Blatt 10

Aufgabe 1

(a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 6, \quad f'(x) = 6x - 5$

(b) $f(x) = \sqrt{2x+3}, \quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$

(c) $f(x) = \sin(\ln x), \quad f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$

(d) $f(x) = \cot(2x) = \dfrac{\cos(2x)}{\sin(2x)}, \quad f'(x) = -2\dfrac{\sin^2(2x) + \cos^2(2x)}{\sin^2(2x)} = -\dfrac{2}{\sin^2(2x)}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1+\tan(x)}$, Mit $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ findet man $f'(x) = -\dfrac{1}{\cos^2 x}\dfrac{1}{(1+\tan(x))^2}$

(f) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(3x)}, \quad f'(x) = 3\cos(3x)\mathrm{e}^{\sin(3x)}$

Aufgabe 2

(a) $\displaystyle\int dx\, \frac{1}{5-2x} = -\frac{1}{2}\ln|5-2x| + c$

(b) $\displaystyle\int dx \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int dx \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{a}{a}\int dz \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin(z) + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$

mit der Substitution $z = \dfrac{x}{a}, \quad dx = adz$

(c) $\displaystyle\int dx\, (x^5 - 4x^3) = \frac{1}{6}x^6 - x^4 + c$

(d) $\displaystyle\int dx\, x^3 \ln x \overset{(1)}{=} \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int dx\, x^4 \frac{1}{x} = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int dx\, x^3 = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + c$

(1): Partielle Integration mit $u' = x^3$, $u = \frac{1}{4}x^4$, $v = \ln x$, $v' = \frac{1}{x}$.

(e) $\displaystyle\int dx\, x\mathrm{e}^x \sin x$

Als Vorbereitung: $\displaystyle\int dx\, \mathrm{e}^x \cos x \overset{(1)}{=} \mathrm{e}^x \cos x + \int dx\, \mathrm{e}^x \sin x = \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int dx\, \mathrm{e}^x \cos x$

(1): Partielle Integration mit $u' = \mathrm{e}^x$, $u = \mathrm{e}^x$, $v = \cos x$, $v' = -\sin x$.
Es folgt: $\int dx\ \mathrm{e}^x \cos x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x)$. Zurück zum eigentlichen Integral

$$\begin{aligned}\int dx\ x\mathrm{e}^x \sin x &\overset{(2)}{=} \mathrm{e}^x x \sin x - \int dx\ \mathrm{e}^x(\sin x + x\cos x) \\ &\overset{(3)}{=} \mathrm{e}^x x \sin x - \mathrm{e}^x(\sin x + x\cos x) + \int dx\ \mathrm{e}^x(2\cos x - x\sin x)\end{aligned}$$

(2): Partielle Integration mit $u' = \mathrm{e}^x$, $u = \mathrm{e}^x$, $v = x\sin x$, $v' = \sin x + x\cos x$.
(3): Partielle Integration mit $u' = \mathrm{e}^x$, $u = \mathrm{e}^x$, $v = \sin x + x\cos x$, $v' = 2\cos x - x\sin x$.

Durch Umstellen: $2\int dx\ x\mathrm{e}^x \sin x = \mathrm{e}^x x(\sin x - \cos x) - \mathrm{e}^x \sin x + 2\int dx\ \mathrm{e}^x \cos x$

Einsetzen von $\int dx\ \mathrm{e}^x \cos x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x)$ führt auf

$$\int dx\ x\mathrm{e}^x \sin x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\left[x(\sin x - \cos x) + \cos x\right] + c$$

(f) $\int dx\ x\mathrm{e}^{-x^2} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int dz\ \mathrm{e}^{-z} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z} + c = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + c$

(1) : Substitution $z = x^2$, $dz = 2xdx$.

(g) $\int dx \sin(3x) \overset{(1)}{=} \frac{1}{3}\int dz \sin z = -\frac{1}{3}\cos(z) + c = -\frac{1}{3}\cos(3x) + c$

(1) : Substitution $z = 3x$, $dz = 3dx$.

Aufgabe 3

(a) $\int_{-1}^{1} dx(x^3 - 4x) = 0$, da Integrand ungerade.

