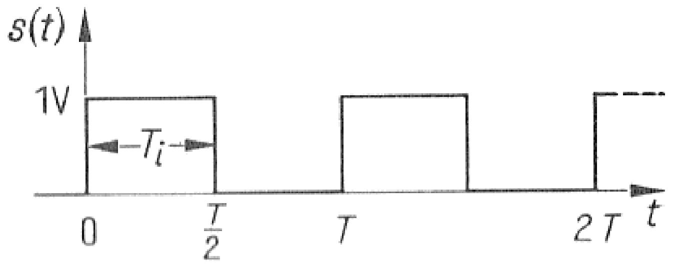
Sommersemester 2018, Holger Dau

Übungen zur Experimentalphysik II

Serie 6

Abgabe am Montag / Dienstag den 18. / 19. Juni in der Übungsgruppe

AUFGABE 1 – Fourier-Reihe der Rechteckschwingung (4 Pkt.)

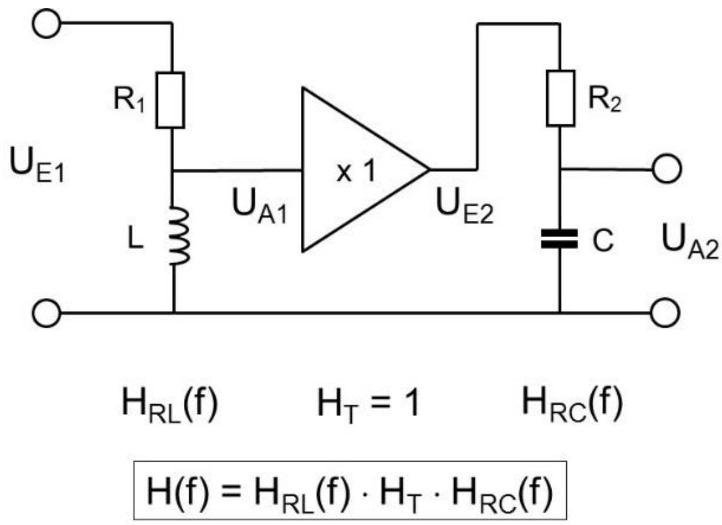


Bestimmen Sie für das links gezeigte periodische Signal die Koeffizienten der Fourier-Reihe. (Beachten Sie, dass das Signal mit der Amplitude von 1 V um den Mittelwert von +0,5 V oszilliert.)

Geben Sie auch eine Gleichung für s(t) bis einschließlich des $\sin(5\omega_0 t)$-Terms an, also:

(s(t) = ... mit Abbruch der Reihe nach dem $\sin(5\omega_0 t)$-Term).

AUFGABE 2 – Sprungantwort des Bandpass, H(f) => $U_A(t)$ (9 Pkt.)



Im obigen Schaltbild stellt das mit 'x1' markierte Dreieck einen idealen Trennverstärker dar, dessen Eingangs-widerstand unendlich groß ist (=> kein Einfluss auf RL-Glied) und dessen Ausgangs-widerstand unendlich klein ist (=> U_{E2} nicht durch das folgende RC-Glied beeinflusst); der Verstärkungsfaktor ist frequenzunabhängig gleich 1.

a) Berechnen Sie die komplexe Übertragungsfunktion H(f), die sich als Produkt der drei einzelnen Übertragungsfunktionen ergibt (siehe Glg. in Abbildung). (3 Pkt)

Anmerkung dazu: Die zweite Übertragungsfunktion, H_T, ist gleich "1". Das bedeutet, dass gilt: $U_{A1} = U_{E2}$. Könnte dann nicht das eingezeichnete Dreieck in dem Schaltbild ganz entfallen, bzw. durch eine direkte leitende Verbindung ersetzt werden? Die Antwort ist "Nein". Das eingezeichnete Dreieck, das mit "x 1" beschriftet ist, ist wichtig. Es deutet einen Transimpedanzverstärker an, bei dem der Eingangswiderstand sehr (unendlich) groß ist und der Ausgangswiderstand sehr (unendlich) klein ist. Dieser Verstärker kann heutzutage sehr einfach mit einem Operationsverstärker realisiert werden, der als "Spannungsfolger" geschaltet ist. Durch den Transimpedanzverstärker wird erreicht, dass die Verhaltensweisen des R_1L-Glieds und des R_2C-Glieds vollkommen unabhängig voneinander sind. Ohne den Verstärker wäre die Lösung der Aufgabe eine deutlich Andere.

b) Ermitteln Sie über die Fourier- bzw. Laplace-Transformation der Übertragungs-funktion die Sprungantwort des Systems. Da heißt, geben Sie den Zeitverlauf $U_{A2}(t)$ am Ausgang an, wenn zum Zeitpunkt t=0 das Eingangssignal $U_{E1}(t)$ von 0 V auf U_0 springt, also:

$$U_{E1}(t) = 0 \text{ für } t < 0,\ U_{E1}(t) = U_0 \text{ für } t > 0,\ \ U_{A2}(t) = ?$$

