Stehende Wellen

1) Ausbreitung in x-Richtung:

$$\psi(x,t) = A_o \sin[\omega t - kx]$$

mit $\omega = 2\pi f$ und $k = 2\pi / \lambda$

Am ersten Maximum gilt:

$$\omega t - kx_m = \pi/2$$

$$x_m = \pi/2k + (\omega/k)\, t$$

=> Ausbreitung in x-Richtung mit Geschwindigkeit u

$$\boldsymbol{u = dx_m/dt = \omega/k = f\,\lambda}$$

2) Reflexion => Ausbreitung in (-x)-Richtung
(„Phasensprung“ um 180° bei Reflexion am festen Ende, z.B. Gitarrenseite):

$$\psi_r(x,t) = A_o \sin[\omega t + kx + \pi]$$

$$= -A_o \sin[\omega t + kx]$$

3) Überlagerung (Superposition, Addition) der ausgehenden und reflektierten Welle:

$$\psi(x,t) = A_o \sin[\omega t - kx] - A_o \sin[\omega t + kx]$$

Satz aus der Geometrie (Formelsammlung):

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin[\tfrac{1}{2}(a+b)] \sin[\tfrac{1}{2}(a-b)]$$

=> $$\boldsymbol{\psi(x,t) = 2 A_o \sin[kx] \sin[\omega t]}$$

Wiederholte Reflexion führt zu stehender Welle, wenn:

$$\boldsymbol{n\lambda/2 = \textit{Länge}}$$ (z.B. der Gitarrenseite)

Schwebungen

Überlagert man zwei Schallwellen mit unterschiedlicher Frequenz, so entstehen **Schwebungen** (vgl. 'gekoppelte Schwingungen'). Die beiden Wellen schwächen sich ab und verstärken sich abwechselnd; man hört dieses auf und ab als periodische **Änderung der Lautstärke**, die um so langsamer abläuft, je näher die beiden Frequenzen zueinander liegen.

Mathematisch läßt sich dieses Phänomen als **Überlagerung** von zwei Sinus- oder Kosinuswellen beschreiben, so dass das Ergebnis als Produkt einer ***zeitabhängigen Amplitude*** mit einer '***mittleren Welle***' geschrieben werden kann:

Satz aus der Geometrie (Formelsammlung):

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin[\tfrac{1}{2}(a+b)] \sin[\tfrac{1}{2}(a-b)]$$

$$\Rightarrow \quad \psi(t) = 2 A_o \sin[\Delta\omega t] \sin[\langle\omega\rangle t].$$

Die **Schwebungsfrequenz $\Delta\omega$** ist gegeben durch

$$\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$$

und wird sehr klein, wenn sich die beiden überlagerten Frequenzen sehr nah liegen; die **mittlere Frequenz $\langle\omega\rangle$** ist der Mittelwert der überlagerten Frequenzen:

$$\langle\omega\rangle = (\omega_1 + \omega_2)/2$$

Ultraschall

Menschen hören in einem Frequenzereich zwischen ca. 10 Hz und ca. 20 kHz. Schallwellen, die wesentlich höhere Frequenzen haben, heißen 'Ultraschall'. Sie breiten sich in der Luft kaum aus, dafür aber in kondensierten Medien --Wasser oder festes Material-- mehr oder weniger gut. Sie können daher benutzt werden, um unsichtbare Strukturen innerhalb der Materie, z.B. auch innerhalb des menschlichen Körpers, zu untersuchen. Reflektion der Ultraschallwellen an inneren Strukturen führt nämlich zu Echos, die nachgewiesen und zu einem Bild verarbeitet werden können.

Ruhende Flüssigkeiten, Druck
- Hydrostatik -

In einer Flüssigkeit sind die Teilchen (Atome, Moleküle) fest aneinander gebunden durch sogenannte **Kohäsionskräfte**, die Teilchen lassen sich jedoch beliebig aneinander ***vorbeischieben***. Dies führt dazu, dass sich das Volumen der Flüssigkeit nur schwer ändern lässt (Flüssigkeiten sind **kaum komprimierbar**!), die **Form** der Flüssigkeit aber beliebig ist (Volumenelastizität, aber keine Formelastizität).

