Prof. Dr. Petra Imhof, FU Berlin

Übungsblatt 4: Lineare Gleichungssysteme und Matrizen - Teil 2 (20 Punkte)

14. November 2017

Abgabe bis **23.11.2017** 23:55 Uhr

Hinweis: Benutzen Sie numpy wie in den einzelnen Aufgaben angegeben.

Aufgabe 4.1: Inverse einer Matrix (5 Punkte)

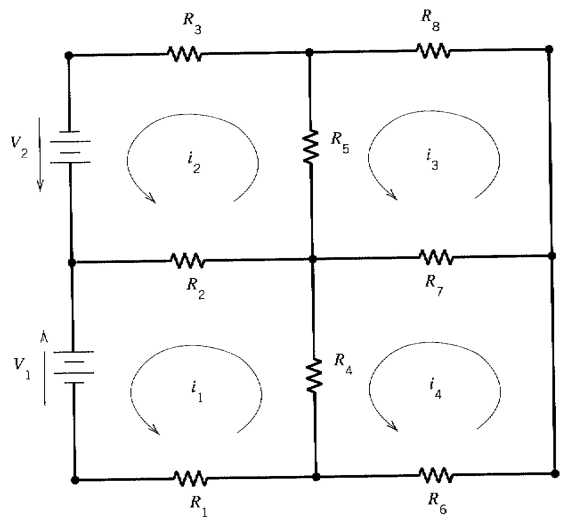
Gegeben sei die Matrix A.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 8 & -3 \\ 2 & 0 & 7 & 5 & -4 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & -6 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -9 & 0 & 9 & 1 \\ 1 & -9 & 9 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) (2 Punkte) Definieren Sie eine Funktion, welche die Determinante einer beliebigen, quadratischen Matrix nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz bestimmt. Als Eingabeparameter soll die Funktion einen (nxn) `numpy.array` erhalten und die Determinante zurückgeben.

(b) (2 Punkte) Definieren Sie eine Funktion, welche die Inverse einer beliebigen, quadratischen Matrix nach dem Gauss-Verfahren (auch Gauss-Jordan Verfahren genannt) mit und ohne Pivotisierung bestimmt. Als Eingabeparameter soll die Funktion einen (nxn) `numpy.array` erhalten und einen (nxn) `numpy.array` mit der Inversen zurückgeben. Nutzen Sie zur Überprüfung der Invertierbarkeit Ihre Funktion aus a).

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix A mit und ohne Pivotisierung. Überprüfen Sie ihr Ergebnis mit $A \cdot A^{-1} = I$.



Aufgabe 4.2: Cholesky Zerlegung (6 Punkte)

Betrachten Sie den Stromkreis in Figure1, wobei die Widerstände R_1 =R_2 =R_3 =R_4 =5 und R_5 =R_6 = R_7 =R_8 =2. Außerdem gilt für die Spannung V_1 =V_2 =5 V.

(a) (2 Punkte) Implementieren Sie eine Funktion, welche ein lineares Gleichungssystem mittels Cholesky-Zerlegung löst. Diese Funktion soll eine separate Funktion für Vorwärts und Rückwärtseinsetzen nutzen.

(b) (1 Punkte) Nutzen Sie die Kirchoffschen Gesetze und formulieren Sie 4 lineare gleichungen. Diese können in der Matrixform $\mathbf{Ax}$=$\mathbf{b}$ geschrieben werden, wobei $\mathbf{A}$ eine 4×4 Matrix ist.

(c) (1 Punkt) Überprüfen Sie, ob $\mathbf{A}$ alle Bedingungen erfüllt um mittels Cholesky-Zerlegung das Gleichungssystem zu lösen.

(d) (1 Punkt) Lösen Sie dann die Gleichungen und bestimmen Sie i_1, i_2, i_3 und i_4 mittels Cholesky-Zerlegung.

(e) (1 Punktt) Bestimmen Sie die Anzahl benötigter Punktoperationen (Multiplikationen, Divisionen und Wurzeloperationen).

Aufgabe 4.3: Jacobi und Gaus-Seidel Verfahren (9 Punkte)

Zu lösen sei das lineare Gleichungssystem der Form $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 0 \\ -4 & -2 & 8 & -2 \\ 12 & 6 & 2 & 17 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -21 \\ 18 \\ 181 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(a) (2 Punkte) Definieren Sie eine Funktion, welche ein lineares Gleichungssystem durch das Jacobi Verfahren löst. Als Eingabeparameter soll die Funktion einen (nxn) `numpy.array` ($\boldsymbol{A}$), einen (nx1) `numpy.array` ($\mathbf{b}$), einen (nx1) `numpy.array` ($\mathbf{x_0}$) und die Anzahl an Iterationsschritten erhalten und einen (nx1) `numpy.array` ($\mathbf{x}$) Lösungsvektor zurückgeben.

(b) (3 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für die Startvektoren

$$\mathbf{x_{0,1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{x_{0,2}} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix} \mathbf{x_{0,3}} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{2}$$

und plotten Sie jeweils den Iterationsverlauf für die einzelnen Variablen. Kommentieren Sie ihre Ergebnisse.

(c) (2 Punkte) Definieren Sie eine Funktion, welche ein lineares Gleichungssystem durch das Gauss-Seidel Verfahren löst. Als Eingabeparameter soll die Funktion einen $(n \times n)$ `numpy.array` ($\boldsymbol{A}$), einen $(n \times 1)$ `numpy.array` ($\mathbf{b}$), einen $(n \times 1)$ `numpy.array` ($\mathbf{x_0}$) und die Anzahl an Iterationsschritten erhalten und einen $(n \times 1)$ `numpy.array` ($\mathbf{x}$) Lösungsvektor zurückgeben.

(d) (2 Punkte) Wiederholen Sie b) mit ihrer Gaus-Seidel Funktion und vergleichen Sie die Ergebnisse.