\varphi(t) = \varphi_0\,\sin[\omega_0\,t + \xi_0]$ (mit $\sin\varphi \approx \varphi$)
Kreisfrequenz ω_0 (Eigenfrequenz)	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
gedämpfte Frequenz ω_1	$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4\,m^2}}$	$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^{*2}}{4\,\Theta^2}}$	$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4\,m^2}}$

Wellenlehre

gekoppelte Schwingungen

Werden zwei (oder mehr) harmonische Oszillatoren aneinander gekoppelt[1], dann führen sie eine komplexe Bewegung aus. Diese gekoppelten Schwingungen haben jedoch eine einfache Form, wenn die richtigen Anfangsbedingungen gewählt werden:

- wenn am Anfang die gesamte Schwingungesnergie in *einem* Oszillator gespeichert wird, entstehen sog. »Schwebungen«: die Schwingungsenergie wechselt zeitlich zwischen den einzelnen Oszillatoren hin und her;

- wenn alle Oszillatoren am Anfang mit einer festen Phasenbeziehung angeregt werden, entstehen *Normalschwingungen*. Dabei bewegen sich alle Oszillatoren synchron, mit der gleichen Frequenz; die niedrigste Frequenz entspricht der Grundschwingung, wobei sich alle Oszillatoren zusammen bewegen. Es gibt soviele Normalschwingungen wie einzelne Oszillatoren im gesamten, gekoppelten System (»Anzahl der Freiheitsgrade«). Können Schwingungen in allen drei Raumrichtungen stattfinden so gibt es 3N-6 Normalschwingungen (bzw. 3N-5 für lineare Systeme).

Es gibt viele Beispiele für gekoppelte Schwingungen in der Natur. Relativ einfach sind die Schwingungen kleiner Moleküle (CO_2, NH_3 usw.), die mit der Infrarot- und Raman-Spektroskopie auch gemessen werden können. Auch alle Wellen können als gekoppelte Schwingungen angesehen werden, wobei sich die Schwingungsenergie durch eine Kette von aneinandergekoppelten Oszillatoren (das Medium der Wellenausbreitung) fortpflanzt (siehe Abb. 0.16 auf Seite 93). Beispiele: gekoppelte Federpendel, gekoppelte Fadenpendel; Dreh- und lineare Schwingungen eines Federpendels.