Wirkt eine Kraft auf eine bewegliche Gefäßwand ('Stempel'), so wird sie innerhalb der Flüssigkeit als **Druck** übertragen. Der Druck wirkt allseitig und überall in der Flüssigkeit; er ist daher **nicht** eine Vektorgröße. Der Druck ist definiert als 'Kraft pro Fläche':

Druck = Wirkende Kraft/Angriffsfläche, $P = F/A$.

Druckeinheit = $N/m^2 \equiv Pa$ (*Pascal*); gemeint ist die Kraft**komponente**, die ***senkrecht*** zur Fläche A steht. (Zum Vergleich: der **Atmosphärendruck**, der auf der Erdoberfläche aufgrund des Gewichts der Lufthülle wirkt, beträgt etwa 100 000 Pa. Man definiert daher eine weitere Druckeinheit, das **Bar**:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}.$$

Wir sprechen von einer **idealen** Flüssigkeit, wenn das Volumen exakt konstant bleibt (***keine*** Komprimierbarkeit) und die Formänderung (z.B. Fließen) ***ohne Widerstand*** geschieht (***keine*** Formelastizität). Wirkliche Flüssigkeiten (reale Flüssigkeiten) haben diese idealen Eigenschaften nur annähernd; insbesondere zeigen sie einen Widerstand (Zähigkeit) gegenüber *Form*änderungen, d.h. Fließen.

Hydrostatischer Druck

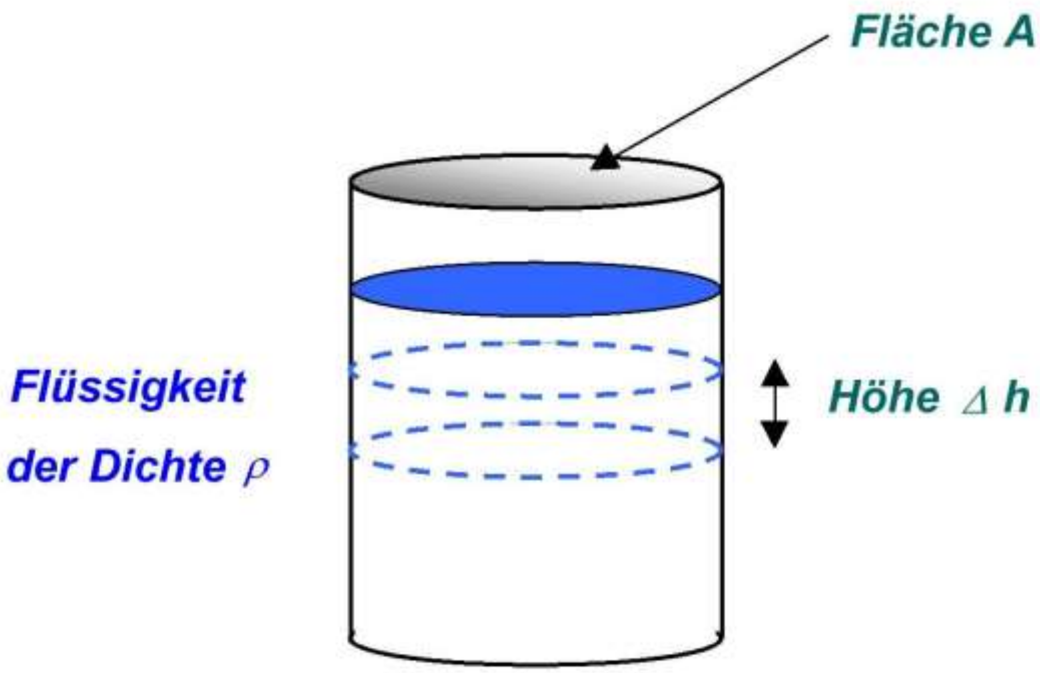
Der **Schweredruck** entsteht durch das Gewicht der Flüssigkeit, welche über dem Messpunkt liegt. Er ist gegeben durch die Gewichtskraft, geteilt durch die Fläche des Behälters:

Für einen Tiefenunterschied Δh:

$$\Delta P = mg/A = \rho Vg/A = \rho g A \Delta h/A = \rho g \Delta h,$$

wo ρ die *Massendichte* der Flüssigkeit bezeichnet. Der Schwere-druck steigt also *linear mit wachsender Tiefe* in der Flüssigkeit an, bei der Tiefe h hat er den Wert:

$$P(h) = \rho g h$$



Schweredruck in einer Flüssigkeit der Dichte ρ.

