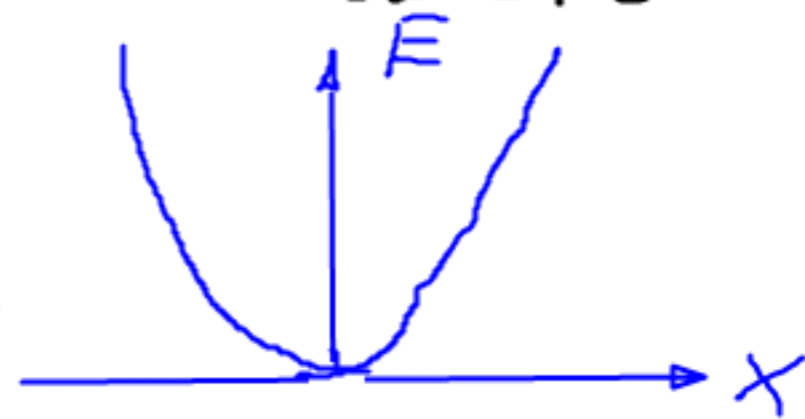


4.4 Der harmonische Oszillator

Kraft $F = -DX$; $V = \frac{1}{2} Dx^2$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} Dx^2\psi = E\psi$$



class. Schwingungsgl. $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ $D = \omega^2 m$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} \omega^2 m x^2 \psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \frac{m\omega}{\hbar} + \frac{1}{2} \omega^2 m \left\{ \frac{\hbar^2}{m\omega} \right\} \frac{\psi}{\hbar} = \begin{cases} x = \xi \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \\ \xi = x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \end{cases}$$

$$\frac{\hbar\omega}{2} \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + E\psi - \frac{\hbar\omega}{2} \xi^2 \psi = E\psi \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \end{array} \right.$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \underbrace{\left(\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2 \right)}_C \psi = 0$$

$$\text{für } c=1 \quad \psi_0(x) = A e^{-x^2/2}$$

Allgemeiner Ansatz Beweis einsetzen

$$\psi(x) = H(x) e^{-x^2/2}$$

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - 2x \frac{dH}{dx} + (c-1)H = 0$$

Hermitsche Diff. Gleichung: Lösung

Hermitsche Polynome $H_\nu(x)$

$$H_\nu(x) = (-1)^\nu e^{x^2} \frac{d^\nu (e^{-x^2})}{dx^\nu}; \quad \nu = 0, 1, 2$$

$c-1 = 2\nu$

Potenzreihenentwicklung

endlich in ν $H(x) = \sum_{i=0}^{\nu} a_i x^i$ gleiche Potenzen
vergleichen

es gibt Rekursionsformel

$$(i+2) \cdot (i+1) a_{i+2} = [2i - (c-1)] a_i$$

höchste Potenz : $a_{i+2} = 0$

$$v = \frac{1}{2} (c-1) = \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right)$$

$$E = \left(v + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega \quad \text{Nullpunktenergie}$$

