Vorlesungsskript

Brückenkurs

Felix von Oppen
Abbildungen: Jens Koch

Wintersemester 2005/06

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

Vorbemerkungen

Zentrales Ziel der Physik ist mathematische Formulierung von Naturgesetzen. Zum Beispiel gilt in der Mechanik das zweite Newtonsche Gesetz

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \qquad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Betrachten wir die Bewegung einer Masse m (z.B. die Erde) im Schwerfeld einer (festen) Masse M (z.B. Sonne), so ist die Kraft $\mathbf{F}$ gegeben durch das Gravitationsgesetz

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G\,\frac{m\,M}{\mathbf{r}^{\,2}}\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

Zusammen ergibt dies die Differentialgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G\,\frac{m\,M}{\mathbf{r}^{\,2}}$$

für die Bewegung des Teilchens m, beschrieben durch den Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$, gemessen vom Ort des Teilchens M, als Funktion der Zeit t. (Punkte über den Größen beschreiben, wie in der Mechanik seit Newton üblich, Ableitungen nach der Zeit.) Um diese Gleichung zu verstehen, müssen wir offenbar sowohl etwas über Vektorrechnung als auch über Differentialrechnung[1] wissen. Zur Lösung der Differentialrechnung werden wir auch die Integralrechnung benötigen.

Ziel dieses einwöchigen Brückenkurses ist es, das mathematische Grundwissen zu wiederholen, das Sie zum allergrößten Teil schon aus der Schule kennen sollten und das in den physikalischen Grundvorlesungen als *vertraut* vorausgesetzt werden wird. Einige Teile, die über den üblichen Schulstoff hinaus gehen, sind durch Kästen vom restlichen Text abgehoben. Das absolute Basiswissen ist durch einen Strich am linken Textrand gekennzeichnet.

Bruchrechnung

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

[1] Genau genommen müssen wir sogar etwas über die Kombination von Vektor- und Differentialrechnung wissen, da hier Vektoren nach der Zeit abgeleitet werden.

Potenzrechnung

$$
\begin{aligned}
a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\
a^x \cdot b^x &= (ab)^x \\
(a^x)^y &= a^{xy} \\
\frac{1}{a^x} &= a^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}
\end{aligned}
$$

Es sei noch erwähnt, dass $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Binomische Formeln

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \\
(a+b)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j \, b^{n-j}, \qquad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \qquad \text{(beachte: } 0! = 1\text{)}
\end{aligned}
$$

$\binom{n}{j}$ heißt Binomialkoeffizient (sprich: n über j).

Beweis der letzten Formel mit vollständiger Induktion:

$\underline{n = 1:}$

$$
a + b = \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} a^j \, b^{1-j} = a + b
$$

$\underline{n \to n+1:}$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j \, b^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(a^{j+1} \, b^{n-j} + a^j \, b^{n-j+1} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j \, b^{n-j+1} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j \, b^{n-j+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right] a^j \, b^{n+1-j}
\end{aligned}
$$

Nun nutzen wir aus, dass

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} &= \frac{n!}{(j-1)!\,(n-j+1)!} + \frac{n!}{j!\,(n-j)!} = \frac{j \cdot n! + (n-j+1)\,n!}{j!\,(n-j+1)!} \\
&= \frac{(n+1)\,n!}{j!\,(n+1-j)!} = \frac{(n+1)!}{j!\,(n+1-j)!} = \binom{n+1}{j},
\end{aligned}
$$

womit wir erhalten:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^j\, b^{n+1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j\, b^{n+1-j}\end{aligned}$$

Test: Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{j}$ können leicht (für kleine n und j) aus folgender Pyramide gewonnen werden:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

Hier ist n durch die Zeile (beginnend mit $n = 0$) gegeben, j wird innerhalb der Spalten beginnend mit $j = 0$ durchgezählt. Jeder Eintrag in dieser Pyramide ist die Summe der zwei, in der vorhergehenden Zeile benachbarten Zahlen.
Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dieser Berechnung der Binomialkoeffizienten und der Formel $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ her.

Quadratische Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

(*Beweis als Übungsaufgabe!*)

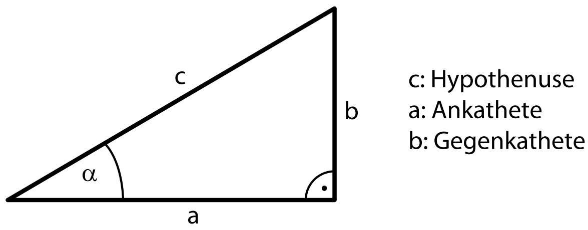
Logarithmus

$$\begin{aligned} y &= a^x \qquad \rightarrow \qquad x = \log_a y \\ \log(a \cdot b) &= \log a + \log b \\ \log(a^x) &= x\ \log a \\ \log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log a - \log b \end{aligned}$$

Test: Drücken Sie $\log_b x$ durch Logarithmen zur Basis a aus.

Trigonometrische Funktionen

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$



Satz des Pythagoras

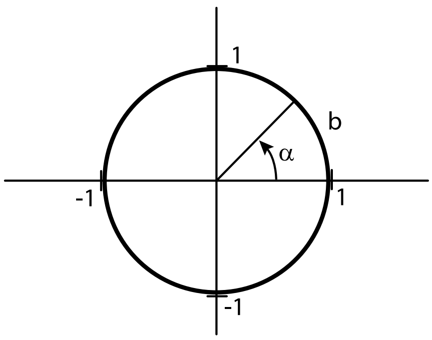
In einem rechtwinkligen Dreieck gilt der Zusammenhang

$$a^2 + b^2 = c^2$$

zwischen Katheten und Hypothenuse. Hieraus folgt für die trigonometrischen Funktionen der "trigonometrische Pythagoras"

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

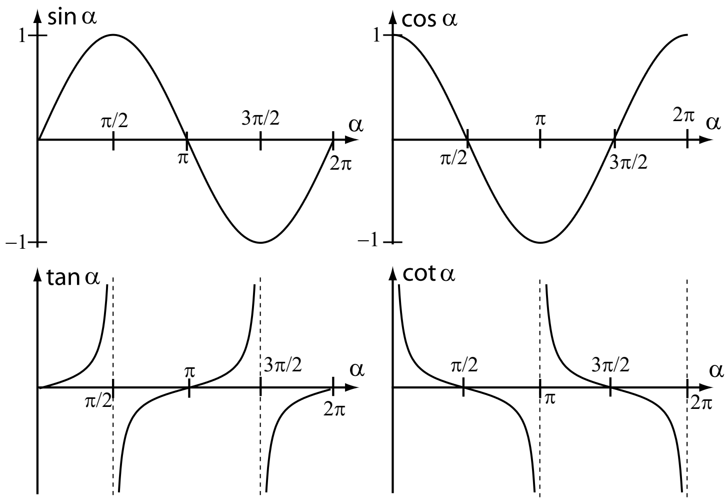
Für trigonometrische Funktionen: Messe Winkel durch Bogenmaß auf dem Einheitskreis.