[1] z. B. Federpendel durch eine » Kopplungsfeder«

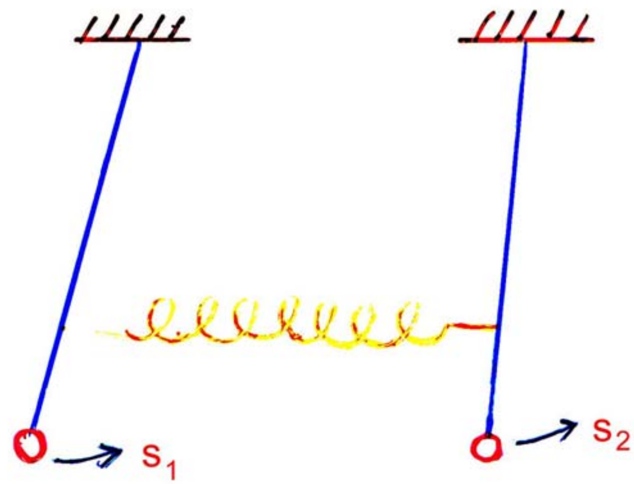

Abbildung 0.15. Zwei mit einer Feder gekoppelte Fadenpendel

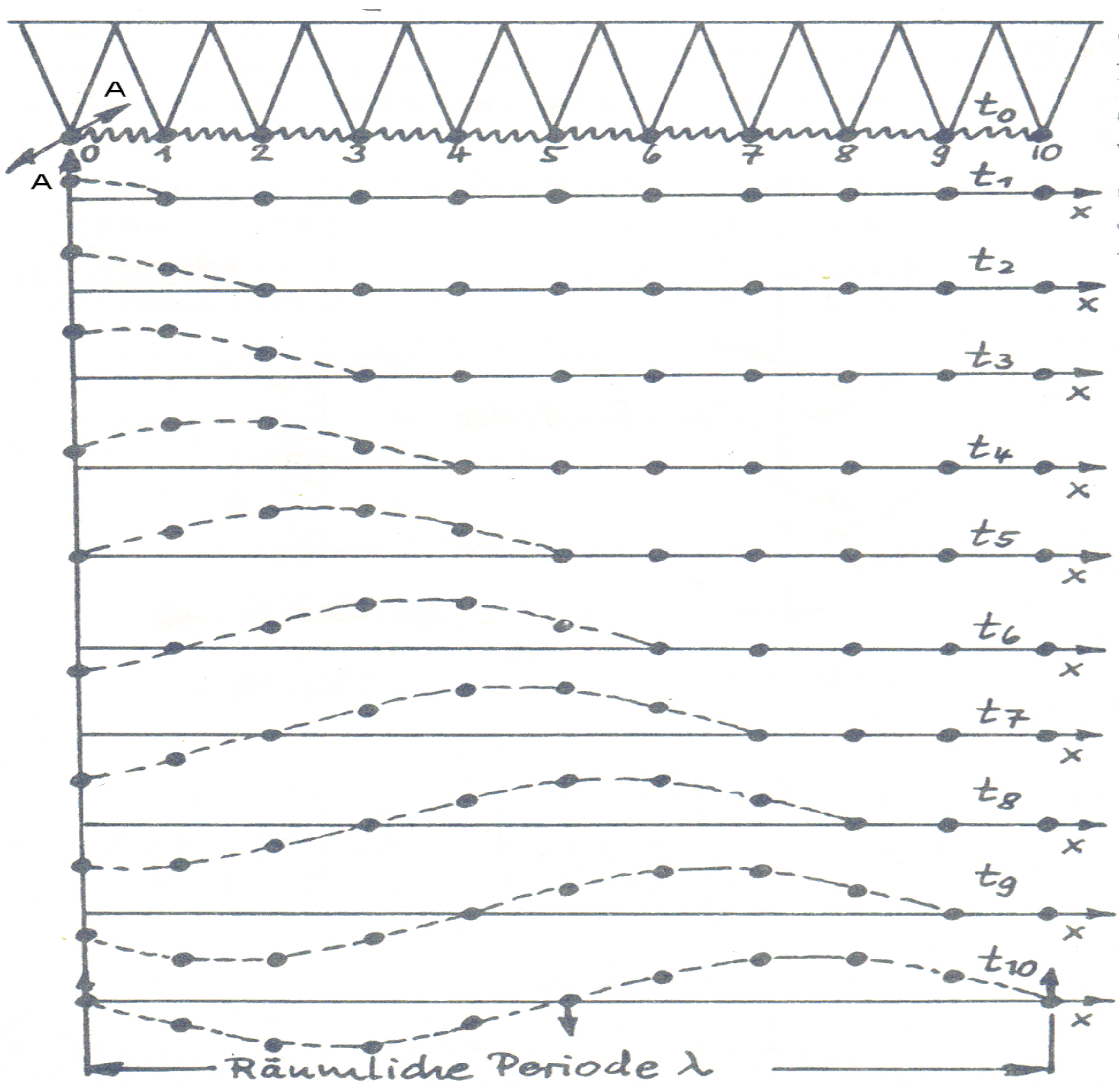

Abbildung 0.16. Mechanische Wellen

Bei einer Reihe gleicher Fadenpendel werden die Pendelkugeln miteinander durch Federn gekoppelt. Diese Pendelkugeln können wir als Atome oder Moleküle ansehen, die Federn verkörpern die Kräfte zwischen den atomaren Teilchen. Die Pendelreihe sei in x-Richtung ausgerichtet und dazu senkrecht wird das Anfangspendel 0 mit der Amplitude A ausgelenkt. Jedes Pendel kann Schwingungen um seine Ruhelage ausführen.

In Folge der elastischen Federkopplungen pflanzt sich dann diese Schwingung nacheinander auf die anderen Pendel fort.
Nacheinander erreicht ein bestimmter Schwingungszustand, z.B. der Zustand, bei dem die Auslenkung A in positiver Richtung maximal wird, alle Pendel. Der Schwingungszustand oder die Schwingungsphase pflanzt sich mit endlicher Geschwindigkeit c, der sogenannten Phasengeschwindigkeit längs der Pendelreihe fort.

Jedes einzelne Pendel vollführt eine periodische Schwingungsbewegung in der Zeit um seine Ruhelage. Zum Zeitpunkt t_{10} hat das Pendel 10 den gleichen Bewegungszustand, d.h. die gleiche Schwingungsphase wie das Pendel 0.

Der Bewegungszustand ist also auch **periodisch im Raum**. Einen solchen zeitlich und räumlich periodischen Vorgang nennt man eine **fortschreitende Welle**.

Den räumlichen Abstand zweier Punkte, die sich im gleichen Schwingungszustand befinden nennt man **räumliche Periode der Welle oder Wellenlänge** λ.

Die Zeit die benötigt wird, um den Schwingungszustand über eine Wellenlänge zu transportieren heisst **Schwingungsdauer T**.

Damit gilt für die Phasengeschwindigkeit $c = u_{\varphi} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$, wobei ν der Kehrwert der Schwingungsdauer T ist.

Wellen, allgemeine Beschreibung

Wellen sind gewissermaßen »Schwingungen, die sich auf den Weg gemacht haben«. Eine Schwingung ist ortsgebunden, zeigt aber eine zyklische Änderung (Bewegung) in der Zeit. Wellen sind nicht nur in der Zeit, sondern auch im Ort zyklisch; sie erstrecken sich über einen größeren Ortsbereich bzw. breiten sich im Ortsbereich aus.
Wie auch bei den Schwingungen haben Wellen eine besonders einfache Form, wenn sie *harmonisch* sind, d. h. durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion beschrieben werden können. Das Argument der Funktion enthält dann nicht nur die **Zeitabhängigkeit**, wie bei Schwingungen, sondern auch die **Ortsabhängigkeit** der Wellen.
Wellen haben ebenso wie Schwingungen eine **Amplitude** A_0 und eine **Phase** φ_0, welche durch die Anfangsbedingungen gegeben sind. Außerdem sind sie charakterisiert durch eine Systemkonstante, die ihre Zeitabhängigkeit angibt (Schwingungsdauer T bzw. Frequenz $\nu = 1/T$ oder **Kreisfrequenz** $\omega = 2\,\pi\,\nu$). Wellen sind außerdem gekennzeichnet durch eine *zweite* Systemkonstante, die ihre Ortsabhängigkeit beschreibt –ihre Wellenlänge λ bzw. **Wellenzahl** $\vec{k} = 2\,\pi/\lambda$:

$$\Psi(x,t) = A_0 \sin[\omega\, t - \vec{k} \bullet \vec{x} + \varphi_0]$$

$\Psi(x,t)$ wird Wellenfunktion genannt; sie beschreibt die Auslenkung der Welle als Funktion von Ort x und Zeit t. Diese Form gilt für eindimensionale, laufende Wellen, die sich in $+x$-Richtung ausbreiten.

Zwischen den Systemkonstanten (die vom Medium bestimmt sind, in dem sich die Wellen ausbreiten) gibt es eine weitere Beziehung, die die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) c oder u_φ der Wellen angibt:

$$u_\varphi = c = \lambda\,\nu = \frac{\omega}{k} \qquad \text{(Grundgleichung der Wellenlehre)}$$

Wellentypen

Wir unterscheiden verschiedene *Typen von Wellen*, je nachdem, wie die schwingende Größe zu der Ausbreitungsrichtung steht und wie sie sich ausbreiten:

- falls die schwingende Größe senkrecht zur Ausbreitung steht, sind es *transversale Wellen* (Wasserwellen, Lichtwellen)
- steht sie parallel dazu, sind es *longitudinale* Wellen (Schallwellen)
- Wellen, die sich in eine (oder mehrere) Richtung(en) ausbreiten und Energie transportieren, heißen *laufende* Wellen (Licht, Schall,...)
- Wellen, die in einem fest abgegrenzten System schwingen und keine Energie transportieren, heißen *stehende* Wellen (akustische Wellen auf einer Geigensaite oder in einer Orgelpfeife)
- Wellen, bei denen die Amplitude überall gleich ist (senkrecht zur Ausbreitungsrichtung), heißen *ebene* Wellen; sie können durch Ebenen senkrecht zur Ausbreitung dargestellt werden
- Wellen, bei denen die Bereiche konstanter Amplitude auf Kugelflächen liegen, heißen *Kugel*wellen (z. B. Lichtwellen von einer Punktquelle)

Transversale Wellen können auch *polarisiert* sein: das heißt, ihre schwingende Größe schwingt in nur einer Ebene (anstatt in allen möglichen Richtungen) senkrecht zur Ausbreitung (bei Licht: *Linearpolarisation*).

Als Beispiel, um die Wellenausbreitung in einem Medium zu untersuchen, betrachten wir *transversale, laufende, eindimensionale* Wellen auf einem elastischen Seil (Gummiseil, siehe Abb. 0.17 auf der folgenden

Seite). Wir bezeichnen die Seilrichtung als x, die Auslenkungsrichtung des Seils (senkrecht zu x) als z. Wir wollen dann das Verhalten der Wellenfunktion $\Psi(x,t) \equiv z(x,t)$ berechnen.

