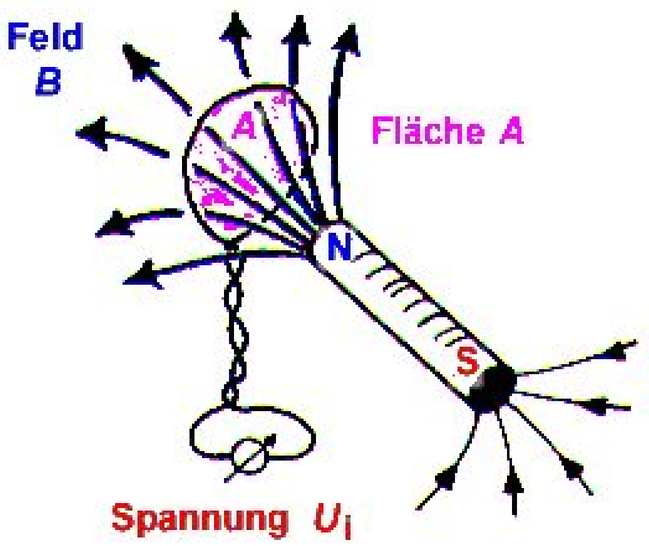
Magnetisches Induktionsgesetz

Michael Faraday entdeckte, dass ein sich zeitlich veränderndes Magnetfeld eine elektrische Spannung in einer Schleife oder Spule aus leitendem Material erzeugt: die **Induktionsspannung** U_i. Weitere Versuche zeigten, dass diese Spannung proportional zur zeitlichen Ableitung des **magnetischen Flusses** $\Phi_B(A)$ durch die Fläche ***A*** der Spule oder Schleife ist:



Drahtschleife im *B*-Feld eines Stabmagneten. Bewegung oder Drehung der Schleife induziert die Spannung U_i in der Schleife, nach dem ***Faraday***'schen ***Induktionsgesetz***.

Der **Fluß** ist dabei die Anzahl der Magnetfeldlinien, die die Fläche *A* durchschneiden:

$$\Phi_B(A) = \mu_o \iint_A \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{A}.$$

Hier ist der Fluß des **magnetischen Induktionsfeldes *B*** gemeint, wobei

$$\boldsymbol{B} = \mu_o \boldsymbol{H} .$$

Das ***Induktionsgesetz*** lautet nun:

$$U_i = - d\Phi/dt \; ;$$

die **Induktionsspannung** ist gegeben durch die ***zeitliche Änderung des Flusses*** (d.h. des Produktes aus ***B*** und ***A***) und ist stets ihrer Ursache **entgegengerichtet** (Minuszeichen).

Es gibt verschiedene Wege, eine zeitliche Änderung des Flußes zu produzieren: das **Feld** ***H*** (oder ***B***) kann sich ändern (Änderung des Stromes durch eine Feldspule, Bewegung eines Dauermagneten), die **Fläche** ***A*** kann sich ändern (Zusammenziehen einer Drahtschleife), oder die ***relative Einstellung*** der Fläche zum Feld kann sich ändern (Drehung einer Draht-schleife). Die letzte Methode wird in elektrischen **Dynamos** (Generatoren, Lichtmaschinen) angewandt.

Dreht man eine Spule mit konstanter Winkel-geschwindigkeit ω in einem konstanten, homogenen Magnetfeld, so verläuft die Induktionsspannung U_i in der Spule *sinusförmig*:

$$U_i(t) = U_o \sin[\omega t + \varphi] \; .$$

Magnetismus und Elektrizität
⇔ Technische Anwendungen:
Generator, Elektromotor, Transformator ..

Transformator

Am "Eingang": *Primärspule*
mit Windungszahl $\mathbf{N_1, U_1, I_1}$

Am "Ausgang": *Sekundärspule*
mit Windungszahl $\mathbf{N_2, U_2, I_2}$

Wir nehmen perfekte magnetische Kopplung (durch einen Wirbelstromfreien Eisenkern) an sowie vernachlässigbar geringe Ohm'schen Widerstände.