$\alpha =$ Länge des Bogens b (für Einheitskreis)

$$360^\circ \leftrightarrow \alpha = 2\pi$$
$$180^\circ \leftrightarrow \alpha = \pi$$
$$90^\circ \leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$
$$45^\circ \leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Graphen der trigonometrischen Funktionen:

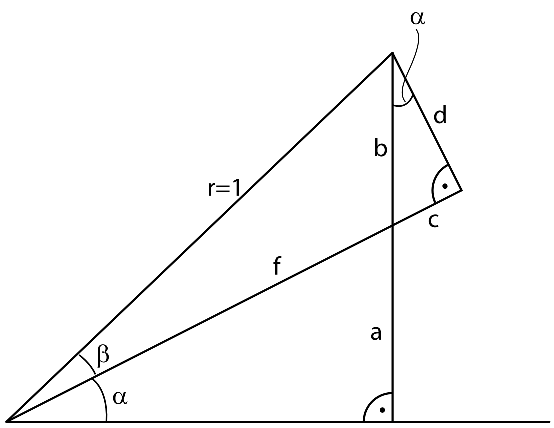


Test: Geben Sie ohne technische Hilfsmittel Zahlenwerte für $\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{3}$ an.

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta$$

Geometrischer Beweis:



$$\begin{aligned}
d &= \sin\beta = b\,\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} \\
a &= f\,\sin\alpha = (\cos\beta - c)\sin\alpha \\
&= (\cos\beta - b\,\sin\alpha)\sin\alpha \\
&= (\cos\beta - \sin\beta\,\tan\alpha)\sin\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \sin(\alpha+\beta) &= a + b = \sin\alpha\,\cos\beta + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta\,\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \\
&= \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta \\
\Rightarrow\ \cos(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha + (\beta + \frac{\pi}{2})) = \sin\alpha\,\cos(\beta+\frac{\pi}{2}) + \cos\alpha\,\sin(\beta+\frac{\pi}{2}) \\
&= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta
\end{aligned}$$

Aus den Additionstheoremen folgen die Relationen:

$$\sin 2\alpha = 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha \qquad\qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad\qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$$

$\nwarrow$ Vorzeichen je nach Quadrant des Winkels α

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\,\sin\beta &= \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \\
\cos\alpha\,\cos\beta &= \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] \\
\sin\alpha\,\cos\beta &= \frac{1}{2}\,[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \\
\sin^2\alpha &= \frac{1}{2}\,(1-\cos 2\alpha) \qquad\qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}\,(1+\cos 2\alpha)
\end{aligned}$$

(Beweis ausgewählter Relationen als Übungsaufgabe)

Exponentialfunktion

Zunächst führen wir die Zahl e mit Hilfe des Grenzwerts

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818\ldots \qquad \text{(hier für } n = 10^8\text{)}$$

ein. Die Zahl e ist in der Mathematik ähnlich wichtig wie π.

Wir können noch auf einem anderen Wege näherungsweise einen Zahlenwert für e angeben. Hierzu gehen wir folgendermaßen vor. Für $n \in \mathbf{N}$ gilt mit Hilfe der binomischen Formeln

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{n!}{1!\,(n-1)!}\frac{1}{n} + \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{n!\,0!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\tfrac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\tfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\tfrac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Terme werden wg. $\frac{1}{j!}$ mit zunehmendem j kleiner; wenn wir bei einem festen j_0 abbrechen und den Limes $n \to \infty$ nehmen, erhalten wir

$$\approx 1 + \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{j!} \qquad \text{“} \Rightarrow \text{“} \qquad e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \qquad ,$$

so dass

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots \approx 2,716$$

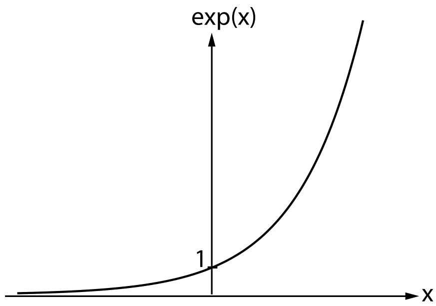
Wir sehen, dass schon wenige Terme einen recht genauen Zahlenwert für e liefern.

Ebenso: $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

Die Funktion

$$f(x) = e^x \qquad \text{oder} \qquad f(x) = \exp x$$

heißt Exponentialfunktion, mit dem Funktionsgraphen



Exponentialfunktion als Lösung des Zinseszins-Problems:

- Am Ende jeden Jahres werden p% Zinsen auf ein Anfangskapital a_0 gezahlt. $\Rightarrow$ Kapital nach m Jahren:

$$a_m = a_0 \underbrace{(1+k)\,(1+k)\cdots(1+k)}_{m-mal} = a_0\,(1+k)^m, \qquad \text{wobei } k = \frac{p}{100}$$

- Man erhält $\frac{p}{n}$% Zinsen n mal im Jahr ausgezahlt.
  $\Rightarrow$ Kapital nach m Jahren: $a_m = a_0\,(1 + \frac{k}{n})^{nm}$

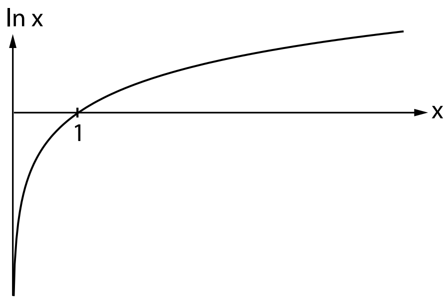
- Kapital wird kontinuierlich akkumuliert $(n \to \infty)$:

$$\begin{aligned} a_m &= \lim_{n\to\infty} a_0 \left(1+\frac{k}{n}\right)^{nm} \\ &= a_0 \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^{mk} \\ &= a_0 \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{mk} = a_0\, e^{km} \\ \Rightarrow \qquad a_m &= a_0\, e^{km} \end{aligned}$$