Dazu teilen wir das Seil in beliebig viele sehr kleine Schnitte der Länge $\mathrm{d}x$, die je eine Masse $\mathrm{d}m = \rho_l \mathrm{d}x$ haben (ρ_l = Masse pro Längeneinheit oder lineare Massendichte). Jeder Schnitt verhält sich wie ein harmonischer Oszillator. Nun berechnen wir die rücktreibende Kraft auf jedem Schnitt und setzen sie in die Newton'sche Bewegungsgleichung $F = ma$ ein. Die rücktreibende Kraft hängt von der Zugkraft Z ab, mit der das Seil gestreckt wird, aber auch von der Krümmung des Seils am jeweiligen Punkt. Ist die

Abbildung 0.17. Die Welle am Beispiel der Seilwelle

Krümmung Null (gerades Seil), so verschwindet die rücktreibende Kraft. Die Krümmung wird durch die 2. Ableitung der Seilkurve z(x) gegeben:

$$\text{Krümmung} \equiv \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

und damit ist die rücktreibende Kraft $\boldsymbol{F}_{\text{rü}}$ gegeben als:

$$\boldsymbol{F}_{\text{rü}} = Z\,\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x$$

Die *Beschleunigung* während der Wellenbewegung ist die 2. zeitliche Ableitung der Auslenkung $z(t)$, d. h.

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \equiv \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung, mit $m = \rho_l\,\mathrm{d}x$, ergibt:

$$Z\,\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x = \rho_l\,\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x$$

oder, nach Kürzen des Faktors $\mathrm{d}x$ auf beiden Seiten der Gleichung,

$$Z\,\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \rho_l\,\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

Dies nennt sich die **klassische Wellengleichung**; ihre Lösung ist die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$. Die Konstanten Z und ρ_l (Systemkonstanten) bestimmen die Ausbreitungsgeschwindigkeit u_φ:

$$u_\varphi^2 = \frac{Z}{\rho_l}\ .$$

Anwendungen der Wellengleichung

Die Bewegungsgleichung der Welle ist durch folgende Differentialgleichung 2. Ordnung gegeben (2-fache Ableitungen):

$$u_\varphi^2 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

Diese Gleichung beschreibt die Bewegung von laufenden Wellen. Wir wollen zunächst zeigen, daß eine harmonische Welle, die in $+x$-Richtung läuft, tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung ist. Wir nehmen die Versuchslösung

$$\Psi(x,t) = A_0 \sin[\omega\, t - kx + \varphi_0]$$

und setzen sie in die Wellengleichung ein. Dazu brauchen wir die Ableitungen bzgl. Ort x und Zeit t:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} &= -k\, A_0\, \cos[\omega\, t - kx + \varphi_0] \\
\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} &= -k^2\, A_0\, \sin[\omega\, t - kx + \varphi_0] \\
\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} &= \omega\, A_0\, \cos[\omega\, t - kx + \varphi_0] \\
\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} &= -\omega^2\, A_0\, \sin[\omega\, t - kx + \varphi_0]
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt:

$$-k^2\, u_\varphi^2\, A_0 \sin[\omega\, t - kx + \varphi_0] = -\omega^2\, A_0 \sin[\omega\, t - kx + \varphi_0]$$

oder, nach Kürzen der Sinusfunktionen und Amplituden auf beiden Seiten,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{u_\varphi^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\omega^2}{k^2} = u_\varphi^2$$

Dieses Ergebnis entspricht aber genau der Grundgleichung der Wellenlehre:

$$u_\varphi = c = \lambda\,\nu = \frac{\omega}{k} \qquad \text{(Grundgleichung der Wellenlehre)}$$

und erfüllt somit die Wellengleichung:

$$-k^2\,u_\varphi^2\,A_0 \sin[\omega\,t - kx + \varphi_0] = -\omega^2\,A_0 \sin[\omega\,t - kx + \varphi_0]$$

Diese Gleichung enthält nur *eine* (allgemeine) Systemkonstante, die (Phasen-) Geschwindigkeit u_φ. Sie gilt für *jedes* Wellenmedium.
Wir sehen, daß für jede Art von Wellen – Wasserwellen, Seilwellen, akustische (Schall-) Wellen, elektrische Wellen, auch elektromagnetische Wellen (Radio-, Radar-, Infrarotlicht-, sichtbares Licht-, UV-Licht-, Röntgen- und schließlich Gammastrahlungs-Wellen) – dieselbe Gleichung gilt, wobei die einzige auftretende Konstante (durch das Ausbreitungsmedium bestimmt) die Ausbreitungsgeschwindigkeit u_φ ist.
Diese Geschwindigkeit u_φ hängt wiederum von zwei Systemkonstanten ab, die man (verallgemeinert) die »Konstante der Rückstellkraft« K und die »Konstante der Trägheit« T nennen könnte. Bei Seilwellen sind sie eben die Zugkraft am Seil und seine lineare Massendichte. Einige weitere Beispiele sind in der Tabelle 0.6 auf der nächsten Seite aufgeführt.
In jedem Fall ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen u_φ gegeben durch:

$$u_\varphi = \sqrt{\frac{K}{T}}$$

Tabelle 0.6.

System	»Rückstellkraft« K	»Trägheit« T
elastisches Seil	Zugkraft Z	lineare Massendichte ρ_l
Wasserwellen	Oberflächenspannung σ bzw. Schwerkraft mg	Volumen-Massendichte ρ
Schallwellen	Luftdruck $P\kappa$	Volumen-Massendichte ρ
elektrische Wellen auf einem Kabel	elektr. Kapazität/Länge, $\frac{1}{l\,C_0}$	Induktivität/Länge, $\frac{L_0}{l}$
elektromagnetische Wellen im Vakuum	elektr. Feldkonstante des Vakuums, $\frac{1}{\varepsilon_0}$	magn. Feldkonstante des Vakuums, μ_0
elektromagnetische Wellen in einem Medium	elektr. Feldkonstante des Mediums, $\frac{1}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0}$	magn. Feldkonstante des Mediums, $\mu_r\,\mu_0$

(vgl. $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ bei Schwingungen!). Die Wellengleichung, wie wir sie aufgeschrieben haben, ist analog zur Schwingungsgleichung ohne Dämpfung oder externe Kraft. Sie sagt nichts über den Ursprung der Wellen oder ihrer evtl. Dämpfung aus! (Beispiele: stehende Wellen auf Saite, Wasserwellen).