Ohne Ohm'schen Verbraucher am Ausgang gilt dann:

$$\mathbf{N_2/N_1 = U_2/U_1}$$

Mit "Kurzschluss" am Ausgang gilt dann:

$$\mathbf{N_1/N_2 = I_2/I_1}$$

Bei "mittleren" Werten von R_{Last} gilt für die Leistungen:
(bei Ohmschen Verbrauchern, Effektivwerte von Wechselstrom und –spannung)

$$\mathbf{P_1 = P_2}$$

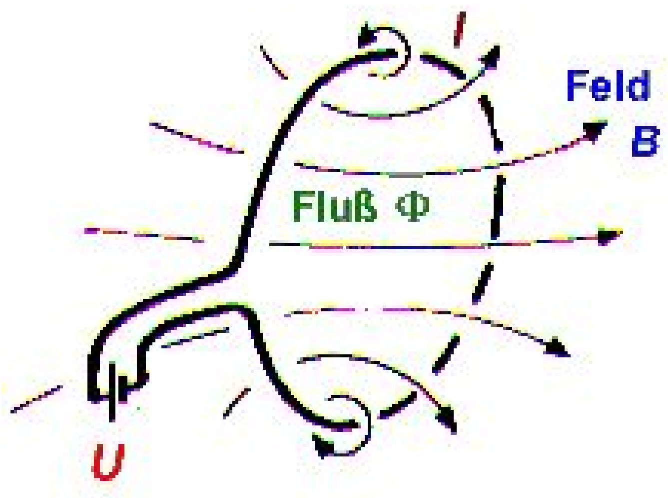
$$\mathbf{U_1\, I_1 = U_2\, I_2 \quad = U_2/R_{Last} \;= I_2\, R_{Last}}$$

Ursache der Induktivität einer Spule

1) Wenn die Spule einen Wechselstrom "trägt", erregt sie in ihrer Mitte ein **magnetisches Wechselfeld** $\boldsymbol{H}(t)$ bzw. $\boldsymbol{B}(t)$;
⇔ Ampere'sches Gesetz

2) dies erzeugt einen zeitlich veränderlichen magnetischen Fluss durch die Spule: $\boldsymbol{\Phi(t)} = \boldsymbol{B}(t)\cdot\boldsymbol{A}$.

3) **d Φ(t)/dt** induziert wiederum eine Spannung $\boldsymbol{U_i(t)}$, die proportional der zeitlichen Ableitung des Feldes $\boldsymbol{B}(t)$ ist.
⇔ Magnetische Induktions-Gesetz, $\boldsymbol{U_i} = - d\Phi/dt$



Drahtschleife mit einer externen Spannungsquelle. Der Strom $\boldsymbol{I}$ im Draht erzeugt das magnetische Induktionsfeld $\boldsymbol{B}$ und somit den Fluß $\Phi = \boldsymbol{BA}$ (A = Fläche der Schleife). Ändert sich die Spannung $\boldsymbol{U}$ zeitlich (z.B. $U(t) = U_o \sin[\omega t + \varphi]$), so werden $\boldsymbol{B}$ und Φ auch zeitlich verändert, eine **Induktionsspannung** $U_i = -d\Phi/dt$ erscheint zwischen den Enden der Drahtschleife [**entgegengesetzt** zur momentanen externen Spannung $U(t)$].

Bei einer Spule der Länge l, Windungszahl N mit dem Radius r gilt:

