

Übungsblatt 6: Nichtlineare Gleichungssysteme und Interpolation (20 Punkte)

28. November 2017

Abgabe bis **07.12.2017** 23:55 Uhr

Hinweis: Zur Lösung von linearen Gleichungssystemen können Sie `np.linalg.solve` verwenden.

Aufgabe 6.1: Nicht-lineare Gleichungssysteme (5 Punkte)

Gegeben sei das nicht-lineare Gleichungssystem $\vec{f}(x, y, z)$ mit

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 * \sin(z) &= 9 \\x + \sqrt{y} + \frac{z}{\pi} &= 6 \\(x + y - 7)^2 + \cos(z) &= -1\end{aligned}$$

- (a) (2 Punkte) Definieren Sie eine Funktion, welche ein nicht-lineares Gleichungssystem löst. Als Input soll die Funktion das Gleichungssystem $\vec{f}(x, y, z)$, die dazu gehörige Jacobimatrix $D[f(x, y, z)]$ (mit den partiellen analytischen Ableitungen), einen Startvektor \vec{x}_0 und die maximale Anzahl an Iterationen erhalten und den Lösungsvektor zurückgeben.
- (b) (1 Punkte) Lösen Sie das Gleichungssystem für den Startvektor $\vec{x}_0 = (2, 2, 2)$
- (c) (2 Punkte) Lösen Sie das Gleichungssystem für die Startvektoren $\vec{x}_0 = (1.5, 1.5, 1.5)$ und $\vec{x}_0 = (2.5, 2.5, 2.5)$. Kommentieren Sie ihre Ergebnisse.

Aufgabe 6.2: Interpolation und Horner-Schema (15 Punkte)

Tabelle 1: Experimenteller Streuquerschnitt für Neutronenstreuung.

E (MeV)	0	25	50	75	100	125	150	175	200
σ (mb)	10.6	16.0	45.0	83.5	52.8	19.9	10.85	8.25	4.7
$\Delta\sigma$ (mb)	1.386	2.09	3.85	2.2	1.43	1.76	0.055	2.156	0.671

Tabelle 1 gibt die Messdaten eines Streuexperiments an (Neutronenstreuung an Atomkernen). Auftretende Messfehler ($\Delta\sigma$) werden für einige aufeinanderfolgende Messungen aus der Standardabweichung abgeschätzt. Das Hauptziel dieses Experiments ist die Bestimmung des Streuquerschnitts (σ), sowie der Position des Resonanzpeaks und dessen Halbwertsbreite.

(a) **Polynom-Interpolation (5 Punkte)**

Eine mathematisch einfache Interpolationsmethod ist die Polynominterpolation. Für ein Polynom vom Grad n ist

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Die Interpolation ist eine Menge von Punkten $\{(x_i, f_i), i \in \{0, 1, \dots, n\}, x_i, f_i \in \mathbb{R}\}$ und $P_n(x_i) = f_i, 0 \leq i \leq n$.

- (i) (1 punkt) Implementieren Sie eine Funktion, welche E und σ als x und f auffasst und eine "naive" Polynom-interpolation (*Hinweis: Sie stellen ein Gleichungssystem auf*) dieser Punkte durch führt.
- (ii) (2 punkte) Implementieren Sie eine Funktion, welche Wertepaare x und f als Argumente bekommt und eine Newton-Interpolation dieser Punkte ausführt.
- (iii) (2 punkte) Plotten Sie die Daten aus Tabelle 1 in einen Graphen (inklusive der Fehlerbalken). Interpolieren Sie diese Daten mittels der in (i) und (ii) implementierten Funktionen. Plotten Sie die erhaltenen Polynome für $x \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 200\}$.

(b) **Kubische Spline-Interpolation (5 Punkte)**

- (i) (3 punkte) Implementieren Sie eine Funktion, welche Wertepaare x und f als Argumente bekommt und mit diesen eine kubische Spline-Interpolation durchführt.
- (ii) (2 punkte) Wenden Sie die kubische Spline-Interpolation auf die experimentellen Daten aus Tabelle 1 an. Plotten Sie Ihr Ergebnis und vergleichen Sie den Graphen mit denen aus der "naiven" und der Newton-Interpolation erhaltenen Graphen. Erklären Sie Ihre Beobachtungen.

(c) **Horner-Schema (5 Punkte)**

- (i) (1 Punkt) Implementieren sie das Hornerschema as eine Funktion, welche die Koeffizienten eines Polynoms, sowie die Stelle x bekommt und den Funktionswert $P_n(x)$ an der Stelle x ausgibt.
- (ii) (1 Punkte) Erweitern Sie Ihre Implementierung so, dass mittels Hornerschema die Funktionswerte der k -ten Ableitung an der Stelle x berechnet und ausgegeben werden. Nehmen Sie k zu den Argumenten der Funktion hinzu. (*Hinweis: Sie können $k = 0$ als default setzten*)
- (iii) (3 Punkte) Nutzen Sie Ihre Implementierung, um für die in Aufgabe 6.2.a bestimmten Polynome die Maxima in $x \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 200\}$ zu finden. Ist der Resonanzpeak darunter? (*Hinweis: Für Nullstellensuche können Sie ein beliebiges bereits besprochenes Verfahren oder `numpy.roots` verwenden. Sie sollen keine analytischen Ableitungen berechnen.*)