Interferenz von Wellen, stehende Wellen

Finden mehrere Wellenbewegungen im selben Medium statt, so können diese durch Superposition, d.h. Überlagerung bzw. Addition der einzelnen Wellenbewegungen dargestellt werden.

Da die Wellenbewegung positive und negative Amplituden aufweist, kann diese Addition von einzelnen Wellenbewegungen zur Verstärkung oder auch Auslöschung der Bewegung oder der Schwingung führen. Diese Phänomene bezeichnet man als Interferenzerscheinung.

Einfache Lösungen der Wellengleichung, die durch Interferenz hervorgerufen werden sind stehende Wellen. Diese werden hervorgerufen, wenn zwei identische Wellen in entgegengesetzter Richtung aufeinander zulaufen und zur Überlagerung kommen:

$$\begin{aligned}
\Psi_1(x,t) &= A_0 \sin(\omega t - kx) \\
\Psi_2(x,t) &= A_0 \sin(\omega t + kx + \varphi_0) \\
mit \quad \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t) &= 2A_0 \sin(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx + \varphi_0}{2})\cos(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx - \varphi_0}{2}) \\
\Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t) &= 2A_0 \sin(\omega t + \frac{\varphi}{2})\cos(-kx - \frac{\varphi}{2})
\end{aligned}$$

Dies ist keine fortschreitende Welle mehr, da der charakteristische Term mit $(\omega t - kx)$ in der Sinus- und Kosinusfunktion fehlt. Unabhängig vom Ort schwingen nun alle Teilchen in gleicher Phase (Sinusterm) und nur ihre Amplitude ist Ortsabhängig (Kosinusterm). Die Schwingungsknoten (Amplitude Null) und die Schwingungsbäuche (Amplitude maximal) sind ortsfest. Es berechnen sich die Positionen der Knoten und Bäuche für $\varphi = \pi$ und natürlichen Zahlen n aus:

$$
\begin{aligned}
x_K &= n\frac{\lambda}{2} \\
x_B &= (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}
\end{aligned}
$$

Diese kann man gut auf einer schwingenden Saite oder an einem schwingenden Seil sehen.

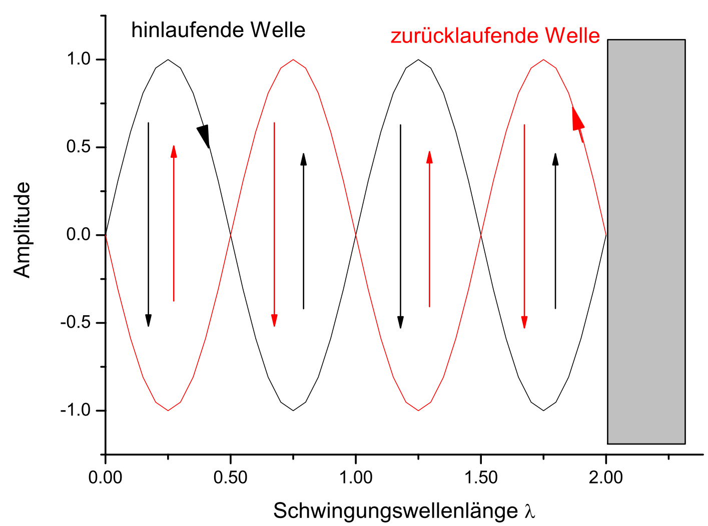

Abbildung 0.18. Interferenzerscheindung der stehenden Welle

Wird eine stehende Welle in einem einseitig geschlossenen Rohr erzeugt (z.B. Panflöte), so befindet sich ein Wellenknoten am geschlossenen Ende (Phasensprung von π) und ein Wellenbauch am offenen Ende (kein Phasensprung). Die Wellenlänge der Grundschwingung des Rohres (n=1) ergeben sich aus $l = (2n-1)\frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4\nu} =$, wobei l die Rohrlänge ist.

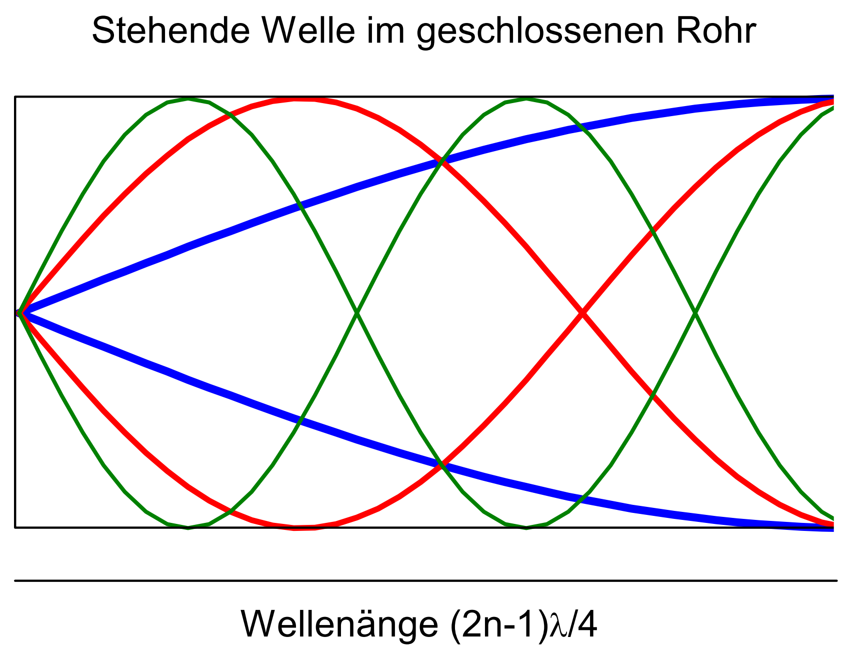

Abbildung 0.19. Stehenden Welle im einseitig geschlossenen Rohr

Wird eine stehende Welle in einem beidseitig offenen Rohr erzeugt, so befinden sich an beiden Seiten des Rohres Wellenbäuche. Die Wellenlängen der Schwingungen des Rohres der Länge l ergeben sich zu $\lambda = \frac{2l}{n} = \frac{c}{\nu}$