Natürlicher Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis e heißt natürlicher Logarithmus und wird mit ln bezeichnet.

$$\ln x = \log_e x$$



Wir werden später den folgenden Grenzwert brauchen:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{y\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{y})}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to\infty} y \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) \\ &= \lim_{y\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = \ln e = 1. \end{aligned}$$

Hieraus folgen noch zwei wichtige Relationen, die wir später als Spezialfälle der allgemeinen Taylor-Reihe identifizieren werden:

- Für kleine x gilt: $\qquad \ln(1+x) \approx x.$
- Ebenso gilt für kleine x: $\qquad e^x \approx 1+x \qquad$, da

$$\begin{aligned} a_m &= \lim_{n\to\infty} a_0 (1+\frac{k}{n})^{nm} = a_0(1+mk+\cdots) \qquad \text{für kleine}\, k \\ &= a_0\, e^{km} \qquad \text{und ersetze} \qquad km = x; \qquad x\to 0 \qquad \text{da} \qquad k\to 0. \end{aligned}$$

oder durch Exponenzieren von $\ln(1+x) \approx x$

Die Näherungsformeln für $\ln(1+x)$ sowie e^x für kleine x entsprechen graphisch der Näherung der Funktion durch die Tangente bei $x=0$.

Test: Nehmen Sie an, Sie legen Ihr Geld a_0 auf einem Konto an, dessen Zinssatz proportional zur abgelaufenen Zeit wächst, beginnend mit Null und pro Jahr um Δp anwachsend. Die Zinsen werden in n Tranchen pro Jahr ausgezahlt. Zeigen Sie, dass Ihr Geld im Grenzfall einer kontinuierlichen Akkumulation der Zinsen (d.h. $n \to \infty$) nach m Jahren auf $a_0 \exp(\Delta k \, m^2/2)$ angewachsen ist ($\Delta k = \Delta p/100$).

Übungen Brückenkurs — Blatt 1

Aufgabe 1:

Beweisen Sie die Lösung für quadratische Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

(quadratische Ergänzung)

Aufgabe 2:

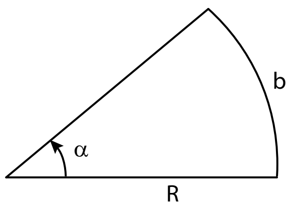
Beweisen Sie die Formel

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

für die geometrische Reihe. Unter welcher Bedingung können Sie den Grenzübergang $N \to \infty$ bilden und was ist das Resultat?

Aufgabe 3:

Drücken Sie die Bogenlänge b des Kreissegments (s. Skizze) durch den Winkel α und den Radius R aus.



Aufgabe 4:

Beweisen Sie, ausgehend von der in der Vorlesung bewiesenen Relation $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta$ die folgenden trigonometrischen Identitäten

(a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

(b) $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}$
$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)}$

(c) $\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
$\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$
$\sin\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

(d) Drücken Sie $\sin 3\alpha$ durch $\sin\alpha$ aus.

(e) Drücken Sie $\tan(\alpha + \beta)$ durch $\tan\alpha$ und $\tan\beta$ aus.

(f) Vereinfachen Sie

$$\frac{\cos\alpha(1-\tan^2\alpha)}{\tan\alpha(\cot\alpha-1)}.$$

Aufgabe 5:

Die sogenannten Hyperbelfunktionen wurden definiert durch

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

(sinus hyperbolicus etc.)

(a) Drücken Sie $\sinh(x+y)$ aus durch $\sinh x$, $\cosh x$, $\sinh y$ and $\cosh y$.

(b) Analog für $\cosh(x+y)$.

Vergleichen Sie Ihre Resultate mit den entsprechenden Formeln für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$.

Aufgabe 6:

Ein Brückenbogen hat die Form einer Parabel mit Lagern bei $x = \pm 5$m und Scheitelhöhe 4m. Wie lautet die Gleichung der Parabel?

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie durch Polynomdivision das Verhalten von

(a)

$$f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2+1}$$

(b)

$$f(x) = \frac{x^3-3x^2+4x+1}{x^2+2}$$

für große Werte von x. Vernachlässigen Sie Terme des Typs $1/x^n$ mit $n > 2$.

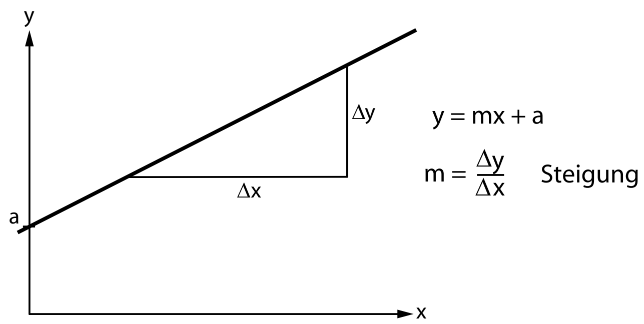
Kapitel 2

Differentialrechnung

Geometrisch liegt der Differentialrechnung die Frage zugrunde, wie groß die Steigung einer Funktion in einem Punkt ist. Dieses Problem wird durch die Definition der Ableitung von Funktionen gelöst. Die Ableitung erlaubt einem, im Rahmen der Kurvendiskussion einen guten Überblick über das Verhalten von Funktionen zu erhalten. Die Berechnung von Ableitungen elementarer Funktionen erfolgt schematisch im Rahmen einer Reihe von Regeln.

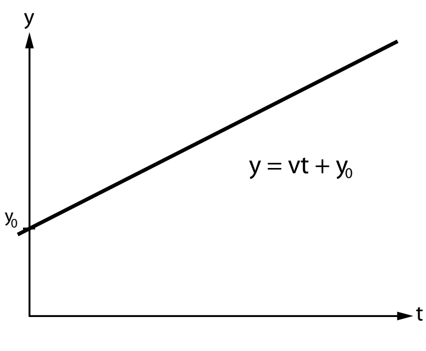
Steigung von Geraden

Die Steigung m von Geraden ist folgendermaßen definiert



In der funktionalen Form der Geraden $y = mx + b$ ist die Steigung gerade der Vorfaktor des linearen Terms.