v : Schwingungszahl

Energieniveaus äquidistant

Abstand $\hbar\omega$

Eigenfunktionen

$v = 0$ Gauß f.
 $v \neq 0$ v Potenzen }

$v =$ Zahl der Knoten

hohes $v \rightarrow$ Korrespondenzprinzip

Tunnelleffekt

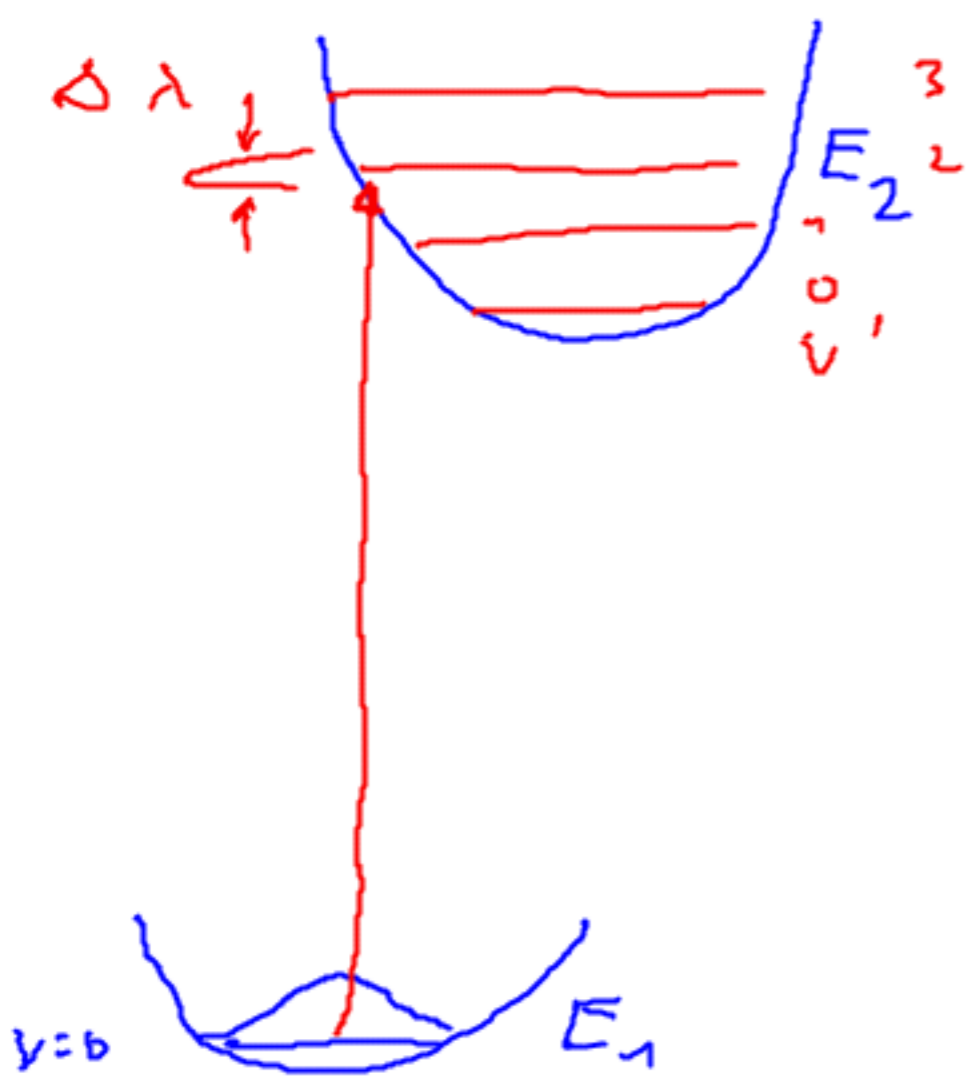
Wellenpaket: Überlagerung $\psi \pm 1$ und v
 Schwingen $e^{i(E_{cv+1} - E_{cv}) \cdot t/\hbar}$