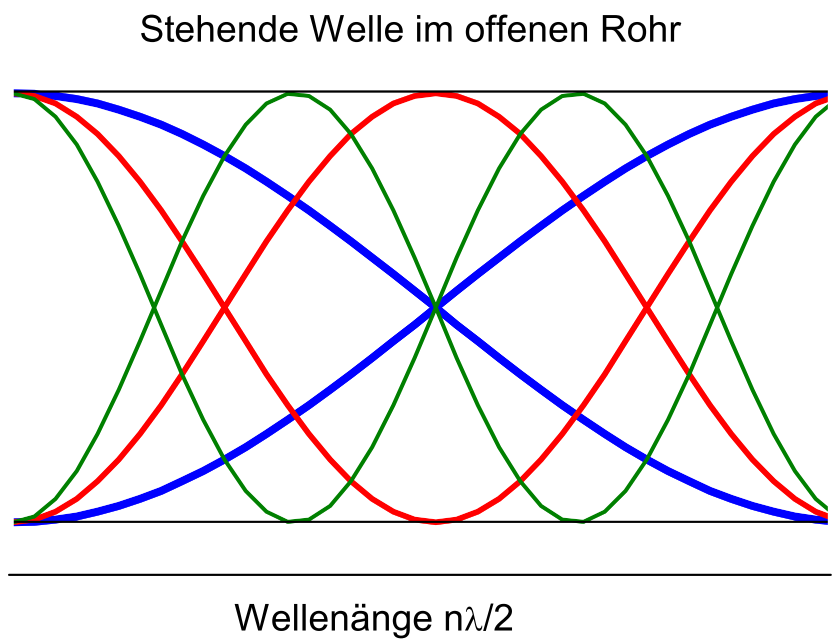

Abbildung 0.20. Stehenden Welle im offenen Rohr

Wellengruppen, Wellenpakete

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Gesamtphase $[\omega\, t - kz + \varphi_0]$ einer Welle ändert (durch Ableiten der Gesamtphase nach t zu erhalten) heißt *Phasengeschwindigkeit* u_φ, mit $u_\varphi = \omega/k$ bzw. $u_\varphi = \lambda\nu$. Dies ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines (unendlichen) *Wellenzuges* der Form

$$\Psi(z,t) = A_0 \cos[\omega t - kz + \varphi_0]\,.$$

In der Natur kommen solche Wellenzüge kaum vor; stattdessen haben wir zeitlich und örtlich mehr oder weniger begrenzte Wellen*gruppen* oder Wellenpakete. Eine Wellengruppe entsteht durch Überlagerung von zwei oder mehr Wellenzügen *gleicher Phase und Richtung* aber *unterschiedlicher Frequenz und Wellenlänge*. Als Beispiel nehmen wir zwei Kosinuswellen:

$$\Psi_{\mathrm{WP}}(z,t) = A_0 \cos[\omega_1 t - k_1 z] + A_0 \, \cos[\omega_2 t - k_2 z]$$

durch Verwendung des Additionssatzes für Kosinusfunktionen erhalten wir:

$$\Psi_{\mathrm{WP}}(z,t) = \Big\{ 2A_0 \cos[\Delta\omega t - \Delta k z] \Big\} \cos[<\omega>\ t - <k>\ z]$$

Dies hat die Form einer »{Gruppenamplitude}« × »[mittlere Wellenfunktion]« mit

$$\Delta\omega = \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}\,, \qquad \Delta k = \frac{(k_1 - k_2)}{2}$$

und

$$<\omega>= \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}\,, \qquad <k>= \frac{(k_1 + k_2)}{2}\,.$$

Die Geschwindigkeit der Wellengruppe, genannt Gruppengeschwindigkeit u_{G}, erhalten wir durch Ableiten des Arguments der Gruppenamplitude nach t, wobei wir die Gesamtphase festhalten:

$$[\Delta\omega\, t - \Delta k\, z] = \text{konst.}, \qquad \frac{\mathrm{d}[\Delta\omega\, t - \Delta k\, z]}{\mathrm{d}t} = \Delta\omega - \frac{\Delta k \mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$$

woraus

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = u_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}\,,$$

d. h.

$$u_G = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\,.$$

Die Beziehung zwischen ω und k, d.h. $\omega(k)$, wird *Dispersionsrelation* genannt: $\omega = u_\varphi\, k$. Falls $u_\varphi =$ konst., nennt man das Medium nichtdispersiv, $\omega(k)$ ist eine Gerade, und $u_G = u_\varphi$. Anderenfalls haben wir:

$$u_G = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = u_\varphi + k\left(\frac{\mathrm{d}u_\varphi}{\mathrm{d}k}\right)\ldots$$

In einem dispersiven Medium (z. B. Licht in Glas oder Wasser: »normale Dispersion«) gilt $\mathrm{d}u_\varphi/\mathrm{d}k < 0$ und $u_G < u_\varphi$.

Fourier-Analyse

Bisher haben wir nur harmonische Schwingungen oder Wellen betrachtet: diejenige, die mit einer einfachen Sinus- oder Kosinusfunktion beschrieben werden können. In der Natur kommen jedoch viele periodische Vorgänge vor, die nicht harmonisch, sondern durch kompliziertere Funktionen zu beschreiben sind. Sie können trotzdem alle ähnlich behandelt werden, wie die harmonischen Phänomene, die wir bisher angeschaut haben.

Dies ist von dem Mathematiker J. FOURIER vor längerer Zeit gezeigt worden. Der *Satz von* FOURIER sagt, daß *jede* periodische Funktion, egal welcher Form, als Summe von Sinus- und/oder Kosinus-Funktionen beschrieben werden kann:

$$F(t) = \sum A(\omega_i) \sin(\omega_i \, t)$$

Hier ist $F(t)$ die (beliebige) periodische Zeitfunktion, die ω_i sind Frequenzen (eine Grundfrequenz ω_1 und Vielfache davon), die durch den Laufindex i numeriert sind, die $A(\omega_i)$ sind Amplituden (d. h. Zahlen, die die Wichtigkeit der jeweiligen Frequenzkomponenten ω_i angeben), und die Summe erfaßt soviele Freqenzen (Werte vom Laufindex i) wie nötig, um die Funktion $F(t)$ darzustellen.

Die Angabe der Frequenzen ω_i und Amplituden $A(\omega_i)$ für eine (z. B. gemessene) Funktion $F(t)$ nennt man »Fourier-Zerlegung«; umgekehrt kann man eine beliebige Funktion $F(t)$ durch Wahl der Amplituden und Frequenzen aufbauen – dies heißt »Fourier-Synthese«. Der Überbegriff für beide Verfahren ist die »Fourier-Analyse«. Das Ergebnis – in beiden Richtungen – nennt man eine »Fourier-Transform«.

Diese Verfahren sind in den letzten 20 Jahren – seitdem es preiswerte und leistungsfähige elektronische Rechner gibt – sehr wichtig geworden. Sie werden in der Strukturanalyse der Materie mittels Streuexperimenten (Elektronenstreuung, Neutronenstreuung, Röntgenstreuung), aber auch in der Spektroskopie[2] und

[2] Infrarot Schwingungs-Spektroskopie an Molekülen, magnetische Kernresonanz-Spektroskopie

vor allem bei bildgebenden Methoden[3] verwendet, um die erhaltenen Informationen nutzbar zu machen.