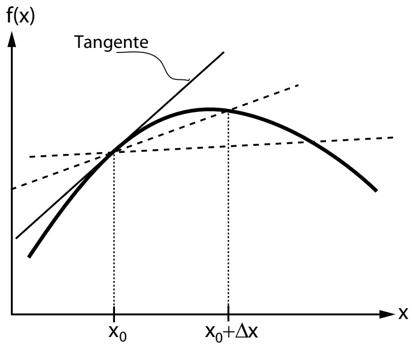
Anwendung: Geschwindigkeit bei geradliniger, gleichförmiger Bewegung



Steigung von Graphen Ort vs. Zeit ist Geschwindigkeit.

Steigung beliebiger Kurven

Die Steigung beliebiger Funktionen in einem Punkt kann folgendermaßen auf die Steigung von Geraden zurückgeführt werden:



Steigung der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0
$= $ Steigung der Tangente
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$=$ Ableitung der Funktion $f(x)$
im Punkt x_0, kurz $f'(x_0)$

Definition der Ableitungen einer Funktion

Die Steigung der Tangente definiert die erste Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$,

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}.$$

Höhere Ableitungen werden als Ableitung der Ableitung etc. definiert.

Test: Nehmen Sie an, dass Sie eine Funktion $f(x)$ nur an einem diskreten Satz von eng beieinander liegenden Punkten x_n auf der x-Achse kennen. Sie können dann die Ableitung gemäß ihrer Definition näherungsweise über

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

berechnen. Geben Sie einen entsprechenden Näherungsausdruck für die zweite Ableitung an. (Sie dürfen annehmen, dass die Punkte x_n gleiche Abstände haben, d.h. $x_{n+1} - x_n = \Delta x$ unabhängig von n.)

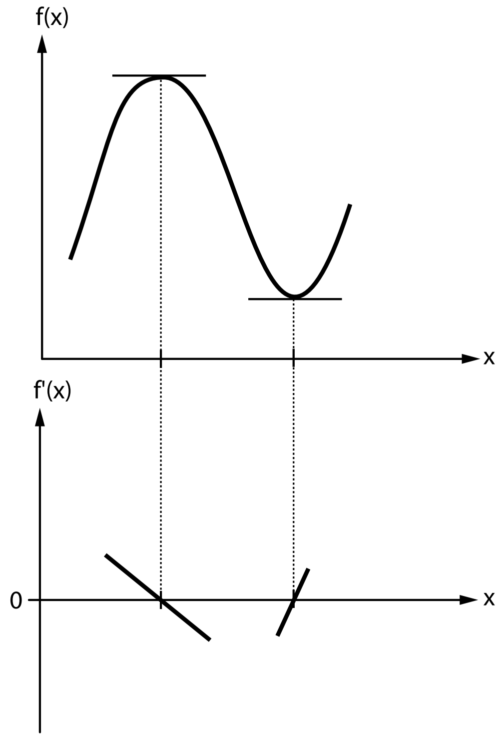
Kurvendiskussion

Um einen Überblick über das Verhalten von Funktionen zu gewinnen, versucht man sich im Rahmen einer Kurvendiskussion die folgenden speziellen Punkte einer Funktion zu bestimmen:

- Nullstellen der Funktion — $f(x) = 0$.
- Singularitäten (Divergenzen) der Funktion — $f(x)$" = " $\pm\infty$
- Verhalten der Funktion im Unendlichen — $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

- <u>Maxima, Minima</u>

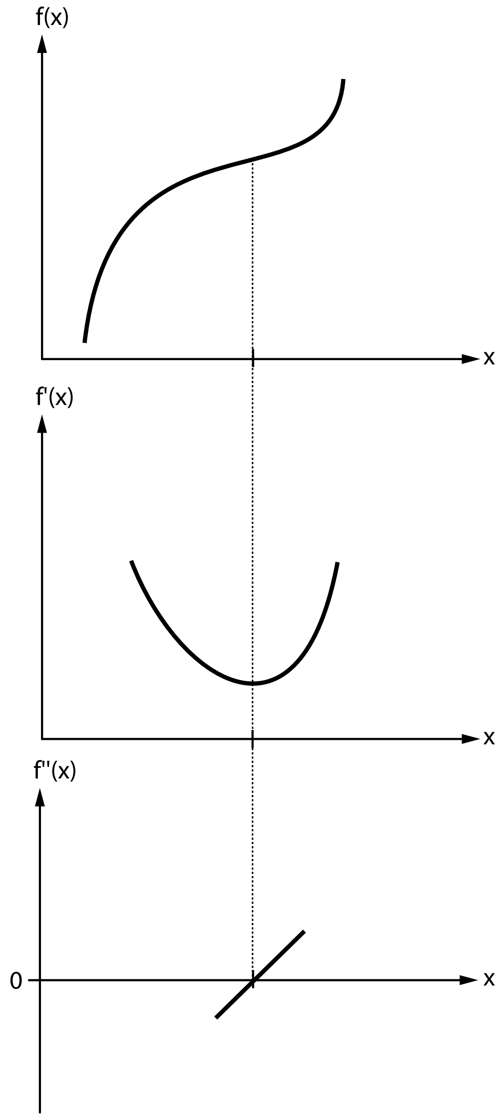
$f'(x) = 0 \qquad$ für Maxima/Minima



$$f''(x)\begin{cases} < 0 & \text{Maximum} \\ > 0 & \text{Minimum} \end{cases}$$

- Wendepunkt

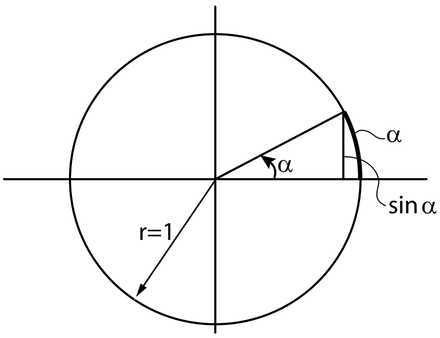
$f''(x) = 0$



Ableitung einfacher Funktionen

Wir berechnen nun die Ableitungen einiger elementarer Funktionen direkt aus der Definition der Ableitung:

- $f(x) = mx + a \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{[m(x+\Delta x)+a] - [mx+a]}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m = m$.
- $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$
  $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.
- $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (\Delta x)^j x^{n-j} \dfrac{1}{\Delta x}$
  $= \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}$.
- $f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$
  $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$
  $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left\{ \cos x \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} + \sin x \dfrac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} \right\}$



$\Rightarrow \quad \sin\alpha \approx \alpha \quad$ für kleine Winkel α .

