Computerphysik WS 2017/2018

Prof. Dr. Petra Imhof, FU Berlin

Übungsblatt 2: Nullstellensuche

31. Oktober 2017

Abgabe bis **09.11.2017** 23:55 Uhr

Hinweis: Benutzen Sie analytische Ableitungen und
`numpy.log()`, `numpy.sin()`, `numpy.cos()`, `numpy.arccos()`, `numpy.sqrt()`, `numpy.arange()`, `numpy.array()`, `matplotlib.pyplot`

Aufgabe 2.1: Bisektionsverfahren, Einfaches Pendel (6 Punkte)

Betrachten Sie ein einfaches Pendel (Punktmasse m an einem starren, masselosen Stab der Länge l) mit folgender Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} sin(\theta) \tag{1}$$

θ ist der Auslenkungswinkel, g die Erdbeschleuningung. Für kleine Auslenkungswinkel θ und harmonische Oszillation ist $sin(\theta) \approx \theta$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \tag{2}$$

mit der Lösung

$$\theta(t) = \theta_0 sin(\omega t) \tag{3}$$

mit θ_0 Amplitude der Auslenkung, $\omega = 2\pi/T = \sqrt{g/l}$.

Setzen Sie $\omega = 1$ und $\theta_0 = \pi/4$ und:

a) (1 Punkt) Implementieren Sie eine Funktion, um θ im Bereich $t \in [0, 10]$ zu berechnen und plotten Sie diese für dieses Zeitintervall (t ist in Sekunden).

b) (2 Punkte) Implementieren Sie eine Funktion, welche die Nullstelle von $\theta(t)$ mittels Bisektionsverfahren bestimmt. Benutzen Sie Ihre Implementierung um die Nullstelle(n) von $\theta(t)$ im Zeitintervall $t \in [1, 4]$ zu bestimmen. Wählen Sie als Toleranz $\epsilon = 0.001$.

c) (2 Punkt) Variieren Sie nun die Toleranz und bestimmen sie die Anzahl der benötigten Iterationen für:

$$\epsilon = \left\{2^{-1}, 2^{-2}, ..., 2^{-20}\right\} \tag{4}$$

(i) Plotten Sie die Anzahl Iterationen vs. ϵ in doppelt logarithmischer (log-log) Darstellung.
(ii) Plotten Sie die Nullstellen der Funktion vs. ϵ in einer semi-logarithmischen (log) Darstellung.

(iii)Wählen Sie anhand Ihrer plots aus (i) und (ii) eine geeignete Toleranz ϵ und berechnen Sie damit die Nullstelle von $\theta(t)$ im Zeitintervall $t \in [1, 4]$.

d) (1 Punkt) Suchen sie jetzt das Maximum θ_{Max} mit Hilfe Ihres Bisektionsverfahrens.

Aufgabe 2.2: Newtonverfahren (8 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = x^2 - 4$$
$$g(x) = 2x^4 + 8x^3 + 0.2x^2 - x$$
$$h(x) = 2\,(\sin(x))^2 + 0.95x^2 + 7x + 15$$

a) (1 Punkt) Implementieren Sie das Ihnen aus der Vorlesung bekannte (exakte) Newtonverfahren zum Auffinden von Nullstellen. Ihre Funktion sollte sowohl die Nullstelle als auch die Anzahl der Iterationen ausgeben.

b) (1 Punkte) Implementieren Sie nun eine Variante, in welcher die Ableitung durch das Sekantenverfahren approximiert wird.

c) (3 Punkte) Wenden Sie beide Verfahren jeweils auf die Ihnen gegebenen Funktionen mit folgenden Startwerten an:

   (i) $f(x) : x_0 = 1$, $x_0 = -1$, $x_0 = 1337$

   (ii) $g(x) : x_0 = -0.5$, $x_0 = 0.2$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 42$

   (iii) $h(x) : x_0 = -2.5$, $x_0 = 0$, $x_0 = 2.5$

d) (3 Punkte) Beschreiben und Erklären Sie Ihre Beobachtungen für alle Funktionen. Nehmen Sie dabei Bezug auf die Nullstellen und Anzahl der Iterationen fr die gegebenen Startwerte.

Bemerkung: Für die Initialisierung des Sekantenverfahrens benutzen Sie einmalig die exakte analytische Ableitung. Warum ist das nötig?

Aufgabe 2.3: Fixpunktiteration (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x - 2 \cdot \sin(x)^2 \tag{5}$$

Bestimmen Sie die Nullstelllen der Funktion im Intervall [0,1].

a) (1 Punkt) Werten Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall 0.00 bis 1.00 aus. Verwenden Sie dafür eine Schrittweite von 0.01 und plotten Sie $f(x)$.

b) (2 Punkte) Definieren Sie eine Funktion, welche die Nullstellen von $f(x)$ durch die Fixpunktiteration ermittelt. Eingabeparameter sollen eine Fixpunktgleichung $\phi(x)$, der Startwert x_0 und die Anzahl der durchzuführenden Iterationen n sein. Ausgabeparameter soll ein `numpy.array` sein, welcher den Iterationsverlauf beinhaltet.

c) (2 Punkt) Für $f(x)$ lassen sich folgende Fixpunktgleichungen definieren:

$$\phi_1(x) = 2 \cdot \sin(x)^2 \tag{6}$$

.

$$\phi_2(x) = \arcsin(\sqrt{(x/2)}) \tag{7}$$

Entscheiden (und begründen) Sie, welche Fixpunktgleichung sich (wahrscheinlich) zur Berechnung welcher Nulstelle eignet. Schätzen Sie dafür die Nullstellen anhand ihres geplotteten Graphen.

d) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Nullstellen mit ihrer in b) geschriebenen Funktion. Verwenden Sie dafür die jeweils geeignete Fixpunktgleichung, ihre geschätzte Nullstelle als Startwert und eine geeignete Anzahl an Iterationsschritten.