Mathematik-Brückenkurs 2011, FU Berlin

Übungsblatt zu Beweistechniken, ??.??.2011

1. ***Wackelige Induktion***
   Finden Sie den Fehler in dem folgenden „Beweis".

   Lassen Sie uns die Gauß'sche Summenformel beweisen, die lautet: Für alle natürliche Zahlen n gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

   Damit definieren wir die Induktionsvoraussetzung $A(n)$, die behauptet, daß die Formel für n gilt. $A(0)$ gilt natürlich. Für den Induktionsschritt setzen wir voraus, daß $A(n)$ gilt. Also, es gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Durch Wechsel der Variablen $n \mapsto n+1$ bekommen wir $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, was genau $A(n+1)$ ist.

   Deshalb gilt $A(n)$ für alle natürliche Zahlen.

2. ***Arithmetik***
   Beweisen Sie die folgenden Sätze (in denen n eine natürliche Zahl ist) durch vollständige Induktion.

   - $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   - $9^n + 3$ ist durch 4 teilbar.
   - $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

   Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

3. ***Computerbeweis***
   Die Goldbachsche Vermutung lautet : „Jede gerade Zahl größer als 4 kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.". Wie können Rechner helfen, diese Vermutung zu lösen ? Falls sie wahr ist, könnte ein Programm geschrieben werden, das sie schließlich beweist ? Und falls sie falsch ist ?

4. ***McCarthyismus***
   Die *McCarthy 91 Funktion* M ist für nartüliche Zahlen folgendermaßen definiert n :

   $$M(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{wenn } n > 100 \\ M(M(n+11)) & \text{ansonsten} \end{cases}$$

   Was ist der Wert von $M(n)$, wenn $n \leq 100$?

5. ***Malaufgabe***
   Sei X eine endliche Menge der Größe d und $\mathcal{F}$ eine Familie von Untermengen von X, die alle zumindest zwei Elemente enthalten. Man sagt, daß $\mathcal{F}$ 2-*kolorierbar* ist, wenn es eine Färbung von X zweier Farben gibt, so daß jede Menge $A \in \mathcal{F}$, mindestens ein Element von jeder Farbe enthalte.

   Beweisen Sie, daß $\mathcal{F}$ 2-kolorierbar sein muß, wenn es nicht größer als 2^{d-1} ist. (Betrachten Sie eine zufällige Färbung von X).

6. ***Schach gegen Dominos***
   Beweisen Sie, daß es nicht möglich ist, ein 8×8 Brett, aus dem zwei gegenseitige Ecken fehlen, mit Dominos zu parkettieren.

7. ***Apotheose***
Sie wollen eine rechteckige Bodenfläche mit Parkett bedecken. Die Fußbodenbretter, die Ihnen verfügbar ist, haben eine merkwürdige Eigenschaft: Sie sind rechteckig und haben nicht alle die gleichen Maße, aber eine der Maße jedes Stückes ist genau (in Zentimetern gemessen) eine ganze Zahl. Beweisen Sie, daß, wenn Sie die Bodenfläche bedecken wollen ohne Ihre Bretter aufzuteilen, dann muß sie notwendig diese Eigenschaft mit den Brettern gemeinsam haben.

Verschiedene Beweistechnike sind möglich. Lassen Sie uns annehmen, daß so eine Parkettierung existiert.

- Seien (x, y) die Koordinaten eines Punktes der Bodenfläche, in Zentimetern angebeben. Betrachten Sie die Funktion $(x, y) \mapsto e^{2i\pi(x+y)}$. Was ist ihr Integral über jedem Brett ? Über der ganzen Bodenfläche ?
- Betrachten Sie ein Schachbrettmuster mit 5mm$\times$ 5mm Felder. Was ist die Proportion jeder Farbe auf jedem Brett ? Auf der ganzen Bodenfläche ?
- Wir bezeichnen ein Brett als H-Brett, dessen horizontales Maß ganz ist (die Orientierung des Brettes ist durch die Parkettierung der Bodenfläche definiert). Die anderen Bretter benennen wir V-Bretter. Durch Annahme muß das vertikales Maß eines V-Brettes ganz sein.

  Nun finden Sie einen Beweis durch vollständige Induktion über die Anzahl des H-Brettes. Toi, toi, toi !