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} \approx \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

$$\cos \Delta x - 1 = -2\sin^2 \frac{\Delta x}{2} \approx -\frac{(\Delta x)^2}{2} \qquad \text{für } \Delta x \text{ klein}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 0$$

$$(\text{mit } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha)$$

so dass

$$f'(x) = \cos x \ .$$

- $f(x) = \cos x$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \cos x \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} - \sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right\} = -\sin x$$

- $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \ .$
- $f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (a^x)' = (e^{x \ln a})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{(x+\Delta x)\ln a} - e^{x \ln a}}{\Delta x}$

$$= e^{x \ln a} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x} = e^{x \ln a} \ln a \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x \ln a}}_{=1} = a^x \ln a \ .$$

- $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x} \ .$

Test: Ableitung von $f(x) = \log_a x$? [Lösung: $f'(x) = 1/x \ln a$]

Ableitungsregeln

Bei der Ableitung zusammengesetzter Funktionen hilft eine Reihe von Ableitungsregeln:

Summenregel:

Ableitung einer Summe ist Summe der Ableitungen

$$h(x) = f(x) + g(x) \qquad \Rightarrow \qquad h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right\} \\ &= f'(x) + g'(x) \ . \end{aligned}$$

Produktregel:

$$h(x) = f(x)\, g(x) \qquad \Rightarrow \qquad h'(x) = f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)\, g(x + \Delta x) - f(x)\, g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)\, g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)\, g(x) + f(x + \Delta x)\, g(x) - f(x)\, g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) \right\} \\ &= f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x) \ . \end{aligned}$$

Beispiele:

$$h(x) = x\sin x \qquad \Rightarrow \qquad h'(x) = \sin x + x\cos x$$
$$f(x) = \sin^2 x \qquad \Rightarrow \qquad h'(x) = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2\sin x\cos x\,.$$

Kettenregel:

$$h(x) = f(g(x)) \qquad \Rightarrow \qquad h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Beispiel: $h(x) = \cos(\sin x)$ oder $h(x) = \sin(x^2)$

Beweis:
$$h'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)}\, \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta g\to 0} \frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

wobei $g = g(x) \qquad g + \Delta g = g(x+\Delta x)$

und wg. Stetigkeit von g gilt $g(x+\Delta x) \to g(x)$ und somit $\Delta g \to 0$ für $\Delta x \to 0$

Beispiele:

$$h(x) = \cos(\sin x) \qquad \Rightarrow \qquad h'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$$
$$h(x) = \sin(x^2) \qquad \Rightarrow \qquad h'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$
$$f(x) = \sin^2 x \qquad \Rightarrow \qquad h'(x) = 2\sin x\cos x \qquad \text{(vgl. oben)}$$

Quotientenregel:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Beweis:
$$h'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \left\{ \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right\} \frac{1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\, \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\, \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \left\{ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right\}$$
$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,.$$

Beispiele:

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Weitere elementare Ableitungen:

- $$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(e^{\frac{1}{2}\ln x}\right)' = e^{\frac{1}{2}\ln x}\,\frac{1}{2x} = \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
- $$f(x) = x^\alpha \Rightarrow f'(x) = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}\,\frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha\, x^\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}\ .$$

Umkehrfunktionen

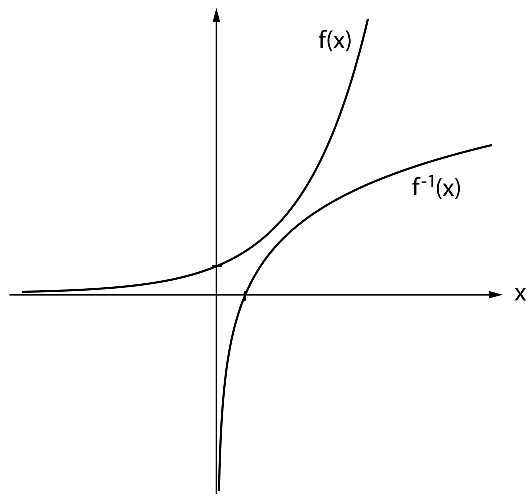
Um die Ableitungen einiger weiterer elementarer Funktionen zu finden, ist das Konzept der Umkehrfunktion nützlich:

$$f^{-1}(x) \text{ heißt Umkehrfunktion zu } f(x), \text{ wenn } f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x\ .$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x & &\Rightarrow & f^{-1}(x) &= \ln x \\
f(x) &= \ln x & &\Rightarrow & f^{-1}(x) &= e^x \\
f(x) &= x^2 & &\Rightarrow & f^{-1}(x) &= \sqrt{x} \\
f(x) &= \sin x & &\Rightarrow & f^{-1}(x) &= \arcsin x \\
f(x) &= x^\alpha & &\Rightarrow & f^{-1}(x) &= x^{1/\alpha}
\end{aligned}$$

Umkehrfunktionen kann man geometrisch als Spiegelung an der Diagonale interpretieren:



$$y = f(x) \;\Rightarrow\; x = f^{-1}(y)$$

$\rightarrow$ erhalte Graph der Umkehrfunktion durch Vertauschen von x und y Achse d.h. Spiegelung an Diagonale.