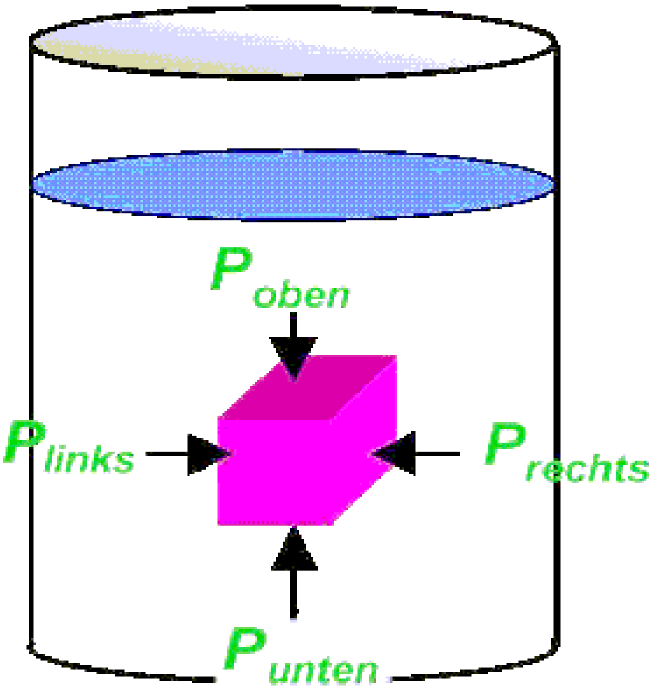
„**Kommunizierende Röhren**“ ⇔ Derselbe Schweredruck der Luftmassen lastet auf jeder Röhre (größer Querschnit => größere Gewichtskraft => P = F/A = konstant)

Der **Gesamtdruck** in einer ruhenden Flüssigkeit, der sogenannte **hydrostatischer Druck**, ist die Summe vom Stempeldruck P_o und Schweredruck $P(h)$:

$$P = P_o + P(h) \ .$$

Dieser Druck wirkt bei gegebener Tiefe überall gleich, er ist ***nicht richtungsabhängig*** und hängt auch nicht von der Form des Behälters ab ('hydrostatisches Paradoxon').

Auftrieb: Taucht ein Objekt in die Flüssigkeit ein, wirkt an seiner unteren Fläche aufgrund des Schweredrucks ein höherer Druck, als an der oberen. Dies führt zu einer **Nettokraft**, die das Objekt ***anzuheben*** versucht: sein Gewicht ist geringer in der Flüssigkeit. Diese Kraft nennt man den **Auftrieb**, sie ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit (Prinzip von Archimedes).



Druckverhältnisse um ein Objekt in einer Flüssigkeit; der Druck von unten ist um den Schweredruck der verdrängten Flüssigkeit größer, als der Druck von oben.

Grenz- und Oberflächen

Ein Flüssigkeitsteilchen innerhalb des Volumens der Flüssigkeit erfährt von allen Richtungen gleiche Kohäsionskräfte, es herrscht ein **Kräftegleichgewicht**. Bringt man das Teilchen an die **Oberfläche**, fehlen die Kräfte auf der einen Seite, das Gleichgewicht ist gestört. Es kostet also eine Kraftanstrengung, (bzw. Arbeit W muss geleistet werden), um ein Teilchen an die Oberfläche zu führen, seine (potentielle) Energie ist dort größer. Diese zusätzliche Energie, geteilt durch die entsprechende Fläche, nennt man die spezifische **Oberflächenenergie** $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = W/A \quad (\mathrm{J/m^2}).$$

