Computerphysik WS 2017/2018

Prof. Dr. Petra Imhof, FU Berlin

Übungsblatt 8:
Differentiation und Integration
(20 Punkte)

13. Dezember 2017

Abgabe bis **21.12.2017** 23:55 Uhr

Aufgabe 8.1: Differentiation (10 Punkte)

Gegeben sind folgende Funktionen

$$f(x) = 12x^3 + 5x^{-2} + 2x - 17$$

$$g(x) = \cos(x)$$

$$h(x) = 12x^5 - 2x^2 \sin(x)$$

$$J(x, y) = x^2 + x \sin^2(y)$$

(a) (1 Punkt) Implementieren Sie eine Funktion welche Ihnen die Ableitung mittels der finiten Differenz 1. Ordnung berechnet.

(b) (1 Punkt) Implementieren Sie eine Funktion welche Ihnen die Ableitung mittels der finiten Differenz 2. Ordnung berechnet.

(c) (3 Punkte) Berechnen Sie die numerischen Ableitungen für

- $f(x)$im Intervall $[1, 2]$
- $g(x)$im Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$
- $h(x)$im Intervall $[0, 5]$

mit den von Ihnen implementierten Methoden (Dikretisierungswert: 0.1). Vergleichen Sie Ihre Resultate mit den zugehörigen analytischen Ableitungen in einem Plot für jede Funktion. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

(d) (1 Punkt) Ändern Sie die Diskretisierungswert beider Ableitungsmethoden fuer $f(x)$. Bei welchen Diskretisierungen sind keine sichtbaren Unterschiede zur analytischen Ableitung mehr erkennbar? Hinweis: Plots bieten sich hier mehr als nur an!

(e) (1 Punkt) Reduzieren Sie nun die Genauigkeit von x auf 16 bit (np.float16) und finden Sie die geeignete Diskretisiereung für die Ableitung mit der finiten Differenz 2. Ordnung. Vergleichen Sie die erhaltene Diskretisierung mit der aus Aufgabe (d). Was fällt Ihnen auf? Versuchen Sie sich an einer Erklärung!

(f) (2 Punkte) Implementieren sie die Ableitung mit der finiten Differenz 2. Ordnung für 2D Funktionen.

(g) (1 Punkt) Werten Sie die Genauigkeit der numerischen Ableitungen von $J(x, y)$ am Punkt $(x = 5, y = -2)$ aus, indem Sie den Diskretisierungsfehler für jede Dimensionen bestimmen und plotten. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 8.2: Integration (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = -x^4 - x^3 + 13 \cdot x^2 + x - 12$$

(a) (1 Punkt) Plotten Sie die Funktion f(x) im Intervall $[-4, 3]$ und bestimmen Sie das Integral im vorgegeben Bereich "per Hand".

(b) (2 Punkte) Definieren Sie eine Funktion, welche die Rechteckregel zur numerischen Integration verwendet und bestimmen Sie das Integral im vorgegebenen Bereich mit $n = 100$ Teilintervallen.

(c) (2 Punkte) Definieren Sie eine Funktion, welche die Trapezregel zur numerischen Integration verwendet und bestimmen Sie das Integral im vorgegebenen Bereich mit $n = 100$ Teilintervallen.

(d) (2 Punkte) Definieren Sie eine Funktion, welche die Simpsonregel zur numerischen Integration verwendet und bestimmen Sie das Integral im vorgegebenen Bereich mit $n = 100$ Teilintervallen.

(e) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Abhängigkeit des numerischen Integrals von der Integrationsschrittweite h. Variieren Sie dazu die Anzahl der Teilintervalle n so, dass die Schrittweite zwischen 1 und 10^{-6} liegt. Erstellen Sie einen doppelt-logarithmischen Plot, in welchem Sie die absolute Abweichung des Integrals von ihrer analytischen Lösung als Funktion der Schrittweite darstellen. Entspricht der Verlauf Ihren Erwartungen? Zeichnen Sie zur Beantwortung dieser Frage geeignete Funktionen h^α in Ihren Plot ein.