Versuchen Sie aber nicht, die Laplace-Transformierte unmittelbar über Lösung komplexer Integrale zu berechnen, sondern folgen Sie dem unten skizzierten Lösungsweg. (3 Pkt)

c) Es seien $R_2C = T_1 = 1\ \mu s$, $L/R_1 = T_2 = 3\ \mu s$, $U_0 = 10$ V. Geben Sie $U_{A2}(t)$ für diese Werte explizit an und skizzieren Sie den Zeitverlauf von $U_{A2}(t)$. (2 Pkt)

d) Welche Funktion beschreibt das Zeitverhalten für den „entarten Fall“ mit $T_1=T_2$? Zur Beantwortung der Frage müssen Sie auf Ihre Kenntnisse zur Theorie linearer Differentialgleichungen zurückgreifen oder dazu im Internet recherchieren. (1 Pkt)

Lösungsweg der Aufgabe 2b:

Die Laplace-Transformation ähnelt der Fouriertransformation, ist aber besser geeignet, um Einschaltprozess mathematisch einwandfrei zu behandeln. Zur Lösung der Aufgabe ist es nicht nötig, tiefer in den Unterschied von Laplace- und Fourier-Transformation einzusteigen. Der Übergang erfolgt hier einfach dadurch, dass Sie auf der Ebene der Übertragungsfunktion "iω" durch "p" ersetzen. (Hierbei ist "p" die

Standardabkürzung in der Theorie der Laplace-Transformationen. Formal gilt: $p = \sigma + i\omega$, wobei σ eine Hilfsgrösse zur Berechnung der Laplace-Transformation ist, die im physikalisch relevanten Endergebnis auf Null gesetzt werden kann.)

1) Sie starten mit der Übertragungsfunktion H(f), die Sie im Aufgabenteil a) erhalten haben. Dann führen Sie am besten folgende Ersetzungen durch:
$L/R_1 = T_1$, $R_2C = T_2$, $i\omega = p$.
Damit sollten Sie erhalten:

$$H(p) = \frac{pT_1}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}$$

2) Sie führen eine *Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion* durch, so dass die obige Übertragungsfunktion ($H(p) = \frac{pT_1}{(1+pT_1)(1+pT_2)}$) in die folgende Form überführt wird:

$H(p) = a_1/(1+pT_1) + a_2/(1+pT_2) + c$,

wobei a_1, a_2 und c positive oder negative reelle Zahlen sind (Hinweis: c ergibt sich in diesem Fall als Null).

3) Sie nutzen die Regel, dass für die Sprungantwort gilt:

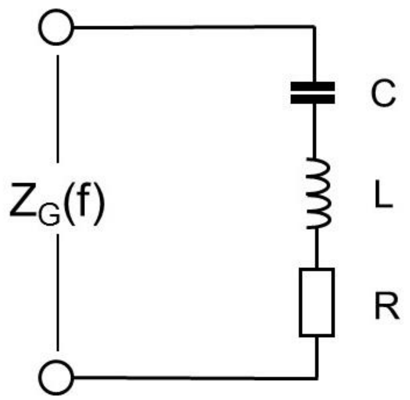
$H(p) = \sum a_k/(1+pT_K)$ => $U_A(t) = U_0 \sum a_k(1-\exp\{-t/T_k\})$

(Obige Beziehung gilt nur, wenn die a_k positive oder negative reelle Zahlen sind; alle T_k sind größer Null und keine zwei T_k nehmen denselben Zahlenwert an.)

Nach Anwendung dieser Regel können Sie nun den gesuchten Ausdruck für $U_{A2}(t)$ angeben.

AUFGABE 3 – Komplexer Widerstand des RLC Serienschwingkreis

Gegeben ist ein Serienschwingkreis aus Kondensator C, Spule L und Widerstand R (also eine *Serienschaltung* von C, L und R gemäß Abbildung). (7 Pkt.)



a) Ermitteln Sie die komplexe Impedanz des Serienschwingkreises. Geben Sie die Resonanzfrequenz f_0 ($=\omega_0/2\pi$) sowie die Breite der Resonanzkurve an (Bandbreite Δf). (4 Pkt)

Erläuterung zu Δf, der Breite der Resonanzkurve: Bei der Resonanzfrequenz f_0 wird die Impedanz des Serienschwingkreises minimal, also: $|Z(f_0)|=Z_{min}$. Gesucht ist das Frequenzintervall Δf um f_0 an, für dass gilt: $|Z(f)|^2 < 2\ Z_{min}^2$ für $(f_0-\Delta f/2)< f <(f_0+\Delta f/2)$.

Hierbei können Sie annehmen, dass gilt: $1/(LC)>>R^2/L^2$.

Die Aufgabe soll unter Nutzung der "Zeigermethode", d. h. durch vektorielle Addition der Vektoren der komplexen Widerstände in der komplexen Zahlenebene gelöst, werden.

b) Es seien C = 250 pF, L = 1 mH, R = 10 Ω. Geben Sie die Resonanzfrequenz f_0 sowie die Bandbreite Δf als Zahlenwerte an. Fertigen Sie eine Skizze an, bei der Betrag und Phase der Impedanz über der Frequenz aufgetragen sind. Beschriften Sie die Skizze und markieren Sie R, f_0 und Δf. (3 Pkt)