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx\ \sqrt{1-x^2} &= \int_0^1 dx\ 1\ \sqrt{1-x^2} \overset{(1)}{=} x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 dx\ x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 dx\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 dx\frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 dx\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 dx\sqrt{1-x^2} + \int_0^1 dx\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Durch Umstellen:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx\,\sqrt{1-x^2} &= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 dx\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{1}{2}\left(0+\arcsin x|_0^1\right) \\
&= \frac{1}{2}\arcsin(1) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Interpretation: Fläche des Viertelkreises

(c) $\displaystyle\int_2^4 dx\,\frac{1}{x} = (\ln|x|)|_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$

(d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} dx\,\frac{1}{x} = (\ln|x|)|_{-2}^{-1} = -\ln 2$

(e) $\displaystyle\int_0^{10} dx\,\mathrm{e}^{-5} = -\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x}\Big|_0^{10} = \frac{1}{5}\left(1-\mathrm{e}^{-50}\right)$

(f)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3} dx\,\,\sin x\cos(2x) &= \int_0^{\pi/3} dx\,\,\sin x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \\
&= \int_0^{\pi/3} dx\,\,\sin x(2\cos^2 x - 1) \\
&= 2\int_0^{\pi/3} dx\,\,\sin x\cos^2 x - \int_0^{\pi/3} dx\sin x \\
&= -\frac{2}{3}\cos^3 x\big|_0^{\pi/3} + \cos x|_0^{\pi/3} \qquad (1) \\
&= -\frac{2}{3}\cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{2}{3}\cos^3(0) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(0) \\
&= -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{12} \qquad (2)
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
\int_1^3 dx\frac{6+x}{x^2+7x+12} &= \int_1^3 dx\frac{6+x}{(3+x)(4+x)} = \int_1^3 dx\left(\frac{3}{3+x} - \frac{2}{2+x}\right) \\
&= 3\,\ln(3+x)|_1^3 - 2\,\ln(4+x)|_1^3 = 3\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2\ln\left(\frac{7}{5}\right) \\
&= \ln\left(\frac{675}{392}\right) \approx 0.54
\end{aligned}$$

(h) $\int_0^{1/2} dx \frac{1}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\arctan(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$

Aufgabe 4

(a) Das Gleichungssystem lässt sich schreiben als $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Gaußsches Eliminationsverfahren: Startpunkt ist

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned} \tag{3}$$

Multipliziere die erste Gleichung mit $-1/4$ und addiere zur zweiten Gleichung

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 0 + \frac{5}{2}y &= \frac{31}{4} \end{aligned} \tag{4}$$

Wir lösen nach y auf: $y = 31/10$. Die erste Gleichung transformiert sich zu $4x - 31/5 = 1$, woraus sich $x = 9/5$ ergibt.

(b) Das Gleichungssystem lässt sich schreiben als $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gaußsches Eliminationsverfahren: Startpunkt ist

$$x + 2y + 3z = 2 \tag{5}$$
$$3x + 2y + z = 0 \tag{6}$$
$$-x + y + z = 1 \tag{7}$$

Erster Schritt: Wir addieren die erste Zeile zur letzten Zeile und das (-3)fache der ersten Zeile zur zweiten Zeile

$$x + 2y + 3z = 2 \tag{8}$$
$$0 - 4y - 8z = -6 \tag{9}$$
$$0 + 3y + 4z = 3 \tag{10}$$

Zweiter Schritt: Wir addieren das $(3/4)$fache der zweiten Zeile zur dritten Zeile

$$x + 2y + 3z = 2 \tag{11}$$
$$0 - 4y - 8z = -6 \tag{12}$$
$$0 + 0 - 2z = -\frac{3}{2} \tag{13}$$

Dritter Schritt: Wir lösen auf: $z = 3/4$, $y = 0$, $x = -1/4$

Aufgabe 5 Gegeben ist die Gerade $y = 3x + 2$.

(a) Parameterdarstellung: $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} x$

(b) Sie Normale $\boldsymbol{n}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $\boldsymbol{nb} = 0$ oder $n_x + 3n_y = 0$, aufgelöst $\boldsymbol{n} = n_x \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$. Außerdem normieren wir $\boldsymbol{n}^2 = 1$, somit gilt $n_x^2 + n_y^2 = 1 = n_x^2(1 + 1/3^2) = \frac{10}{9} n_x^2$. Wir folgern $n_x = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$ und wählen (willkürlich) $n_x = \frac{3}{\sqrt{10}}$ aus. Die Normalenform der Gleichung lautet $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{n} = 0$ für einen beliebigen Punkt $\boldsymbol{r}_0$ auf der Geraden, zum Beispiel $\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Zusammengefasst:

$$\frac{3}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0 \tag{14}$$

(c) Die Gerade schneidet die x-Achse bei $x = -2/3$ und die y-Achse bei $y = 2$. Somit gilt $\tan\alpha = 2/(2/3) = 3$, $\alpha = \arctan(3) \approx 71°$.