Auch nicht periodische Funktionen $G(t)$ können so analysiert werden – nur dann muß die Summe durch ein Integral ersetzt werden, die Frequenzen werden nun kontinuierlich variiert:

$$G(t) = \int A(\omega) \sin(\omega\, t)\, \mathrm{d}\omega \qquad \text{bzw.} \qquad A(\omega) = \int G(t) \sin(\omega\, t)\, \mathrm{d}t\ .$$

[3] Resonanz-Tomographie, Röntgen-Tomographie, Positron-Emissions-Tomographie

Akustik

Die Akustik behandelt die Erzeugung und Ausbreitung von Schallwellen. Der Schall ist eine longitudinale Welle, die sich in einem materiellen Medium ausbreitet (Luft, Wasser, Metall usw.). Er spielt eine besonders wichtige Rolle auch in den biomedizinischen Wissenschaften, weil Menschen und Tiere Sinnesorgane für die Aufnahme von Schallwellen besitzen. Wie bereits besprochen, hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit u von Schallwellen von zwei Eigenschaften des Mediums ab, von seiner »rücktreibenden Kraft« (durch den Kompressionsmodul bzw. Elestizitätsmodul bestimmt) sowie von seiner Trägheit (durch die Massendichte ρ bestimmt; vgl. Seilwellen).

In Medien, wo sich der Schall dreidimensional ausbreitet, ist der Kompressionsmodul maßgebend:

$$u = \sqrt{\frac{K}{\rho}}\,.$$

Dies ist der Fall bei Gasen und Flüssigkeiten. In Gasen läßt sich der Kompressionsmodul K mit Hilfe der Zustandsgleichung (siehe Wärmelehre im Abschnitt 1, Seite 140) als Funktion des Drucks P ausdrücken: $K = P\kappa$ [wobei angenommen wird, daß die Schallausbreitung so schnell abläuft, daß kein Temperaturausgleich möglich ist (adiabatisch). Dann ist κ der sogenannte Adiabatenexponent ($\kappa \simeq 1{,}4$ für Luft)].

Da Dichte und Druck einander proportional sind, ergibt sich für die Schallgeschwindigkeit in Luft dann:

$$u = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}}$$

Wo R die »allgemeine Gaskonstante«, T die absolute Temperatur und M die Molmasse des Gases sind (Zahlenwert für Luft bei $20\,^\circ\mathrm{C}$: $u = 343$ m/s).

Bei Schallausbreitung in z. B. einem Metallstab ist der Elastizitätsmodul E maßgebend, die Schallgeschwindigkeit ist gegeben durch

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \; .$$

In festen Medien können auch transversale Schallwellen auftreten.

Die Größe, die als »Auslenkung« von einer Schallwelle angesehen werden kann, ist die lokale Dichte des Mediums: die Welle besteht aus einer Folge von Verdichtungen und Verdünnungen entlang der Ausbreitungsrichtung. In Gasen sind Druck und Dichte einander proportional, so daß eine Schallwelle auch als Druckwelle in solchen Medien beschrieben werden kann.

Um uns die Erzeugung einer Schallwelle vorzustellen, nehmen wir als Modell eine lange Säule des Mediums (z. B. Wasser in einem Rohr, oder eine Luftsäule in einer Orgelpfeife). An einem Ende wird durch einen Kolben ein Stoß auf das Medium abgegeben, der eine Schallwelle erzeugt, welche sich in dem Medium mit der Geschwindigkeit u entlang der Säulenachse fortpflanzt. Der Kolben wird mit der (kleineren) Geschwindigkeit v während des Zeitintervalls Δt mit der Kraft F bewegt, und erzeugt somit den Kraftstoß $F\,\Delta t$. Mit der Definition des Druckes $P = F/A$ (Kraft pro Fläche), ist dann der Kraftstoß $F\,\Delta t = A\,\Delta P\,\Delta t$.

Aus der Mechanik wissen wir, daß der Kraftstoß gleich die Impulsänderung (d. h. Masse $\cdot$ Geschwindigkeit) ist. Die von dem Kolben bewegte Masse des Mediums beträgt $\Delta m = \rho\,V = \rho\,A\,\Delta x$ (wo ρ die Massendichte und V das in der Zeit Δt bewegte Volumen des Mediums sind, mit Δx = Bewegungsstrecke der Welle, wobei $u = \Delta x/\Delta t$ oder $\Delta x = u\Delta t$ gilt; siehe Abb. 0.21 auf der folgenden Seite): die Impulsänderung Δmv ist somit

$$\Delta mv = (\rho\,A\Delta x)v = (\rho\,A\,u\Delta t)v$$

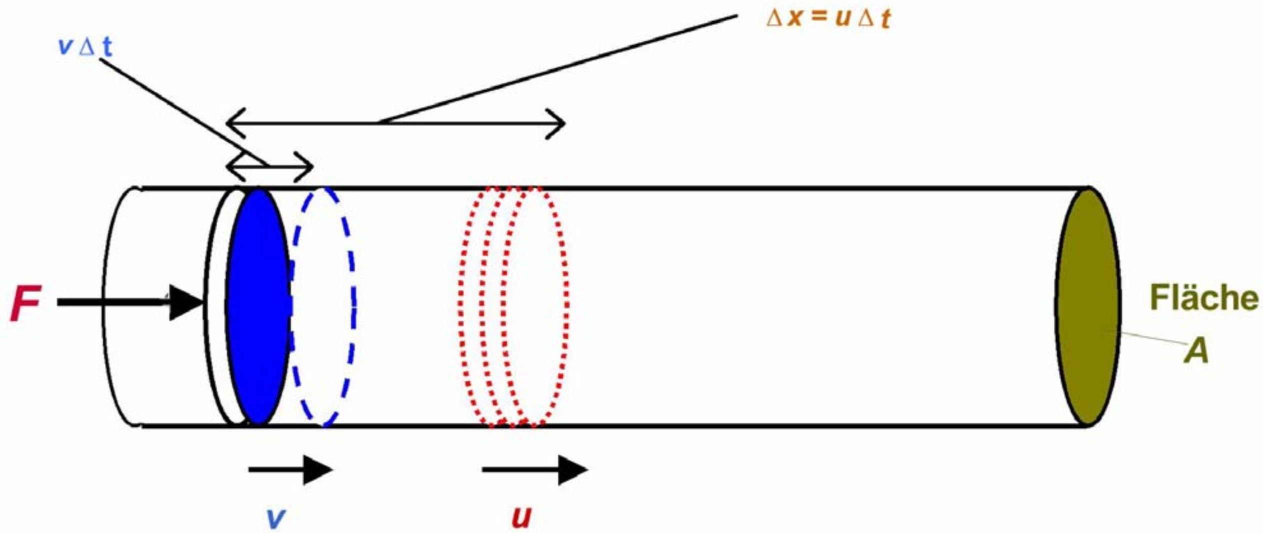

Abbildung 0.21.