$$U_i(t) = -d[\Phi]/dt$$

Magnetische Induktions-Gesetz

$$= -d[\boldsymbol{B}(t)\ A]/dt$$

$$= -d[\mu_o (N/l) I(t)\ N \pi r^2]/dt$$

Ampere'sches Gesetz

$$= -[\mu_o \pi r^2 N^2 / l]\ dI(t)/dt$$

$$= -L\ dI(t)/dt$$

Induktivität L der Spule

=> Wechselstromwiderstand

Materie im Magnetfeld

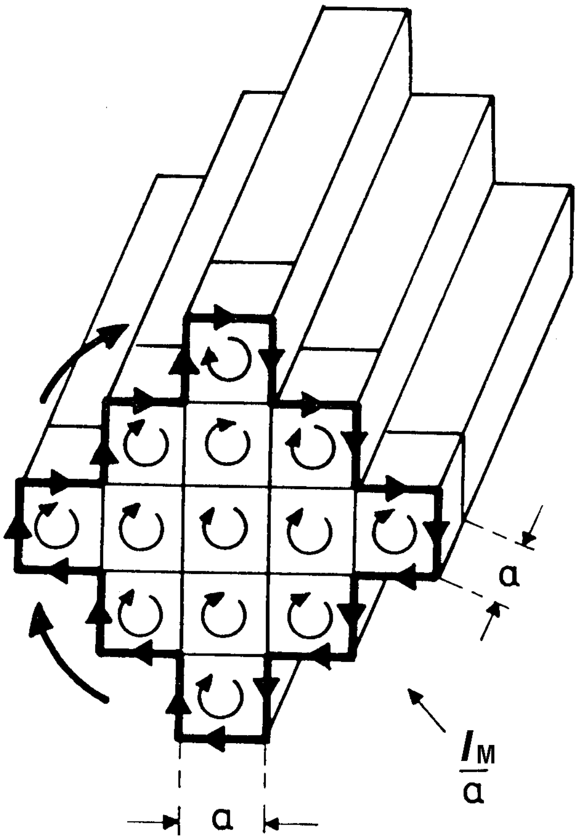
Ähnlich wie im **elektrostatischen** Feld reagiert die Materie im **statischen Magnetfeld** durch Bildung mikroskopischer **Dipolmomente**; nun sind es aber nicht *elektrische*, sondern *magnetische* Dipole.

Im Gegensatz zum elektrischen Fall gibt es in der Magnetostatik keine ***Ladungen***-- und daher keine magnetischen **Leiter** im engeren Sinne. Die magnetischen Feldlinien bilden geschlossene Kurven, ohne Anfang und Ende. Außerdem sind die Felder $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{H}$ etwas anders definiert als die entsprechenden elektrischen Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{D}$ (s. oben). Ansonsten verläuft die Behandlung von Materie im Magnetfeld genau analog zur Behandlung der Materie im elektrischen Feld.

Die magnetischen **Dipole** werden mithilfe von *Dipolmomenten* beschrieben, definiert als $\boldsymbol{\mu} = I\boldsymbol{A}$, wobei I die Stärke eines (mikroskopischen) Ringstromes und $\boldsymbol{A}$ die vom Ringstrom eingeschlossene Fläche sind (der Vektor $\boldsymbol{A}$ zeigt in Richtung der Flächennormale, Richtungssinn durch die Rechte-Hand-Regel gegeben!). Die *Einheit* des magnetischen Dipolmomentes μ ist Am^2 (s. oben).

Wirkt ein statisches Magnetfeld $\boldsymbol{B}_0 = \mu_0 \boldsymbol{H}_0 = \mu_0 I_0(N/l)$ (I_0 = Strom der freien Ladungen in einer Spule mit N Windungen und Länge l), so produziert es **ausgerichtete magnetische Dipolmomente** (durch *Induktion* von mikroskopischen Ringströmen bzw. *Orientierung vorhandener Dipole*) in der Materie, die sich innerhalb der Spule befindet. Diese heben sich innerhalb der Materie gegenseitig auf, wie im elektrischen Fall, und können insgesamt durch **Flächenströme** I_M an den Endflächen der Materie beschrieben werden (Magnetisierungsströme):

Schematische Darstellung von Materie in einem Magnetfeld. Atomare Dipole sind durch kleine Kreisströme symbolisiert; der Abstand der Atome ist gegeben durch die Gitterkonstante *a*. Sie fügen sich an den Enden des Materiestücks zu einem gesamten Flächenstrom I_M zusammen. Außerhalb der Materie entsteht durch die gerichtete Dipole ein äußeres Magnetfeld (gekrümmte Pfeile).



Man definiert die **Magnetisierung** der Materie als das *Gesamtdipolmoment pro Volumen*, ganz analog zur elektrischen Polarisation (eines Dielektrikums):

$$|M| = \Sigma_i \boldsymbol{\mu}_i / V = I_M A / V = I_M / d \;;$$

A ist hier die Fläche der Materie, d ihre Dicke.