$e^{i\omega t} \leftarrow$ Schwingung
 Frequenz wie
 klassisch

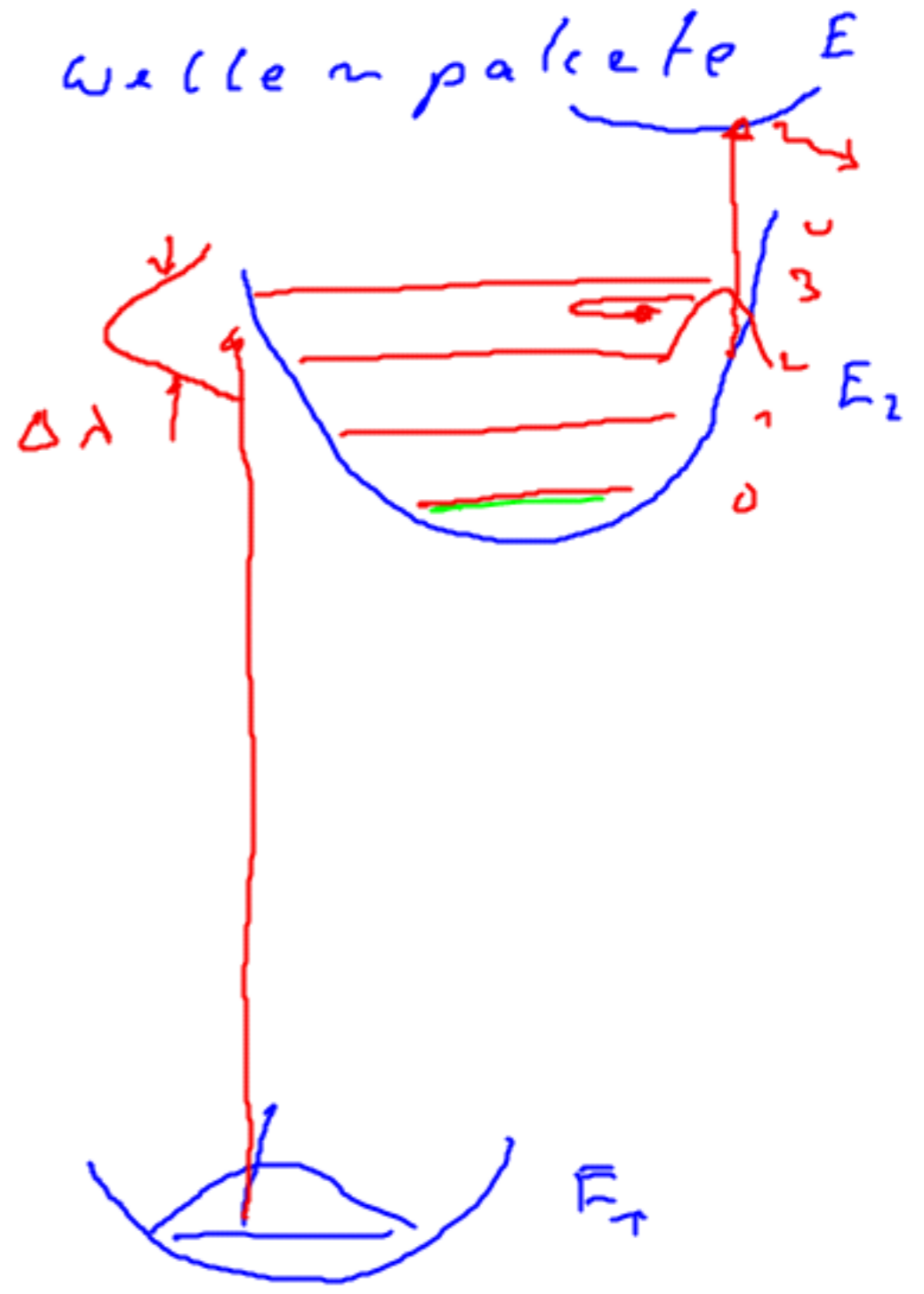
Beispiel



Absorption Eigenzustände

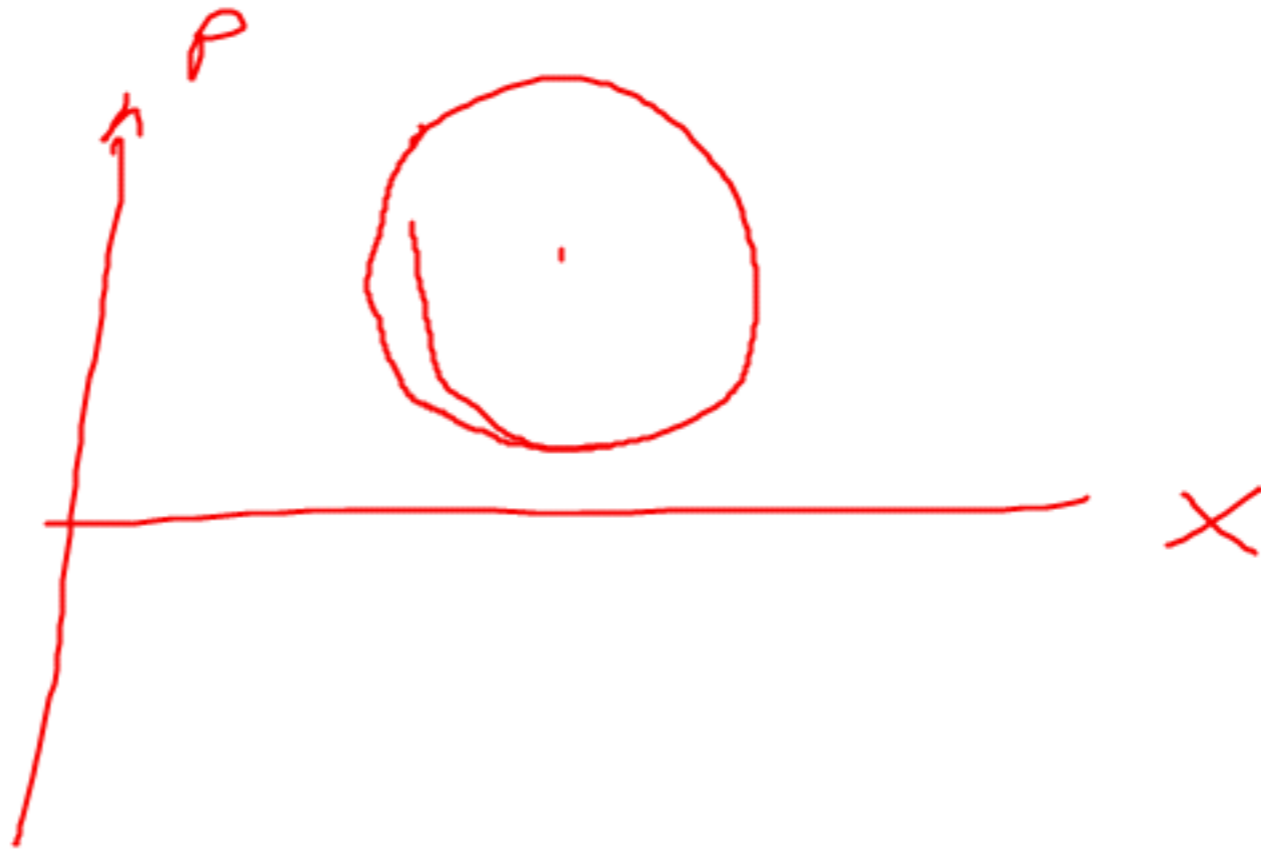


Pump Probe Wellenpakete



Phasenraum

$$\frac{p^2}{2m} + Dx^2 = E$$