Gleichsetzen vom Kraftstoß $A\,\Delta P \Delta t$ mit der Impulsänderung ergibt:

$$A\Delta P\Delta t = (\rho A u \Delta t)v \qquad \text{oder} \qquad \Delta P = \rho u v \tag{0.1}$$

Die Druckänderung hängt mit der Volumenänderung über dem Kompressionsmodul zusammen:

$$\Delta P = -K\frac{\Delta V}{V} \tag{0.2}$$

Das Volumen V, das in der Zeit Δt in Bewegung ist, beträgt $A\Delta x = Au\Delta t$ (s. oben); die Volumen*änderung* in der Zeit Δt ist durch die Bewegung des Kolbens gegeben, $\Delta V = -Av\Delta t$. Einsetzen in die Beziehung (0.2) für ΔP ergibt:

$$\Delta P = \frac{-K\,(-Av\Delta t)}{Au\Delta t} = K\frac{v}{u}\,. \tag{0.3}$$

Der Vergleich von Gl. (0.3) mit Gl. (0.1) ergibt dann:

$$K\frac{v}{u} = \rho u v$$

oder

$$u^2 = \frac{K}{\rho}$$

d. h.

$$u = \sqrt{\frac{K}{\rho}}\ .$$

Damit ist die obige Beziehung für die Schallgeschwindigkeit u bestätigt.

Schallstärke und Lautstärke

Ein Mass für die Schallstärke in einer sich dreidimensional ausbreitenden Schallwelle ist die *Intensität* der Welle, definiert als die von der Welle übertragene Schallenergie pro Zeit und Fläche (die Schallleistung, die auf eine Fläche A fällt):

$$I = \frac{\Delta E}{A\,\Delta t}\ .$$

Unser Hörvermögen empfindet nicht direkt die Schallintensität; vielmehr ist die gehörte Lautstärke logarithmisch. Damit hat das Ohr eine große dynamische Skala, es kann über einen sehr großen Bereich von Schallstärken den Schall aufnehmen. Man definiert deshalb die Lautstärke β als Dezimal-Logarithmus der Schallintensität:

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

(Einheit »Dezibel (akustisch)« $\widehat{=}$ $\mathrm{dB_A}$). Hier ist I_0 die Schallintensität an der Hörschwelle, $I_0 = 10^{-12}\mathrm{W/m^2}$. Demnach ist die Lautstärke der Hörschwelle gegeben durch

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I_0}{I_0} \right) = 10 \log(1) = 0 \ \mathrm{dB_A}$$

und die Schmerzschwelle $I_\mathrm{S} \widehat{=}\ 1\mathrm{W/m^2}$ durch

$$\beta = 10 \log 10^{12} = 120 \ \mathrm{dB_A} \ .$$

Akustische Schwebungen

Überlagert man zwei Schallwellen mit unterschiedlicher Frequenz, so entstehen Schwebungen (vgl. »gekoppelte Schwingungen«). Die beiden Wellen schwächen sich ab und verstärken sich abwechselnd; man hört dieses auf und ab als periodische Änderung der Lautstärke, die um so langsamer abläuft, je näher die beiden Frequenzen zueinander liegen. Mathematisch läßt sich dieses Phänomen als Überlagerung von zwei Sinus- oder Kosinuswellen beschreiben (siehe »Wellengruppen«), so daß das Ergebnis als Produkt einer zeitabhängigen Amplitude mit einer »mittleren Welle« geschrieben werden kann:

$$\Psi(t) = \{A_0 \ \cos\left[\Delta\omega \, t\right]\} \cos[<w> t] \ .$$

Die Wellenfunktion Ψ stellt hier entweder den Schalldruck oder die Dichte des Mediums dar (hier ist nur die Zeitabhängigkeit berücksichtigt, die Ortsabhängigkeit gehorcht aber auch einer ähnlichen Beziehung). Die Schwebungsfrequenz $\Delta\omega$ ist gegeben durch $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ und wird sehr klein, wenn sich die beiden überlagerten Frequenzen sehr nah liegen; die mittlere Frequenz $< \omega >$ ist der Mittelwert der überlagerten Frequenzen: $<w>= (\omega_1 + \omega_2)/2$.

Der Ultraschall

Menschen hören in einem Frequenzereich zwischen ca. 10 Hz und ca. 20 kHz. Schallwellen, die wesentlich höhere Frequenzen haben, heißen » Ultraschall«. Sie breiten sich in der Luft kaum aus, dafür aber in kondensierten Medien – Wasser oder feste Materie – mehr oder weniger gut. Sie können daher benutzt werden, um unsichtbare Strukturen innerhalb der Materie, z. B. auch innerhalb des menschlichen Körpers, zu untersuchen. Reflektion der Ultraschallwellen an inneren Strukturen führt nämlich zu Echos, die nachgewiesen und zu einem Bild verarbeitet werden können.

[Versuche mit Ultraschallgenerator und mit Echobildern]

Elektromagnetische Wellen

Allgemeine Eigenschaften

Elektromagnetische Wellen, Entstehung und Ausbreitung, das elektromagnetische Spektrum

Die zweite Wellenart, außer Schallwellen, die direkt von menschlichen Sinnesorganen wahrgenommen werden kann, sind die Lichtwellen. Sie sind Beispiele für elektromagnetische Wellen und bilden einen (kleinen) Teil des elektromagnetischen Spektrums.

Im Gegensatz zu Schallwellen sind elektromagnetische Wellen nicht an ein materielles Medium gebunden – sie können sich auch in einem perfekten Vakuum ausbreiten. Sie sind auch nicht longitudinale, sondern transversale Wellen. Die »Auslenkungsgrößen« sind nicht mechanische Eigenschaften (wie z. B. der Druck oder die Dichte bei Schallwellen), sondern, wie der Name besagt, elektrische und magnetische Größen: genauer, ein elektrisches und ein magnetisches Feld.

Die Eigenschaften solcher Felder werden wir uns später genauer anschauen; zunächst reicht es zu wissen, daß sie Energie speichern können, und daß sie sich gegenseitig aufbauen können (wenn sie zeitabhängig sind, z. B. sinusförmig wie in einer harmonischen Welle).

Elektromagnetische Wellen sind tatsächlich harmonisch, sie bestehen aus sinusförmigen elektrischen und magnetischen Feldern, welche senkrecht zueinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen (daher *transversale* Wellen!). Diese Felder schwingen in der Zeit mit der Frequenz ν (bzw. der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\,\nu$) und wiederholen sich als Funktion vom Ort entlang der Ausbreitungsrichtung nach der Wellenlänge λ (bzw. Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$).