(d) Der minimale Abstand ist $x_{min} = 2\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Aufgabe 6

(a) $X(n+1) = X(n) + (pX(n) - Y) = (1+p)X(n) - Y$. Für die Beispiele fixieren wir $p = 0.05$ und $X(0) = 1000$.

- $Y = 100$, dann gilt $X(n+1) = 1.05X(n) - 100$
- $Y = 50$, dann gilt $X(n+1) = 1.05X(n) - 50$
- $Y = 10$, dann gilt $X(n+1) = 1.05X(n) - 10$

Man kann diese Gleichungen numerisch iterieren, siehe Fig. 1.

(b) Die modifizierte Gleichung lautet

$$X(n+1) = \left(1 + \frac{p}{m}\right) X(n) - \frac{Y}{m} = X(n) + \frac{p}{m} X(n) - \frac{Y}{m} \tag{15}$$

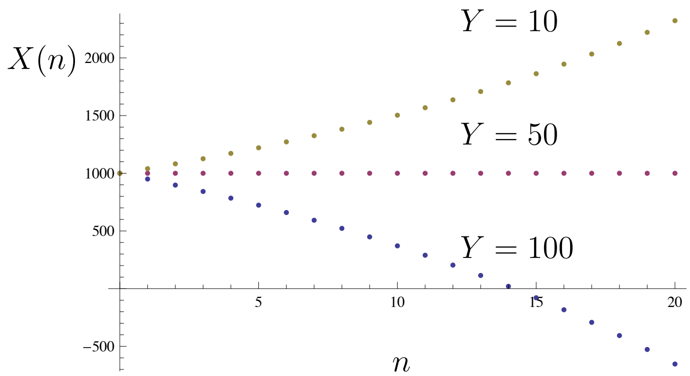

Figure 1: Iteration der Gleichung $X(n+1) = 1.05X(n) - Y$ mit $X(0) = 1000$. Für $Y = 100$ wären die Schulden nach etwa 14 Jahren abbezahlt. Für $Y = 50$ bleibt der Schuldenstand unverändert, da der Betrag Y gerade die jährlichen Zinsen abdeckt. Für $Y = 10$ wachsen die Schulden weiter an.

Wir fassen zunächst $\Delta t = 1/m$ als kleines Zeitintervall auf und $\Delta X = X(n+1) - X(n)$ als zugehörige Veränderung der Größe $X(t)$, wobei t eine kontinuierliche Zeitvariable ist. So erhalten wir die Differenzengleichung

$$\Delta X = (pX - Y)\Delta t, \quad \frac{\Delta X}{\Delta t} = (pX - Y) \tag{16}$$

Im Grenzfall $m \to \infty$ ($\Delta t \to 0$) ergibt sich die Differentialgleichung

$$X'(t) = pX(t) - Y \tag{17}$$

Die homogene Gleichung $X'(t) = pX(t)$ wird durch $X(t) = A\exp(pt)$ gelöst. Durch Variation der Konstanten $A \to A(t)$ erhält man aus der inhomogenen Gleichung $A(t) = A(0) + \frac{Y}{p}(\exp(-pt) - 1)$ und damit

$$X(t) = \frac{Y}{p} + \left(X(0) - \frac{Y}{p}\right)\exp(pt) \tag{18}$$

wobei $A(0)$ mit $X(0)$ identifiziert wurde. In Fig. 2 vergleichen wir die Lösung der Differentialgleichung mit der numerischen Lösung der ursprünglichen Gleichung.

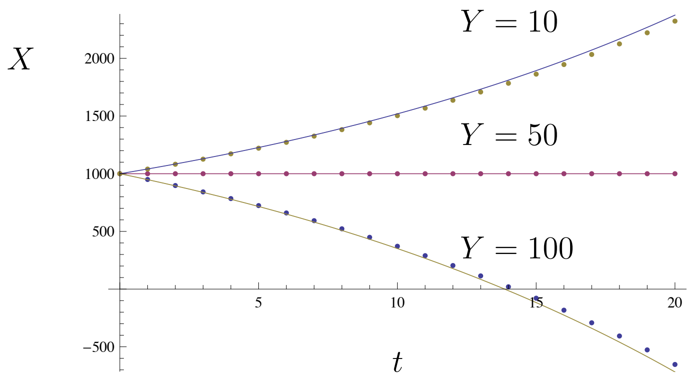

Figure 2: Iteration der Gleichung $X(n+1) = 1.05X(n) - Y$ mit $X(0) = 1000$, sowie die Lösung der Differentialgleichung $X'(t) = 0.05X(t) - Y$.