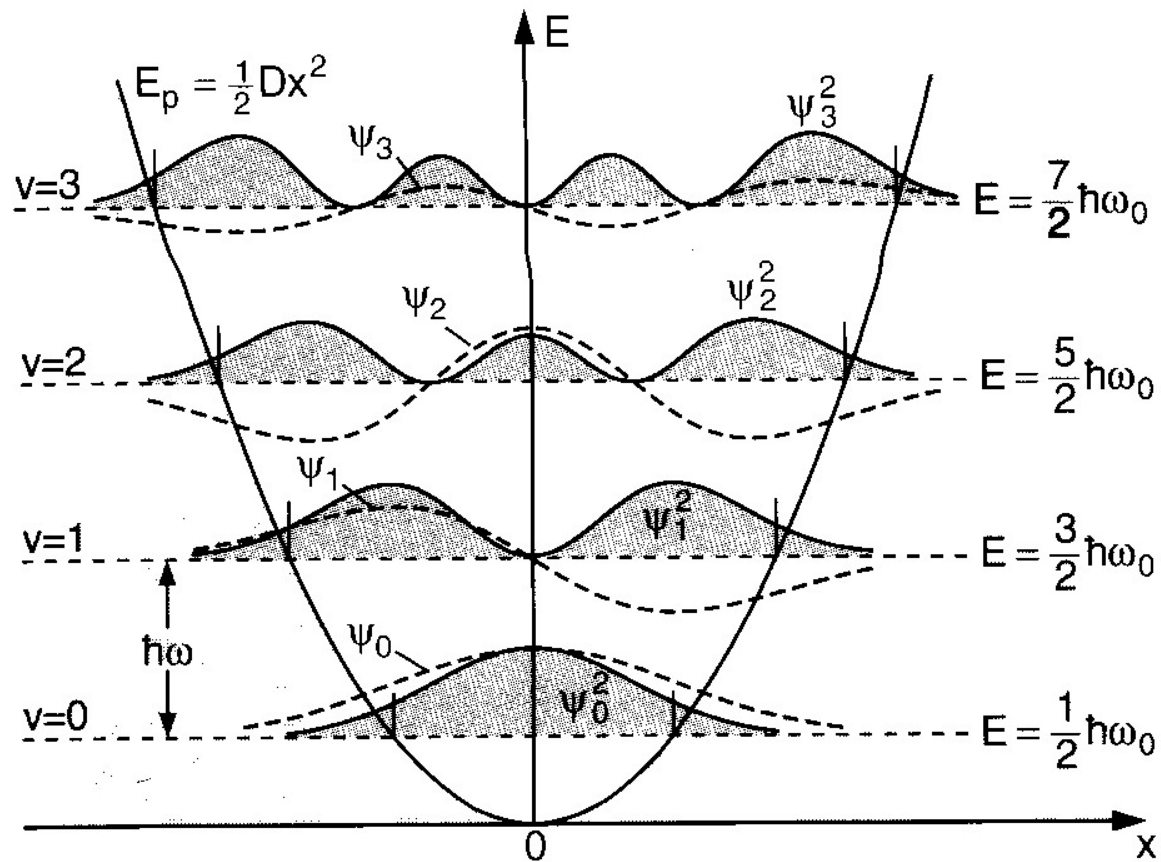


Abb. 4.19. Äquidistante Energieniveaus und Quadrate der Wellenfunktion im Parabelpotential des harmonischen Oszillators

Tabelle 4.1. Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators

v	$E(v)$	$\psi_v(\xi)$
0	$\frac{1}{2} \hbar \omega$	$N_0 \cdot e^{-\xi^2/2}$
1	$\frac{3}{2} \hbar \omega$	$N_1 \cdot 2\xi \cdot e^{-\xi^2/2}$
2	$\frac{5}{2} \hbar \omega$	$N_2 \cdot (4\xi^2 - 2) \cdot e^{-\xi^2/2}$
3	$\frac{7}{2} \hbar \omega$	$N_3 \cdot (8\xi^3 - 12\xi) \cdot e^{-\xi^2/2}$