Es existieren nun *drei Felder*:

--die **Magnetisierung** $\boldsymbol{M}$ (nur ***innerhalb*** der Materie), mit $|M| = I_M/d$;

--das **Magnetfeld** $\boldsymbol{H}$ (**überall**), mit $|H| = I_o(N/l)$ (Feld einer Spule);

--das **Induktionsfeld** $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_o$ **außerhalb** der Materie, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_M \geq \boldsymbol{B}_o$ (i.a.) **innerhalb** der Materie ($\boldsymbol{B}$ macht einen Sprung an der Endfläche in der einfachen Geometrie einer langen Spule mit einem zylindrischen Materiekörper in ihrem inneren).

Allgemein gilt

$$\boldsymbol{B} = \mu_o(\boldsymbol{H}_o + \boldsymbol{M}) = \mu_o \boldsymbol{H}_M.$$

Eine alternative Beschreibung des Vorgangs basiert auf der **Änderung** der ***B***-Feldstärke durch die Materie:

$$B_M/B_o = \mu_r$$

(μ_r = relative Permeabilitätskonstante; dimensionslos).

Die Feldstärke einer Spule, welche Materie der relativen Permeabilität μ_r enthält, ist gegeben durch:

$$B_M = \mu_r\, B_o = \mu_o \mu_r\, I(N/l) = \mu\, I(N/l).$$

(die letzten beiden Formeln gelten für eine lange Spule der Länge l, Windungszahl N, Füllfaktor für die Materie = 100%).

Wir können **drei Typen** der Materie bzgl. magnetisches Verhalten unterscheiden:

- **Diamagnetika**, mit $\mu_r < 1$ ***schwächen*** das magnetische Feld ***B*** ab;
- **Paramagnetika**, mit $\mu_r > 1$ ***verstärken*** das Feld ***B***;
- **Ferromagnetika**, mit $\mu_r \to \infty$ besitzen ein eigenes ***spontanes Feld B***; (und daher eine ***spontane Magnetisierung***!)

  Die **Magnetisierung** ***M*** ist i.a. eine Funktion von $\boldsymbol{B}_o$ und T (*Curie*-Gesetz).

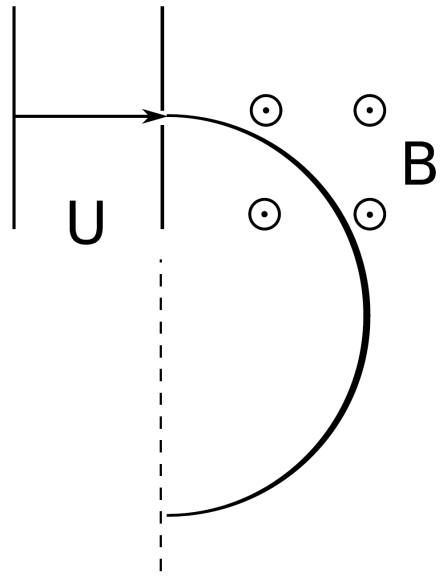
Lorentzkraft

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{L} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

[*Einheit* von $\boldsymbol{B}$: N/Am = J/Am^2 = Vs/m^2 = T].

Das Feld $\boldsymbol{B}$ wird auch das ***magnetische Induktionsfeld*** bzw. die magnetische ***Flussdichte*** genannt, die Einheit Vs/m^2 heißt auch **T**esla. Die Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{L}$ steht ***senkrecht*** zum Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ sowie zur Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ der bewegten Ladung.

Prinzip des Massenspektrometers



1) Beschleunigung von Elektronen im Vakuum mit der Spannung *U* => Geschwindigkeit der Elektronen

$$\frac{1}{2}mv^2 = U \cdot q \implies v = \sqrt{\frac{2Uq}{m}}$$

2) Kreisbahn im Magnetfeld der Stärke *B*,
Lorentzkraft = Zentripetalkraft => "Detektionsradius *r*"

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \implies r = \frac{mv}{qB}$$