Ableitung von Umkehrfunktionen

Eine Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion kann mit Hilfe der Kettenregel gewonnen werden:

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \Rightarrow \qquad f'(f^{-1}(x))\,(f^{-1}(x))' = 1$$

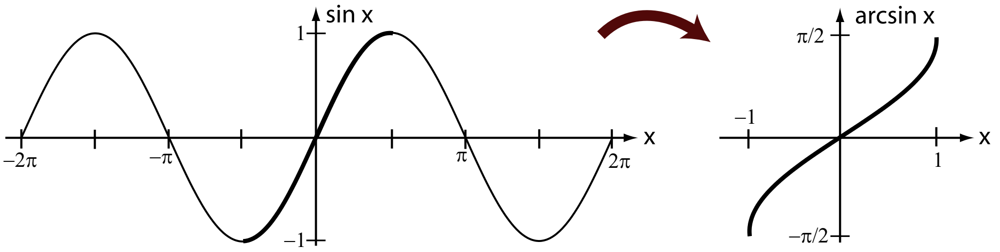
$$\Rightarrow \qquad (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

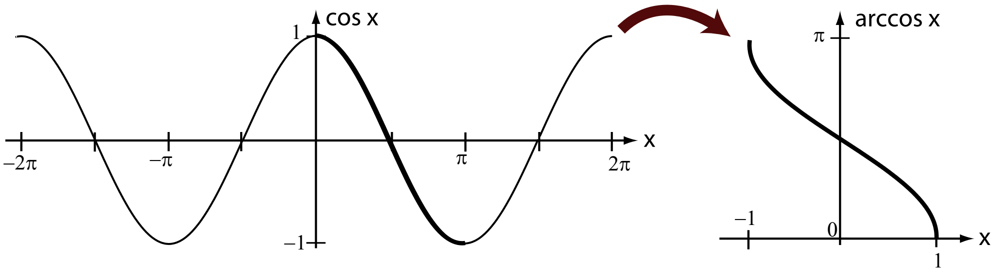
Anwendungen:

- $f(x)=x^2\ ;\ f^{-1}(x)=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ (\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f(x)=e^x\ ;\ f^{-1}(x)=\ln x\ \Rightarrow\ (\ln x)'=\dfrac{1}{e^{\ln x}}=\dfrac{1}{x}$
- $f(x)=\sin x\ ;\ f^{-1}(x)=\arcsin x\ \Rightarrow\ (\arcsin x)'=\dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$





$\rightarrow$ Ableitung von $\arcsin x$ ist positiv.
$\rightarrow$ Ableitung von $\arccos x$ ist negativ.

- $f(x)=\cos x\ ;\ f^{-1}(x)=\arccos x$

$$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sin(\arccos x)}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $f(x)=\tan x\ ;\ f^{-1}(x)=\arctan x\ \Rightarrow\ (\arctan x)'=\cos^2(\arctan x)$

$$=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\right) \qquad \text{NR: } \tan x=\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}\ \Rightarrow\ \cos^2 x\,\tan^2 x=1-\cos^2 x$$

$$\Rightarrow\ \cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$$

- $f(x)=\cot x\ ;\ f^{-1}(x)=\operatorname{arccot} x\ \Rightarrow\ (\operatorname{arccot} x)'=-\sin^2(\operatorname{arccot} x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$

$$\left(f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \qquad \text{NR: } \cot^2 x=\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\ \Rightarrow\ \sin^2 x\,(1+\cot^2 x)=1$$

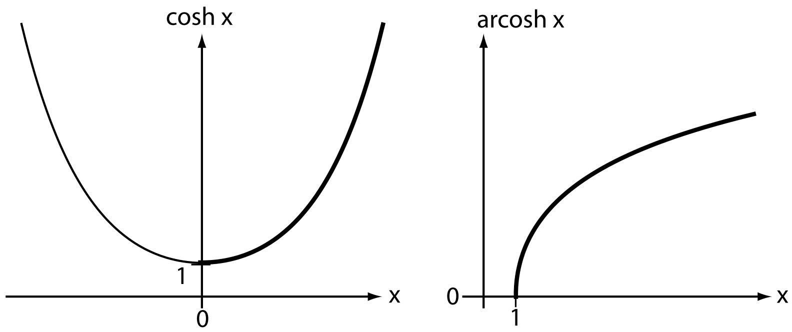
$$\Rightarrow\ \sin^2 x=\frac{1}{1+\cot^2 x}$$

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen arsinh, arcosh, artanh sowie arcoth und werden im Rahmen der Übungen über die Ableitungsregel für Umkehrfunktionen differenziert.

Allerdings können diese Funktionen auch durch ln ausgedrückt werden:

- $$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x \;\Rightarrow\; x = \operatorname{arcosh} y$$

oder mit $z = e^x$: $$y = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \;\Rightarrow\; zy = \frac{1}{2}(z^2+1)$$
$$\Rightarrow\; z^2 - 2yz + 1 = 0 \;\Rightarrow\; z = y \pm \sqrt{y^2-1}$$
$$\Rightarrow\; x = \ln z = \ln\left[y \pm \sqrt{y^2-1}\right]$$



Spezielle Wahl des Astes:

$$\operatorname{arcosh} x = \ln\left[x + \sqrt{x^2-1}\right],$$

so dass das Argument von ln größer gleich 1.

- $$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x \;\Rightarrow\; x = \operatorname{arsinh} y$$

oder mit $z = e^x$: $$y = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z}) \;\Rightarrow\; 2zy = z^2 - 1 \;\Rightarrow\; z^2 - 2zy - 1 = 0$$
$$\Rightarrow\; z = y \pm \sqrt{y^2+1}$$
$$z > 0 \;\Rightarrow\; \text{wähle „+ “}$$
$$\Rightarrow\; x = \ln\left[y + \sqrt{y^2+1}\right]$$
oder : $$\operatorname{arsinh} x = \ln\left[x + \sqrt{x^2+1}\right]$$

$\rightarrow$ Alternativer Weg zur Berechnung der Ableitung:

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left[1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right] = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right] = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Zusammenfassung der behandelten Ableitungen:

In diesem Kapitel wurden die Ableitungen der elementaren Funktionen ausgehend von der Definition der Ableitung hergeleitet. Hier wollen wir die Ergebnisse noch einmal zusammengestellen, um hierauf in Zukunft (und den Übungen) zurückgreifen zu können.

$$\begin{aligned} [x^\alpha]' &= \alpha\, x^{\alpha-1} \\ [\sin x]' &= \cos x \\ [\cos x]' &= -\sin x \\ [\arcsin x]' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ [\arccos x]' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ [\arctan x]' &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} [e^x]' &= e^x \\ [a^x]' &= a^x \ln a \\ [\ln x]' &= \frac{1}{x} \\ [\sinh x]' &= \cosh x \\ [\cosh x]' &= \sinh x \\ [\operatorname{arsinh} x]' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ [\operatorname{arcosh} x]' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