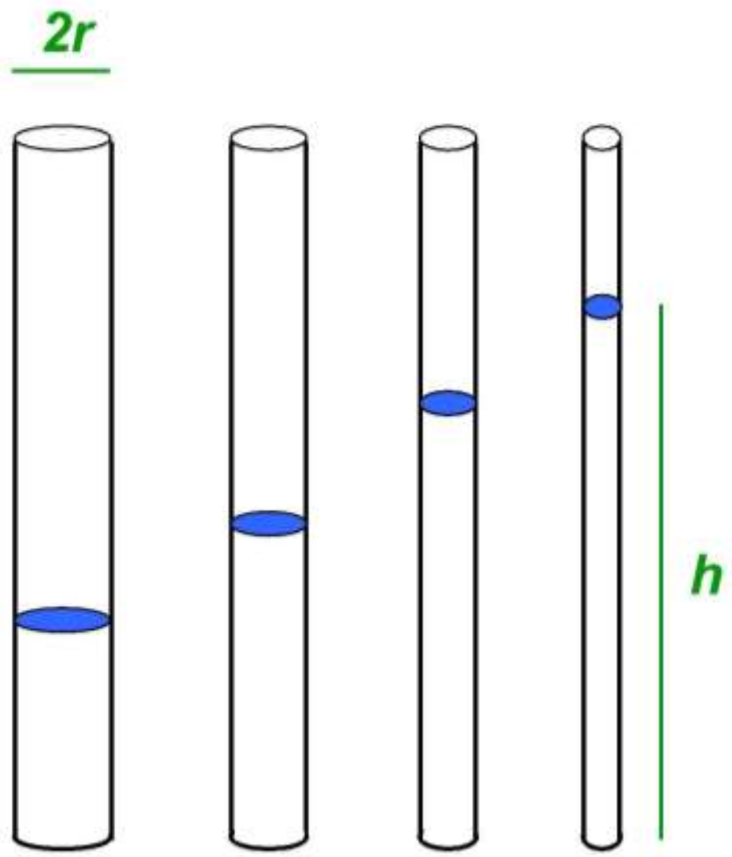
Die **spezifische Oberflächenenergie** ist eine Eigenschaft der Flüssigkeit (und ggf. auch der gegenüberliegenden Materie an der Grenzfläche). Sie kann z.B. durch Aufheben eines Films aus der Flüssigkeit mit einem Drahtbügel gemessen werden. Dabei mißt man die nötige **Arbeit** W, um die Fläche des Films um den Betrag A zu erhöhen, bzw. (wahlweise) die dazu nötige **Kraft**, die man --durch die Breite des Bügels l geteilt-- als **Oberflächenspannung** $\boldsymbol{\sigma}$ bezeichnet:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = W/A = \boldsymbol{\sigma} = F/l \qquad (\mathrm{J/m^2} \equiv \mathrm{N/m}).$$

Da die Oberflächenenergie es allgemein energetisch ungünstig macht, eine freie Oberfläche zu vergrößern, bildet eine Flüssigkeit sogenannte '***Minimalflächen***' (vgl. Seifenblasen).

Falls die Flüssigkeit an der Grenzfläche in Kontakt mit einem anderen Material tritt, kommt es auf die relative Stärke der **Kohäsionskräfte** zwischen den eigenen Flüssigkeitsteilchen und den **Adhäsionskräften** zwischen Flüssigkeit und angrenzendem Material an. Falls letztere ***stärker*** sind, spricht man von einer '**benetzenden Flüssigkeit**'; ein Tropfen breitet sich möglichst aus. Anderenfalls bleibt der Tropfen möglichst geschlossen (**nichtbenetzende Flüssigkeit**).

Dies erklärt auch die **Kapillarwirkung** bei einer Flüssigkeit in einem engen Rohr.



Die Steighöhe einer Flüssigkeit in einem Kapillarrohr (relativ zur Höhe der Flüssigkeit außerhalb des Rohrs) kann durch eine einfache Überlegung aus der spezifischen Grenzflächenenergie berechnet werden.

Die Energieerhöhung $\Delta E_{\mathbf{pot}}$ durch das **Anheben** der Flüssigkeit um die Höhe h im Rohr ist gegeben durch:

$\Delta E_{\mathbf{pot}} = mgh = \rho Vgh = \rho g\pi r^2h^2/2$ (Integral über dh !).

Der Energiegewinn durch die **Oberflächenenergie** ist:

$\Delta E_{\mathbf{obf}} = \varepsilon A_{\mathbf{kontakt}} = \varepsilon\, 2\pi rh.$

Aus der Energiebilanz $\Delta E_{\mathbf{pot}} = \Delta E_{\mathbf{obf}}$ erhalten wir:

$\rho grh/2 = 2\varepsilon$ oder

$\boldsymbol{h = 4\varepsilon/\rho gr}$ (vgl. Skizze, oben).

Hydrodynamik: bewegte Flüssigkeiten

Bewegte Flüssigkeiten, Strömung

Wir betrachten eine **stationäre** Strömung, d.h. die Geschwindigkeit der Strömung an einem gegebenen Punkt bleibt **konstant** im Laufe der Zeit. Außerdem betrachten wir zunächst die Strömung einer **idealen** Flüssigkeit, die nicht komprimierbar ist und ohne Widerstand fließt.

