Computerphysik WS 2017/2018

Prof. Dr. Petra Imhof, FU Berlin

Übungsblatt 9: Gewöhnliche Differentialgleichungen (20+5 Punkte)

22. Dezember 2017

Abgabe bis **11.01.2018** 23:55 Uhr

Aufgabe 9.1: Gewoehnliche Differentialgleichung 1. Ordnung (5 Punkte)

In den 30ern und 40ern des letzten Jahrhunderts beschrieb Monod das bakterielle Wachstum unter Einbezug der zur Verfügung stehenden Substratkonzentration,

$$\frac{dN(t)}{dt} = r \cdot N(t) \cdot \frac{\gamma \cdot S_0 + N_0 - N(t)}{\gamma \cdot S_0 + \alpha \cdot \gamma + N_0 - N(t)} \tag{1}$$

wobei $N(t)$ die Populationszahl zur Zeit t ($N(0) = N_0$), $S(t)$ die Substratkonzentration zur Zeit t ($S(0) = S_0$), r die Wachstumsrate, γ die Substratverwertung und α ein Formfaktor ist.

Für das Darmbakterium E. coli gilt zum Beispiel (bei 30 °C und Glucose als Substrat): $r = 1.35\ h^{-1}$, $\gamma = 0.23$ und $\alpha = 0.004\ \frac{g}{L}$.

Im Folgenden sollen Sie drei verschiedene Methoden implementieren um beliebige eindimensionale gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen. Jede Methode sollte als Funktion implementiert werden, die als Eingabeparameter die Differentialgleichung, die Anfangs- und Endpunkte $t_{\min} = 0$ h, $t_{\max} = 10$ h, den Diskretisierungsschritt $h = 0.1$ h und eine Anfangsbedingung N_0 hat.

(a) (3 Punkte) Implementieren Sie die Euler Methode, die modifizierte Euler Methode (Zweischrittverfahren) und die vierstufige Runge Kutta Methode.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Populationsverlauf mit den von Ihnen implemtierten Methoden. Nutzen Sie für $N_0 = 0.25 \cdot \alpha \cdot \gamma$ und $S_0 = 2 \cdot \alpha$. Plotten und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 9.2: Gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung (5 Punkte)

In einem parallel geschalteten, source-free, RLC Stromkreis ergibt sich für die Kondensator Spannung $v(t)$ folgende Differentialgleichung 2. Ordnung.

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0 \tag{2}$$

Im folgenden sollen Sie den Verlauf von $v(t)$ im Intervall $t = [0s, 3s]$ für die Widerstände $R_1 = 1.923\Omega$, $R_2 = 5.0\Omega$ und $R_3 = 6.25\Omega$ bestimmen. Außerdem gelte $L = 1H$ und $C = 10mF$. Die Anfangsbedingungen seien:

$$v(0) = 5V \tag{3}$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{v(0)}{RC} \tag{4}$$

(a) (2 Punkte) Modifizieren Sie ihre zuvor definierte Runge Kutta Methode, so dass Differentialgleichungen 2. Ordnung gelöst werden können.

Hinweis: Teilen Sie die Differentialgleichung 2. Ordnung in 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung, in dem Sie $u_1 = v$ und $u_2 = \frac{dv}{dt}$ setzen.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie $v(t)$ für alle drei Widerstände und plotten Sie die Ergebnisse in einem gemeinsamen Plot im Intervall $t = [0s, 3s]$. Kommentieren Sie ihre Ergebnisse.

(c) (1 Punkt) Die analytischen Lösungen für das Problem ergeben sich zu:

$$v_{R1}(t) = 10.625e^{-2t} - 5.625e^{-50t} \tag{5}$$

$$v_{R2}(t) = (5 + 150t)e^{-10t} \tag{6}$$

$$v_{R3}(t) = (5cos(6t) + 20sin(6t))e^{-8t} \tag{7}$$

Plotten Sie die absoluten Fehler (ihrer Lösungen für $v(t)$ gegenüber den analytischen Lösungen) im Intervall $t = [0s, 3s]$. Kommentieren Sie ihre Ergebnisse.

Aufgabe 9.3: Santa Claus und seine Rentiere (5 Punkte)

Santa Claus ist bekanntlich das freundlichste Wesen auf diesem Planeten, da er uns jährlich mit Geschenken überhäuft. An einer Weihnacht 1895 war Santa Claus bereits fast fertig mit seiner Runde. Seine Rentiere und er waren gut in Fahrt und ihre Bewegung glich einem harmonischen Oszillator der Form

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\frac{k}{m}x(t) \tag{8}$$

, wobei $m = 2.4$ und $k = 1.2$.

Wie aus dem nichts taucht der Grinch auf und versucht, wie jedes Jahr, Weihnachten zu verhindern. Dieses Mal ist er auch gut vorbereitet und hat eine eulersche Rückwärtsintegrationskanone aus der Area 51 mitgebracht. Das Überraschungsmoment nutzend schießt er damit auf den Weihnachtsmann und seine treuen Begleiter...

(a) (1 Punkt) Variieren Sie Ihre Implementierung des Euler-Verfahrens so, dass Sie vorwärts oder rückwärts integrieren können.

(b) (1 Punkt) Integrieren Sie die gegebene Differentialgleichung vorwärts mit $x(t = 0) = 0$ und $v(t = 0) = 5$ im Zeitintervall von $0 - 100$. Wählen sie dazu eine geeignete Diskretisierung.

(c) (1 Punkt) Integrieren Sie die gegebene Differentialgleichung rückwärts. Wählen Sie hierfür als Startparameter $x(t = 100)$ und $v(t = 100)$ aus der Vorwärts-Integration.