Übungen Brückenkurs — Blatt 2

Aufgabe 1: Differenzieren Sie

(a) $f(x) = \left(1 - 3x^2\right)^4$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 2}$

(c) $f(x) = \dfrac{1 - x}{\sqrt{x}}$

(d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$

Aufgabe 2: Skizzieren Sie $f(x)$ und $f'(x)$ für die folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = 1 - 2x$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

Aufgabe 3: Skizzieren Sie die Funktionen und bestimmen Sie eventuelle Hoch- und Tiefpunkte

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 1}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

Aufgabe 4: Skizzieren Sie die Funktionen und bestimmen Sie eventuelle Wendepunkte.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

Aufgabe 5: Bilden Sie die Ableitungen von

(a) $\sin(x^2)$

(b) $\sin^2 x$

(c) $\sin[a\,\cos(bx)]$

Aufgabe 6: Skizzieren Sie $f(x)$ und $f'(x)$ für die folgenden Funktionen:

(a) $x^2 e^{-x}$

(b) $e^{-a\,x^2} \qquad (a > 0)$

(c) $\dfrac{1}{e^x + 1}$

Aufgabe 7: Bestimmen Sie Verlauf und eventuelle Extrema von

(a) $x \ln x$

(b) $\ln \dfrac{x}{(x+1)^2}$

Aufgabe 8:

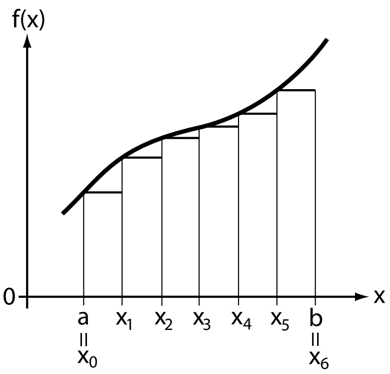
Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen arsinh$x$, arcosh$x$, artanh$x$ und arcoth$x$. Berechnen Sie die Ableitungen von arsinh$x$ und arcosh$x$ mit Hilfe der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen.

Kapitel 3

Integralrechnung

Der Integralrechnung geht von der geometrischen Fragestellung aus, die Fläche unter Kurven zu berechnen, z.B. zur Berechnung der Flächeninhalte geometrischer Objekte wie Kreise und Ellipsen. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung identifiziert diese Fragestellung als Umkehroperation der Differentiation, was einem sofort erlaubt, alle Ergebnisse der Differentialrechnng in die Integralrechnung zu übertragen. Während aber das Berechnen von Ableitungen beliebiger elementarer Funktionen rein schematisch erfolgen kann, ist die Integration im allgemeinen eher eine Kunst, die mathematische Fingerfertigkeit benötigt. Gewisse Klassen von Integralen sind allerdings mit Standardmethoden lösbar, die wir in diesem Kapitel kennenlernen werden.

Riemannsches Integral



$$\begin{aligned}&\int_a^b dx\, f(x)\\ &= \text{Fläche eingeschlossen von Kurve } f,\\ &\qquad \text{x-Achse und Senkrechten bei } x=a \text{ und } x=b\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)\\ &= \text{bestimmtes Integral}\end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\int_a^b dx\, f(x) + \int_b^c dx\, f(x) = \int_a^c dx\, f(x)$$

$$\int_a^b dx\, f(x) = -\int_b^a dx\, f(x)$$

Die Berechnung von Integralen ist im wesentlichen die Umkehrung der Differentiation. Dies ist die Aussage des folgenden Theorems.

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Definiere Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ durch

$$F(x) = \int_a^x dx'\, f(x') + C\,, \qquad C \text{ ist Konstante.}$$

Dann gilt $F'(x) = f(x)$.

Wegen der zentralen Bedeutung dieser Aussage, wollen wir den einfachen Beweis führen.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{dF(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left\{ \int_a^{x+\Delta x} dx'\, f(x') + C - \int_a^x dx'\, f(x') - C \right\} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \underbrace{\int_x^{x+\Delta x} dx'\, f(x')}_{\simeq \Delta x\, f(x)} = f(x)
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

$$\int_a^b dx\, f(x) \text{ heißt bestimmtes Integral}$$

$$F(x) = \int dx\, f(x) \text{ heißt unbestimmtes Integral}$$

$$\text{Es gilt: } \int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)$$

Einfache Integrale

Im Lichte des Hauptsatzes erhält man durch Ausnutzen der Ableitungstabelle unmittelbar die Integrale:

$\int dx\, x^\alpha = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1$	$\int dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\, x + C$
$\int dx\, \sin x = -\cos x + C$	$\int dx \frac{1}{1+x^2} = \arctan\, x + C$
$\int dx\, \cos x = \sin x + C$	$\int dx \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C$
$\int dx\, e^x = e^x + C$	$\int dx \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C$
$\int dx \frac{1}{x} = \ln x + C$	$\int dx\, \cosh x = \sinh x + C$
	$\int dx\, \sinh x = \cosh x + C$

Zur Berechnung komplizierterer Integrale stehen eine Reihe von Integrationsregeln zur Verfügung, die unmittelbare Konsequenzen der Ableitungsregeln sind.

Integrationsregeln

Partielle Integration

(folgt aus Produktregel der Differentiation)

$$\int dx\, g'(x)\, f(x) = f(x)\, g(x) - \int dx\, g(x)\, f'(x)$$

Beweis:

$$\int dx\, g'(x)\, f(x) = \int dx\, \left\{[f(x)\, g(x)]' - f'(x)\, g(x)\right\} = f(x)\, g(x) - \int dx\, f'(x)\, g(x)\ .$$

Typische Integrale für die partielle Integration:

- Integrale von Produkten von Potenzen von x und Exponentialfunktionen, z.B.

$$\int dx\, x\, e^x = \int dx\, x(e^x)' = x\, e^x - \int dx\, e^x = x\, e^x - e^x + C$$

- Integrale von Produkten von Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen, z.B.

