Computerphysik WS 2016/2017

Prof. Dr. Petra Imhof, FU Berlin

Übungsblatt 1: Gleitkommazahlen und Fehler

20. Oktober 2016

Aufgabe 1.1: Binärzahlen (6 Punkte)

Nach IEEE-Sandard werden Gleitkommazahlen so dargestellt:

32bit-Genauigkeit: 1Bit Vorzeichen, s, r=8 Bit Exponent, e, p=23 Bit Mantisse, m
seeeeeeeemmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmm
8bit-Genauigkeit: 1Bit Vorzeichen, s, r=4 Bit Exponent, e, p=3 Bit Mantisse, m
seeeemmm

wobei der Exponent mit dem Bias $b = 2^{r-1} - 1$ versehen wird.

a) (1 Punkt) Welchen Wert hat der Bias für 32Bit-Zahlen, welchen für 8Bit Zahlen?

b) (2 Punkte) Wandeln Sie folgende Dezimalzahlen um in Binärzahlen mit 32Bit und 8Bit Genauigkeit: 123.456 ; 0.2 ; 0.00004 ; -400000

c) (3 Punkte) Wandeln Sie die Binärzahlen wieder zurück in Dezimalzahlen. Bestimmen Sie jeweils den absoluten und relativen Fehler hin und her umgewandelten Dezimalzahl.

Hinweis: Sie dürfen für die Umwandlung ein Pythonprogramm schreiben, müssen es aber nicht.

Aufgabe 1.2: Rechenoperationen mit dem Zweierkomplement (4 Punkte)

Das Zweierkomplement ist ein geschicktes Mittel um mit wenig Speicherbedarf positive und negative integer-Zahlen darzustellen. Mache dir klar wie dieses Funktioniert. Im Folgenden werden wir nur dieses verwenden mit 8-bit. Bitte beantworten Sie alle Fragen schriftlich und senden Sie die Lösung digital (als pdf).

a) Welche Zahlen können mit einem 8-bit integer im Zweierkomplement dargestellt werden (Die Antwort bitte im Zehnersystem!)? Wie lautet die folgende binäre 8-bit-Zahl im Zehnersystem: $11111111_{(2)} = ?_{(10)}$.

Addition

b) Berechnen Sie die Summe $15_{(10)} + 7_{(10)}$ im Zweierkomplement und wandeln Sie es anschliessend wieder ins Zehnersystem um.

Subtraktion

c) Berechnen Sie im Zweierkomplement und wandeln Sie es anschliessend wieder ins Zehnersystem um: $8_{(10)} - 15_{(10)}$.

Multiplikation

d) Berechnen Sie die Multiplikation $(-2)_{(10)} \cdot (-5)_{(10)}$ im Zweierkomplement und wandeln es anschließend wieder ins Zehnersystem um.

Aufgabe 1.3: Fehlerfortpflanzung (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \cos\left(x^2\right) \cdot \sin(x) \tag{1}$$

- 1) (1 Punkt) Definieren Sie eine Funktion, die $f(x)$ auswertet. Eingabeparameter soll ein `numpy.array` mit x Werten sein, Ausgabeparameter ein `numpy.array` mit den Funktionswerten.
- 2) (1 Punkt) Werten Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $-\pi$ bis π aus. Verwenden Sie dafür eine Schrittweite $\frac{\pi}{100}$ und plotten Sie f(x).
- 3) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Schranke für den maximalen Fehler (M) der Funktion $f(x)$ im Intervall $-\pi$ bis π.

  Hinweis: Verwenden Sie eine analytisch berechnete Ableitung von $f(x)$.
- 4) (2 Punkte) Angenommen jeder x Wert ist nur mit einer Genauigkeit von $\Delta x = 0.1$ bekannt. Schätzen Sie den punktweisen, absoluten Fehler $|\Delta f(x)|$ mit folgenden Beziehung ab:

  $$|\Delta f(x)| = |f'(x)| \cdot \Delta x \tag{2}$$

  Stellen Sie $f(x)$, $f(x) - |\Delta f(x)|$, $f(x) + |\Delta f(x)|$, $f(x) - M$ und $f(x) + M$ in einem gemeinsamen Plot dar.
- 5) (1 Punkt) Auf welchen Wert muss Δx erhöht werden, damit gilt $f(x) - |\Delta f(x)| = f(x) - M$ (alternativ $f(x) + |\Delta f(x)| = f(x) + M$)? Wie oft, wo und warum ist dies zu beobachten?

Aufgabe 1.4: Float und Integer in Python (2 Punkte)

Schreiben Sie Python code, indem Sie x=223 und y=71 definieren, und zwar

1. x und y beide als type integer
2. x und y beide als type float

a) Berechnen Sie in Ihrem Python code für beide Fälle $f(x, y) = (\frac{x}{y})^4$

b) Bestimmen Sie die Differenz der beiden Resultate von $f(x, y)$

Aufgabe 1.5: Flops (2 Punkte)

Floating Point Operations Per Second (FLOPS) dienen als Maß für die Leistungsfähigkeit von Rechnern. Die Liste der Top Supercomputer findet man z.B. unter `https://www.top500.org`.

a) (1 Punkt) Wieviele FLOPS leisten die aktuellen top 3 Computer und wie ist ihr Stromverbrauch?

b) (1 Punkt) Im Jahr 2013 waren auch `Konrad` und `Gottfried` (s. auch `https://www.hlrn.de/home/view/NewsCenter/ArticleNov2013KonradAndGottfried`) unter den top 500. Wer sind die beiden und wieviele FLOPS schaffen diese jeweils?