Mathematik-Brückenkurs 2011, FU Berlin

Übungsblatt zu Differentialgleichungen, 20.10.2011

1. ***Lineare homogene DGL***

   - $y' = -xy, \quad y(0) = 2$
   - $y' = x\cos(x)y, \quad y(0) = 1$
   - $y' = -y/(1+x), \quad y(0) = -1$
   - $y' = y/(4-x^2), \quad y(0) = 0$
   - $y' = y/(x^2+2x+2), \quad y(0) = 2$

2. ***Lineare inhomogene DGL***

   - $y' = 3y + 5, \quad y(0) = -2$
   - $y' = -2xy + 2x, \quad y(0) = 1$
   - $y' = 3x^2y/(1+x^3) + x^2 + x^5, \quad y(0) = -1$
   - $y' = y + 2xe^{2x}, \quad y(0) = 3$
   - $y' = y\tan(x) + \cos(x), \quad y(0) = 2$

3. ***Nichtlineare DGL***

   - $y' = -x/y, \quad y(0) = -2$
   - $y' = (y^2+1)/y, \quad y(0) = 1$
   - $y' = (1+y^2)e^x, \quad y(0) = -1$
   - $y' = ye^x - 2e^x + y - 2, \quad y(0) = 0$
   - $y' = xy/(x-1), \quad y(0) = 2$

4. ***Zerfallsgesetz***

   Gegeben sei eine Menge M von radiaktiv zerfallenden Atomen. Die Menge der pro Zeiteinheit zerfallenden Atome ist proportional zur vorhandenen Menge.

   (a) Stellen Sie die zugehörige Differentialgleichung auf. (Tip: Für kurze Zeitintervalle Δt kann man die Beziehung zwischen der Änderung ΔM und M direkt hinschreiben)

   (b) Lösen Sie die DGL.

   (c)* Atome zerfallen oft nicht nur einmal, sondern das Zerfallsprodukt zerfällt oft weiter, aber mit anderer Geschwindigkeit. Es ergeben sich sogenannte Zerfallsreihen. Stellen Sie sich vor, sie sind Geologe und finden einen alten Stein mit radioaktiven Stoffen darin. Die Zerfallsreihen und die relativen Mengenverhältnisse bestimmen sie durch Beobachtung im Labor. Können Sie auch etwas über die Zerfallsgeschwindigkeiten ableiten? Sind die Mengenverhältnisse im Stein Zufall?

5. ***Schwingkreis***

   Sie schalten einen Kondensator ($C = Q/U$) und eine Spule ($L = U/\dot{I}$) in Reihe.

   (a) Stellen Sie die zugehörige DGL für den Stromfluß auf. (Hinweis: Wie hängen I und Q zusammen?)

(b) Setzen Sie mit $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$ zur Lösung an. Es sollte sich eine quadratische Gleichung ergeben. Was ergibt sich für ω?

Jetzt wollen wir noch einen ohmschen Widerstand ($R = U/I$) (entspricht Abfuhr von Energie) ebenfalls in Reihe dazuschalten.

(c) Stellen Sie die zugehörige DGL für den Stromfluß auf.

(d) Setzen Sie mit $I(t) = I_0 e^{i(\omega t + \phi)}$ zur Lösung an. (Der meßbare Strom entspricht dann dem Realteil.) Es sollte sich wieder eine quadratische Gleichung ergeben. Was bekommt man für ω? Was bedeutet ein imaginärer Anteil im Exponenten und was ein reller? Setzen Sie hierzu die Lösung in $I(t)$ ein und tragen Sie $I(t)$ graphisch auf. Sie sollten drei Fälle unterscheiden können.

6. ***Picard Lindelöf - Verfahren (*)***

Wir wollen die DGL

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0 \tag{1}$$

nach dem Picard-Lindelöf-Verfahren lösen. Hierzu rechnen wir iterativ Funktionen y_n aus, die sich der Lösung der DGL annähern.

(a) Sei $||\cdot||$ eine Norm auf einer Folge (a_n) wobei $a_{n+1} = F(a_n)$. Überlegen Sie sich, daß wenn $||F(a_n) - F(a_{n-1})|| \leq c||a_n - a_{n-1}||$ für alle n mit einer Konstanten $c < 1$, die Folge (a_n) sich einem eindeutigen Element a_∞ annähert. Nehmen Sie dabei an, daß es a_∞ auch tatsächlich gibt. Man spricht hierbei von *Konvergenz* von (a_n) gegen a_∞. (Hinweis: Erst zeigen, daß es nur ein solches Element geben kann. Dann zeigen, daß sich die (a_n) immer genauer daran annähern.)

Unser Iterationsverfahren sieht folgendermaßen aus. Wir betrachten

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = \mu \tag{2}$$

also heuristisch $y(x) = \mu + \int_0^x f(t, y(t))dt$ mit einer Konstanten μ.

(b) Zeigen Sie, daß das formal eine Lösung ist.

Wir definieren nun unsere Folgenglieder, durch die heuristische Lösung inspiriert,

$$y_n(x) = \mu + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t)). \tag{3}$$

Dies entspricht $y_n = F(y_{n-1})$. Betrachte: In die rechte Seite setzen wir immer nur bekannte Dinge ein, beginnend mit einer willkürlichen, aber einfachen Wahl y_0. Falls nun (y_n) konvergiert, ist die gesuchte Lösung $y = y_\infty$.

(c) Zeigen Sie, daß mit $||y|| := \max_{x \in [0, |2\lambda|^{-1}]} |y(x)|$ unsere Iterationsvorschrift (3), angewandt auf den Fall (1), eine konvergente Folge ergibt. (Hinweis: Ziehen Sie den Betrag ins Integral; überlegen Sie, daß dies eine Ungleichung ergibt. Machen Sie eine Abschätzung des Integrals der Art $\int |f(t)|dt \leq \int \max(|f(t)|)dt$.)

Nun lösen wir die DGL (1)

(d) Führen Sie, mit $y_0 = \mu$ (eine konstante Funktion) beginnend, wieder und wieder die Iteration durch. Wir nähern uns dadurch einer eindeutigen Lösung. Warum?

(e) Identifizieren Sie die entstehende Potenzreihe.