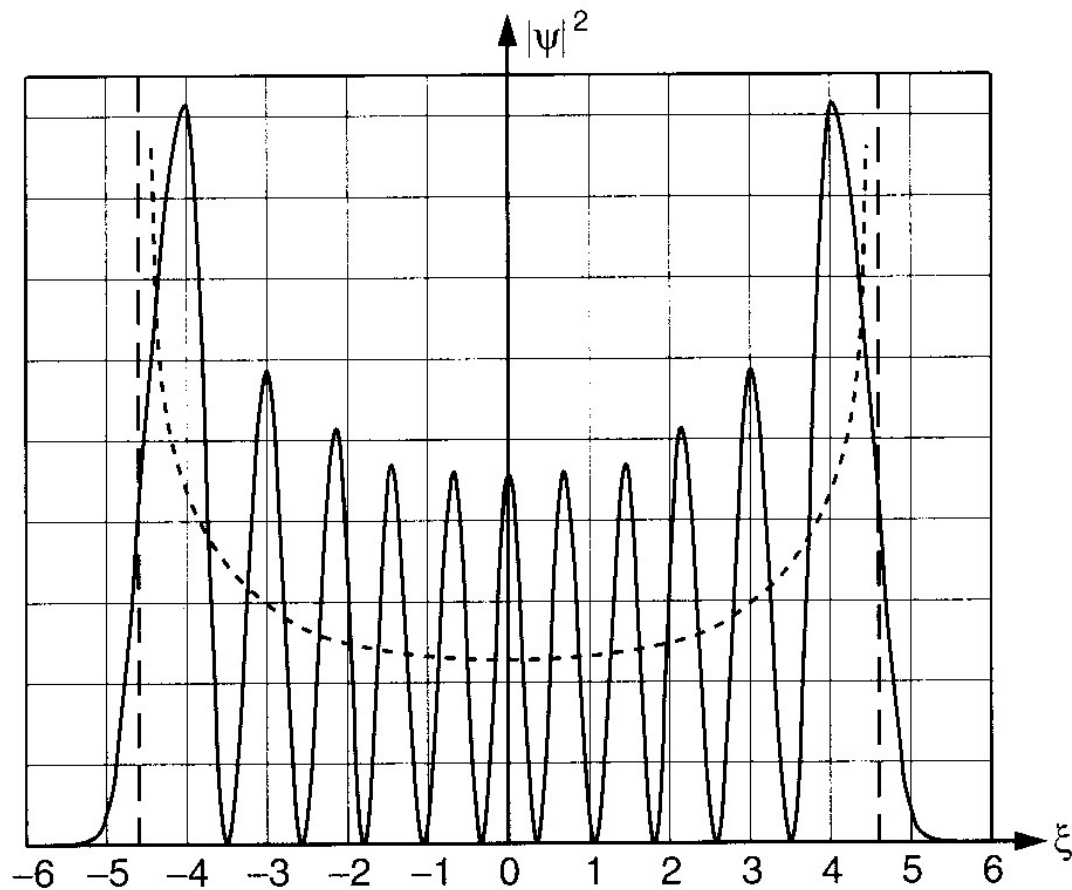


Abb. 4.20. Klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeit als Mittelwert der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsdichte für große Schwingungsquantenzahlen ν , hier gezeigt für $\nu = 10$. Die Abszisse ist in Einheiten von $\xi = x \cdot \sqrt{m\omega/\hbar}$ aufgetragen