(d) (1 Punkt) Vergleichen Sie die erhaltenen Trajektorien aus der vorwärts und rückwärts Integration. Was fällt Ihnen auf? Versuchen Sie sich an einer Erklärung.

(e) (1 Sympathiepunkt) Finden Sie ein schönes Ende für den Zwischenfall mit Santa und dem Grinch im Jahr 1895.

Aufgabe 9.4: Santas Kamin-Pirouette (4 Punkte)

Wie jedes Jahr bereitet sich Santa Claus auf seinen großen Auftritt vor. Eine seiner Spezialitäten ist es sich durch Kamine durchzuzwängen um die Geschenke persönlich unter den Weihnachtsbaum zu legen. Unglücklicherweise werden die Kaminschächte von Jahr zu Jahr schmaler, während die Süßigkeiten von Jahr zu Jahr mehr Zucker enthalten... Nach 6 Monaten schwerer Tüftelei hat Santa eine zauberhafte Lösung: Er vollführt eine halbe Pirouette während er den Kaminschacht hinunter saust (nicht zur Nachahmung empfohlen!). Die Rotation lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -M^2 \Phi(\varphi)$$

Die Magie setzt allerdings nur dann ein, wenn Santa bei $\varphi = 5°$ beginnt und bei $\varphi = 185°$ endet. Es gilt weiterhin, dass $\Phi(5) = 0.996194$, $\Phi(185) = -0.996194$ und $\Phi'(5) = 0.958924$.

Hinweis: Verwenden Sie radiant als Einheit.

(a) (1 Punkte) Implementieren Sie das Schießverfahren derart, dass Sie M raten müssen. Für alle anderen Parameter nutzen Sie die Gegebenen. Hinweis: Ihnen ist die Wahl des Integrators überlassen.

(b) (1 Punkt) Benutzen Sie das von Ihnen implementierte Schießverfahren um $F(M) = \Phi(\varphi = 185; M) - \Phi(185)$ für $M = 1$ und $M = 10$ zu bestimmen.

(c) (1 Punkt) Ermitteln Sie mittels Bisektionsverfahrens alle weiteren Nullstellen von $F(M)$ zwischen $M = 1$ und $M = 10$.

(d) (1 Punkt) Überprüfen Sie die Richtigkeit der von Ihnen bestimmten Nullstellen, indem Sie $F(M)$ über M im Intervall $[1, 10]$ plotten.

Aufgabe 9.5: Dynamische Lichterkette (6 Punkte)

Jul hat sich eine neue, dynamische Weihnachtsbeleuchtung ausgedacht. Es handelt sich um eine eindimensionale Lichterkette, die z.B. am Tannenbaum angebracht werden kann. An jedem Beleuchtungsort (Tannenzweig) können die Kerzne mit einer Leuchtkraft von null bis zu maximal 4 Einheiten brennen. Die einzelnen Beleuchtungsorte sind in der Lichterkette gleichmäßig, je 20 cm voneinander entfernt. Es gibt insgesamt 24 solcher Beleuchtungsorte. Jede Sekunde wechselt das Beleuchtungsmuster womit es so aussieht als ob die Lichter zerfließen oder "weiterlaufen". Dies wird durch Erhöhung oder Erniedrigung der Leuchtkraft erwirkt. Dabei entspricht eine Änderung der Leuchtkraft an einerm Ort immer auch der Änderung am Nachbarort. "Weitergabe" von Leuchtkrafteinheiten nach links und rechts sollen gleich wahrscheinlich sein und keine Weitergabe so wahrscheinlich wie Weitergabe nach rechts und links zusammen. An der ersten und letzen Beleuchtungsstelle brennt immer eine Kerze mit je einer Einheit. Zu Beginn brennen an den Stellen 4, 8, 12, 16 und 20 je die Kerzen mit je vier Einheiten.

Um den Effekt noch zu verstärken, kann die Nutzerin zwischen drei Modi wählen:

1. keine weiteren Effekte
2. alle 10 Sekunden wird wieder auf den Anfangszustandzurück gesetzte
3. alle 5 Sekunden werden an den geradzahligen Leuchtorten zwei Leuchteinheiten hinzugefügt und an den ungeradzahligen Orten wird eine Einheit entfernt.

(a) (2 Punkte) Implementieren Sie ein Verfahren zur Lösung der Lichter-Diffusionsgleichung ohne Zusatzeffekte. Integrieren Sie mittel Euler-Zweischrittverfahren. Sie können hierzu in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem `numpy.linalg.solve` lösen, um die neue Lichtpunktverteilung zu erhalten. Alternativ kann auch mit einer Propagationsmatrix nach $\mathbf{n}(t + \delta t) = \mathbf{P}\mathbf{n}(t)$ multipliziert werden. Es ist (ohne erste und letzte Zeile)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-2K & K & 0 & 0 & ... & 0 \\ K & 1-2K & K & 0 & ... & 0 \\ 0 & K & 1-2K & K & ... & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & ... & 0 & K & 1-2K & K \\ 0 & ... & 0 & 0 & K & 1-2K \end{pmatrix}$$

mit $K = \frac{D\delta t}{\delta x^2}$ wobei D die Diffusionakonstante, δt der Zeitschritt uind δx der Abstand zweier Leuchtorte ist.

(b) (1 Punkt) Implementieren Sie die Zusatzeffekte als Option.

(c) (3 Punkte) Berechnen Sie die Beleuchtungsmster über eine Zeit von 2 Minuten für jeden der drei Modi. Stellen Sie den Verlauf der Beleuchtungsmuster mit der Zeit dar. Zu jedem Zeipunkt muss also ein Array von Anzahl Kerzen pro Ort dargestellt werden. Dies geht z.B. als heatmap, wobei Sie einer Anzahl Kerzen eine bestimmte Farbe zuweisen.

Frohe Feierage!