Es gilt die übliche Grundgleichung der Wellenlehre:

$$c = \lambda\,\nu = \frac{\omega}{k}$$

wo c die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Wellen ist. Sie ist wiederum eine Funktion der Konstanten des Mediums.

Bei Ausbreitung im Vakuum ist das »Medium« eben dieses Vakuum: es hat eine elektrische Eigenschaft (die »Durchlässigkeit« oder » Permittivität« für elektrische Felder, ausgedrückt durch die »elektrische Feldkonstante« ε_0), sowie eine magnetische Eigenschaft (die »Permeabilität« für magnetische Felder, gegeben durch die entsprechende »magnetische Feldkonstante« μ_0).

In Analogie zu mechanischen Wellen (z. B. Seilwellen) kann man den Kehrwert der Konstanten ε_0 als eine Art »rücktreibende Kraftkonstante« (für elektrische Ladungen) und die Konstante μ_0 als eine Art »Trägheitskonstante« (für die Bewegung von elektrischen Ladungen) bezeichnen. Diese Analogie werden wir bei der Elektrizitätslehre weiter ausbauen. Es folgt für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\,\mu_0}}$$

Sie ist eine Naturkonstante (sogar die best-bekannte Naturkonstante) und hat den Zahlenwert 299 792 456,2 m/s (also etwa 1 Million mal schneller als der Schall in Luft).

Diese Geschwindigkeit gilt für alle Arten von elektromagnetischen Wellen im Vakuum [d. h. für Licht, aber auch für Radiowellen, Mikrowellen (Radar), »Millimeterwellen«, infrarotes Licht (»Wärmestrahlung«), ultraviolettes Licht, Röntgenstrahlen und Gammastrahlen]. In Materie kommen die entsprechenden material-spezifischen Konstanten dazu (die »relative Permittivität« oder »Dielektrizitätskonstante« ε_{r} sowie die »relative Permeabilität« μ_{r}). Beide sind üblicherweise ≥ 1, so daß die sich ergebende Geschwindigkeit

$$c_{\mathrm{M}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\, \varepsilon_{\mathrm{r}}\, \mu_0\, \mu_{\mathrm{r}}}}$$

kleiner als c (im Vakuum) ist. Das Verhältnis $N = c/c_{\mathrm{M}}$ ist auch eine Eigenschaft der Materie und nennt sich Brechungsindex oder Brechzahl:

$$N = \frac{c}{c_{\mathrm{M}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\, \varepsilon_{\mathrm{r}}\, \mu_0\, \mu_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_0\, \mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\, \mu_{\mathrm{r}}} \geq 1\ .$$

Wir werden sie in der Optik (siehe Abschnitt 3, Seite 231) verwenden können.

Entstehung von elektromagnetischen Wellen

Ebenso wie Seilwellen durch eine Beschleunigung von Seilabschnitten oder Schallwellen durch die Beschleunigung von Materieteilchen (Atomen oder Molekülen in dem Medium) entstehen, kommen elektromagnetische Wellen durch beschleunigte elektrische Ladungen zustande.

Diese Ladungen können in einzelnen Atomen gebunden sein (Lichtemission durch elektronische Energieübergänge in Atomen oder Molekülen), sie können im freien Raum sein (schwingende Elektronen im Vakuum in einem Radarsender [Klystron] oder in Materie [schwingende Ladungen in einer Sendeantenne]), sie können selbst die Ladungen im Atomkern sein (Emission von Gammastrahlen durch einen angeregten Kern).

Die elektromagnetischen Wellen gehorchen einer Wellengleichung, genau derjenigen, die wir für die Seilwellen hergeleitet haben. Für das elektrische Feld E lautet sie (eindimensional):

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{c^2}\right) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Die Konstante c ist wieder die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im Vakuum.

Das elektromagnetische Spektrum

Das elektromagnetische Spektrum erstreckt sich über viele Größenordnungen in ν und λ, und entsprechend in der Energie der Wellen (die proportional ν ist), siehe dazu Abb. 0.22 auf der nächsten Seite.

Die Art und Größe des »Wellengenerators«, welcher die Wellen ausstrahlt, sind auch sehr unterschiedlich: für langwellige Radiowellen ist er eine Antenne von mehreren hundert Meter Länge; für Mikrowellen eine Vakuumröhre von einigen cm Durchmesser; für Licht einzelne Atome oder Moleküle; und für γ-Strahlen, einzelne Atomkerne. Grundsätzlich gilt aber:

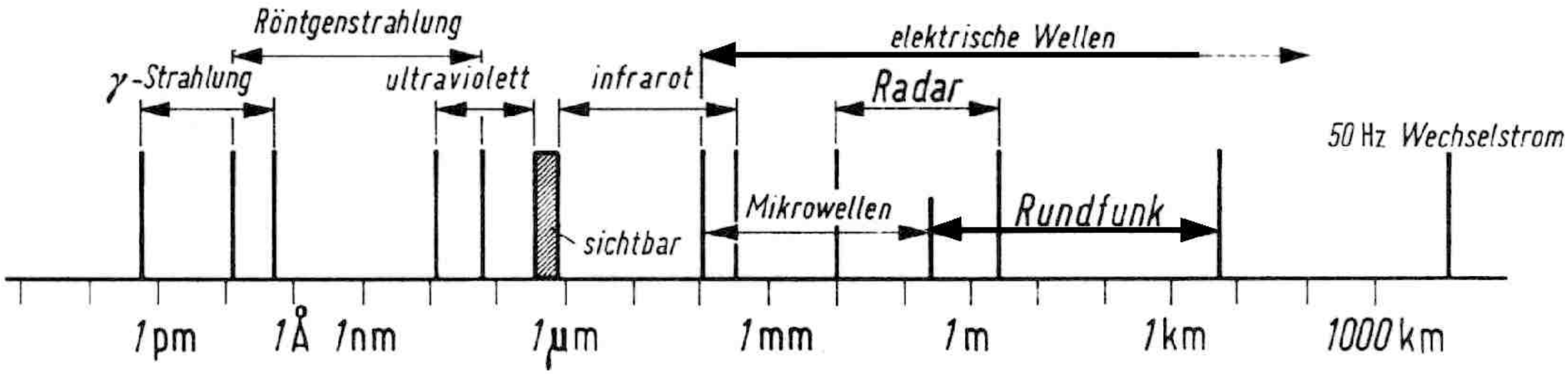

Abbildung 0.22.

Beschleunigte Ladungen strahlen Energie in Form von elektromagnetischen Wellen aus.