Eine wichtige Größe, um die Strömung zu charakterisieren, ist die **Volumenstromstärke** I_V:

$$I_V = \Delta V/\Delta t \qquad \text{(Einheit } m^3/s) \ .$$

Bei der idealen Strömung ist das Geschwindigkeitsprofil in einem Rohr gleichmäßig, es bildet eine Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung. Bei einem Rohr vom Querschnitt A ist das Volumen, welches in der Zeit Δt durch die Querschnittsfläche mit Geschwindigkeit v fließt, gegeben durch

$$\Delta V = A\, v\, \Delta t\ ,$$

d.h. die Stromstärke ist

$$I_V = A\, v\ .$$

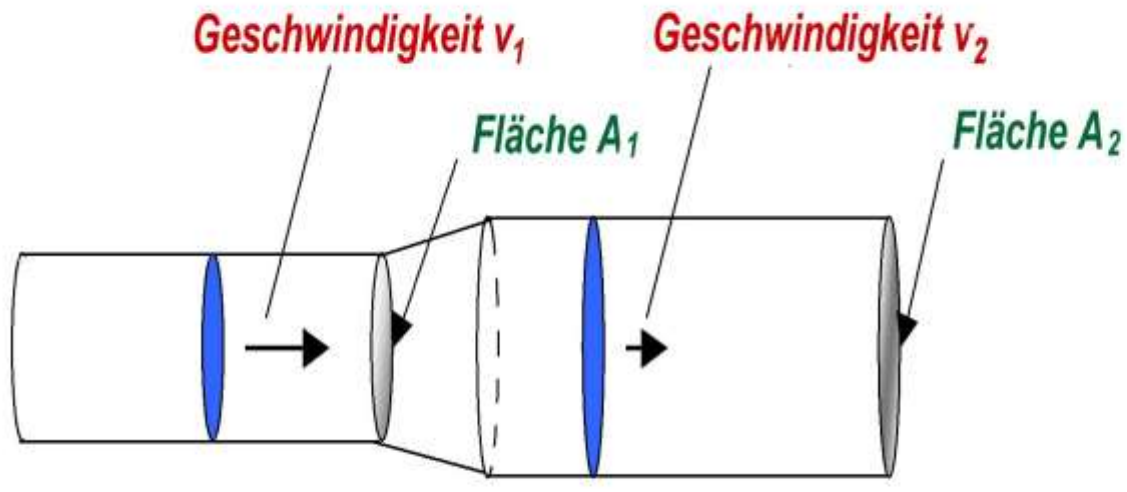
Da die Flüssigkeit inkompressibel ist und auch im Laufe der Strömung nicht erzeugt oder vernichtet wird, gilt eine ***Kontinuitätsbedingung***:

--Das Volumen ΔV, das in einer gegeben Zeit durch eine gegebene Querschnittsfläche im Rohr fließt, muss überall gleich sein.--

Es kann nicht mehr Flüssigkeit in das Rohr hineinfließen, als am anderen Ende in der gleichen Zeit herausfließt; die Volumenstromstärke überall gleich. Ändert sich die Querschnittsfläche des Rohrs, so muß sich die Strömungsgeschwindigkeit v entsprechend ändern, um I_V konstant zu halten:

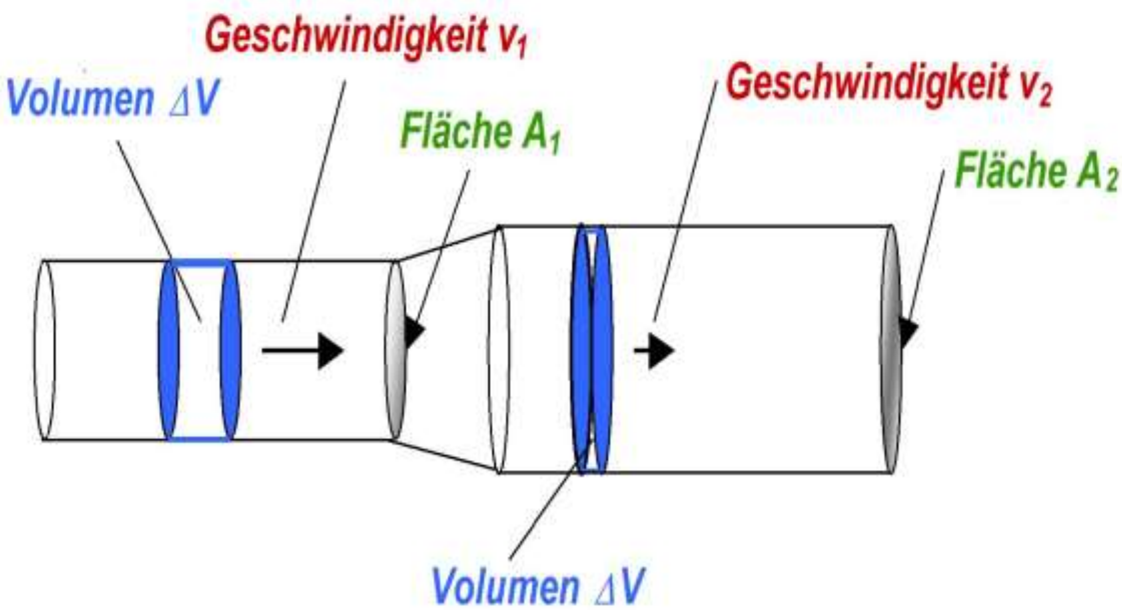
$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \textit{oder} \quad v_1/v_2 = A_2/A_1.$$

Wo der Querschnitt enger wird, muß die Flüssigkeit also schneller fließen.



In der strömenden Flüssigkeit herrscht an jeder Stelle einen Druck, nun aber heißt er ***hydrodynamischer*** Druck. Er besteht nicht nur aus **Stempeldruck** und **Schweredruck**, wie in der ruhenden Flüssigkeit, sondern enthält auch einen weiteren Beitrag, der durch die **Strömung** (kinetische Energie!) zustande kommt.

Wir betrachten die Energie eines Probevolumens ΔV an zwei verschiedenen Stellen (1 und 2) innerhalb einer strömenden Flüssigkeit in einem Rohr. Das Rohr soll eine Querschnittsfläche A_1 an Stelle 1 und A_2 an Stelle 2 haben.



Die **Arbeit**, die zur Bewegung des Volumens um eine Strecke Δs_1 bzw. Δs_2 an den Stellen 1 bzw. 2 geleistet werden muß, ist:

$$\begin{aligned}\Delta W &= F_1\,\Delta s_1 - F_2\,\Delta s_2 \\ &= P_1 A_1 \Delta s_1 - P_2 A_2 \Delta s_2 \\ &= P_1 \Delta V - P_2 \Delta V = (P_1 - P_2)\Delta V\,;\end{aligned}$$

Die Energiedifferenz, die durch diese Verschiebung entsteht, ist:

$$\Delta E = mg(h_2 - h_1) + 1/2\ m(v_2^2 - v_1^2)\ .$$

Setzen wir die geleistete Arbeit gleich die resultierende Energiedifferenz (Energieerhaltung!), so erhalten wir:

$$(P_1 - P_2)\Delta V = mg(h_2 - h_1) + 1/2\ m(v_2^2 - v_1^2)\ .$$

oder, mit $m = \rho\Delta V$ (ρ = **Massendichte**), nach Umordnung:

$$[P_1 + \rho g h_1 + \rho/2\ v_1^2]\Delta V = [P_2 + \rho g h_2 + \rho/2\ v_2^2]\Delta V.$$

Dies heißt, die Größe $[P + \rho gh + \rho/2\ v^2]$ ist überall **konstant** (wir können die willkürlich gewählten Stellen 1 und 2 weglassen):

$$[P + \rho gh + \rho/2\ v^2] = \text{konst.} = P_0$$

Diese Gleichung nennt man den **Satz von Bernoulli**. Er drückt die **Energieerhaltung** bei der Strömung aus, und gilt streng nur für die ***stationäre***, ***ideale*** **Strömung**. Er besagt qualitativ:

'Der Druck einer strömenden Flüssigkeit nimmt ab, wenn sie schneller und/oder aufwärts strömt'.

Die drei Terme in der Bernoulligleichung sind **Stempeldruck**, **Schweredruck** sowie der Druck, der durch die **Strömung** selbst zustande kommt, $(\rho/2)\ v^2$; dieser wird **Staudruck** genannt. Eine andere Formulierung des Bernoulli-Satzes wäre daher:

Die Summe von
Stempeldruck, Schweredruck und Staudruck
(in einer idealen, stationär strömenden Flüssigkeit)
ist konstant.