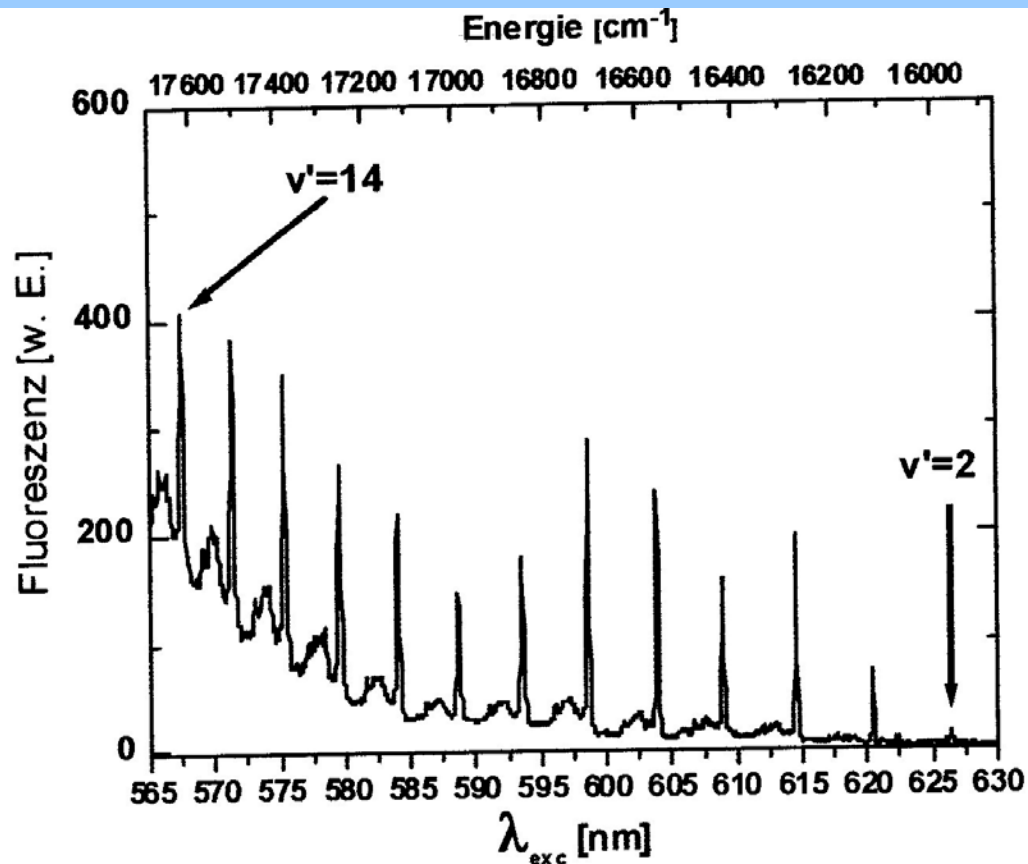
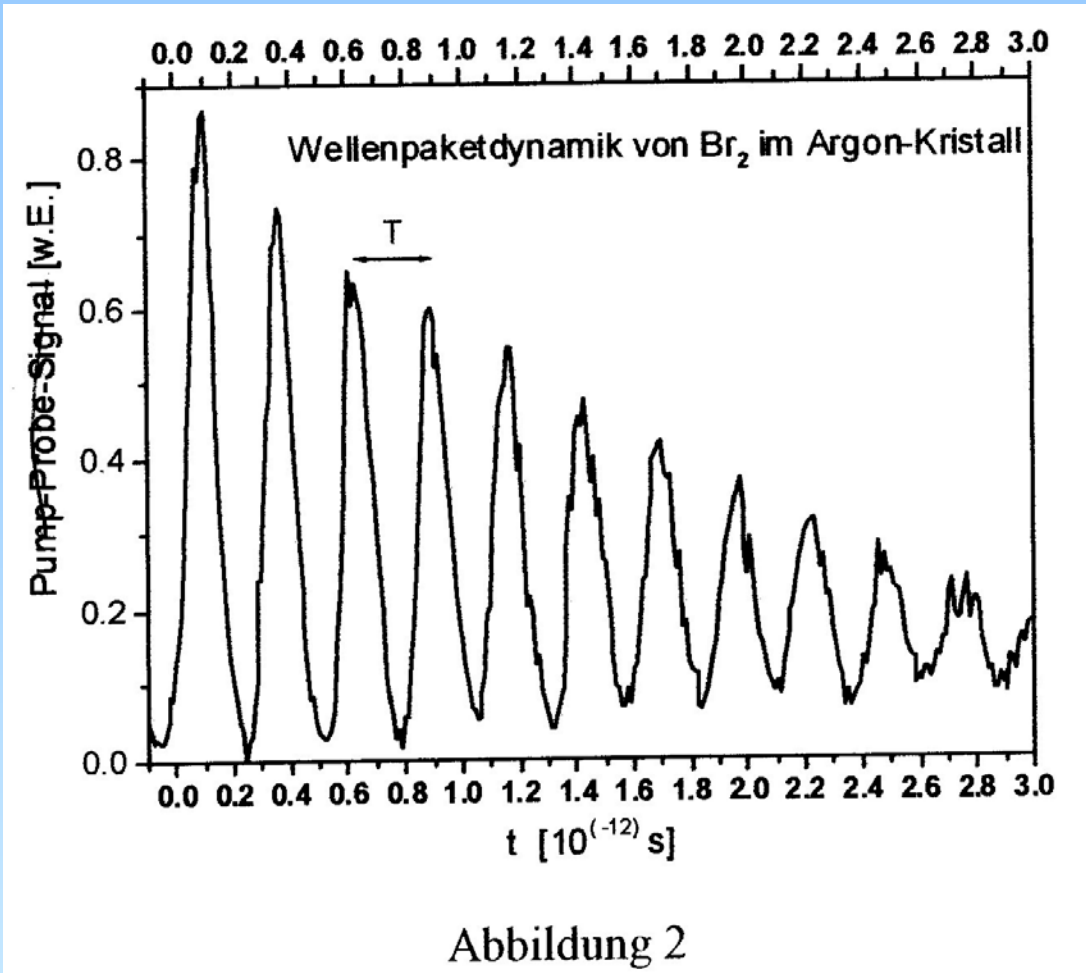


Abbildung 1

Abbildung 1 zeigt die gemessene Abfolge der Schwingungsenergien $E(v)$ von Br_2 Molekülen, die in ein Argon Kristall eingebettet sind, durchnummeriert vom Schwingungszustand $v=2$ bis $v=14$.



In Abbildung 2 wurden mehrere Schwingungswellenfunktionen zu einem Wellenpaket kohärent überlagert und die Oszillationsperiode T vermessen.