Übungsblatt 8 — Brückenkurs WS 15/16

Aufgabe 1

Bestimmen Sie das Ergebnis der folgenden Vektorausdrücke:
(a) $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$, (b) $\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x$, (c) $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x$, (d) $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y$, (e) $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z$, (f) $\mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_x)$, (g) $(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) \times (\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_x)$.

Aufgabe 2

Gegeben seien $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ und $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q})$,

(b) Wie groß ist die Fläche des von $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ aufgespannten Parallelogramms?

Aufgabe 3

(a) Zwei Vektoren der Längen 2 und 3 schließen den Winkel $\pi/6$ ein. Wie groß ist ihr Vektorprodukt?

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Für beliebige Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ gilt: $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$.

Aufgabe 4*

(a) Ein Parallelepiped sei durch drei Vektoren $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Bestimmen Sie sein Volumen.

(b) Welches Volumen spannen die Vektoren $\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_x$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{r}_3 = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$ auf?

Aufgabe 5

Die Punkte A und B in einem kartesischen Koordinatensystem haben folgenden Koordinaten: $A = (1, 2)$ und $B = (0, -2)$, $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ seien die entsprechenden Ortsvektoren. Beschreiben Sie die Gerade, die durch beide Punkte von A nach B verläuft in Vektor- sowie in Komponentendarstellung.

Aufgabe 6

(a) Eine Gerade geht durch den Punkt $(1,2)$ und hat die Steigung 2. Wie lautet die Parameterdarstellung? Wie lautet die funktionale Form der Gerade?

(b) Wie lautet der Normalenvektor $\mathbf{n}$ mit Länge 1 zu dieser Gerade? Welchen Abstand hat die Gerade vom Ursprung?

Aufgabe 7

(a) Welche Paare der drei folgenden Vektoren spannen eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ auf?

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(b) Wie lauten die Normalenvektoren $\mathbf{n}$ mit Länge 1 zu diesen Ebenen?

Aufgabe 8

Schreiben Sie folgende linearen Gleichungssysteme in der Form Matrix × Vektor = Vektor und lösen Sie die linearen Gleichungssysteme durch Gaußsches Eliminationsverfahren

(a)
$$\begin{aligned} 8x - 3y &= 11 \\ 5x + 2y &= 34 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 2 \\ x - y + z &= 0 \\ -3x - 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 9

In einem Dreieck ist ein Winkel doppelt so gross wie ein anderer, zusammen sind sie so gross wie der dritte. Bestimmen Sie die Winkel.

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Lösung folgender Systeme linearer Gleichungen durch Gaußsches Eliminationsverfahren:

(a)
$$\begin{aligned} 2x - y &= 8 \\ 6x - 5y &= 32 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 5 \\ 8x - y &= 3 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 0 \\ 6x + 3y - 8z &= 0 \\ 2x - y + 5z &= 8 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 3x + 7y + 2z &= 2 \\ 4x - 2y + z &= 1 \end{aligned}$$