$$\begin{aligned}\int dx\, e^x \sin x &= \int dx (e^x)' \sin x = e^x \sin x - \int dx\, e^x \cos x\\ &= e^x \sin x - \int dx (e^x)' \cos x = e^x(\sin x - \cos x) - \int dx\, e^x \sin x\\ \Rightarrow \qquad \int dx\, e^x \sin x &= \frac{1}{2}\, e^x(\sin x - \cos x) + C\end{aligned}$$

- Integral von $\sin^2 x$:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\, dx &= -\int dx\, \sin x (\cos x)' = -\sin x\, \cos x + \int dx\, \cos^2 x\\ &= -\sin x\, \cos x + \int dx\, (1 - \sin^2 x)\\ &= -\sin x\, \cos x + x - \int dx\, \sin^2 x\\ \Rightarrow \qquad \int dx\, \sin^2 x &= \frac{1}{2}\, [x - \sin x \cos x] + C\end{aligned}$$

Alternative Methode:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\,(1 - \cos 2x) \qquad \text{(s. Grundlegendes)}$$

$$\begin{aligned}\int dx\, \sin^2 x &= \int dx\, \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{2} \int dx \cos 2x\\ &= \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{2}\, \frac{1}{2} \underbrace{\sin 2x}_{=2 \sin x \cos x} + C = \frac{1}{2}\, (x - \sin x \cos x) + C\end{aligned}$$

- Ebenso funktioniert

$$\begin{aligned}\int dx \cos^2 x &= \int dx (1-\sin^2 x) = x - \int dx \sin^2 x \\ &= x - \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C \\ &= \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C\end{aligned}$$

- Integral von Produkten von Potenzen von x und $\ln x$, z.B.

$$\int dx \ln x = \int dx (x)' \ln x = x \ln x - \int dx\, x \frac{1}{x} = x \ln x - x + C$$
$$\int dx\, x \ln x = \int dx\, \frac{1}{2}(x^2)' \ln x = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int dx\, x^2 \frac{1}{x} = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C\ .$$

Integration durch Substitution

(folgt aus Kettenregel)

$$\int_a^b dx\, g'(x)\, f(g(x)) = \int_{g(a)}^{g(b)} dy\, f(y)$$
$$\begin{aligned}\int dx\, g'(x)\, f(g(x)) &= F(g(x)) \qquad \text{wobei } F \text{ Stammfunktion zu } f \\ &= \int^{g(x)} dg\, f(g)\end{aligned}$$

Anwendung häufig:

$$\int^y dy'\, f(y') = \int^{g^{-1}(y)} dx\, g'(x)\, f(g(x)),$$

wobei $y = g(x)$.

Typische Integrale für Substitution:

- $$\int dy \sin(ay) = \int dx\, \frac{1}{a} \sin x = -\frac{1}{a} \cos x + C = -\frac{1}{a} \cos(ay) + C$$
$$y = \frac{1}{a} x \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{1}{a}$$

- $$\int dx \tan x = \int dx \frac{\sin x}{\cos x} = -\int^{\cos x} dg\, \frac{1}{g} = -\ln(\cos x)$$
$$g(x) = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad g'(x) = -\sin x$$

- $$\int dx \frac{\ln x}{x} = \int^{\ln x} dg\, g = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$
$$g(x) = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$$

- $$\int dx \frac{1}{\cosh x} = 2\int dx \frac{1}{e^x + e^{-x}} = 2\int \frac{dy}{y}\,\frac{1}{y+\frac{1}{y}} = 2\int dy \frac{1}{1+y^2} = 2\arctan y = 2\arctan e^x \ .$$
$$x = \ln y \qquad \Rightarrow \qquad x' = \frac{1}{y}$$
$$e^x = y$$

Beweis der Integration durch Substitution:

$$\int_a^b dx\, g'(x)\, f(g(x)) = \int_a^b dx\, g'(x)\, F'(g(x)) = \int_a^b dx (F(g(x)))' = F(g(b)) - F(g(a))$$
$$= \int_{g(a)}^{g(b)} dy\, f(y) \ .$$

Partialbruchzerlegung

- $$\int dx\, \frac{1}{x^2 - a^2} = \int dx\, \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\int dx \left\{\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right\} = \frac{1}{2a}\left[\ln(x-a) - \ln(x+a)\right]$$
$$= \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} \ .$$

NR: $$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{A(x+a)+B(x-a)}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2} \ \Rightarrow \ \begin{array}{c}(A+B)\,x = 0\\(A-B)\,a = 1\end{array} \ \Rightarrow \ A = -B = \frac{1}{2a}$$

- $$\int dx\, \frac{x+3}{x^2-4x-5} = \int dx\, \frac{x+3}{(x-5)(x+1)} = \frac{1}{3}\int dx \left\{\frac{4}{x-5} - \frac{1}{x+1}\right\} = \frac{4}{3}\ln(x-5) - \frac{1}{3}\ln(x+1)$$

NR: $x^2 - 4x - 5 = 0 \ \Rightarrow \ x = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$

$$\frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-5)}{x^2-4x-5} = \frac{x+3}{x^2-4x-5}$$
$$\Rightarrow \ \begin{array}{c}A+B = 1\\A-5B = 3\end{array} \ \Rightarrow \ \begin{array}{c}B = 1-A\\6A = 8\end{array} \ \Rightarrow \ A = \frac{4}{3}\,;\ B = -\frac{1}{3}$$

-

$$\int dx\, \frac{1}{e^x+1} = \int \frac{dy}{y}\, \frac{1}{y+1}$$

$$= \int dy \left\{ \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right\} = \ln \frac{y}{y+1} = \ln \frac{e^x}{e^x+1} = \ln \frac{1}{1+e^{-x}}$$

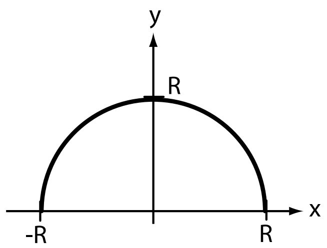
NR: $\quad A(y+1) + By = 1 \;\Rightarrow\; A + B = 0\,;\; A = 1 \;\Rightarrow\; A = -B = 1\,.$

Flächen und Volumina

Eine wichtige Anwendung der Integralrechnung ist die Berechnung des Flächeninhalts und des Volumens geometrischer Gebilde.

Kreisfläche

$x^2 + y^2 = R^2 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$



$$F = 2 \int_{-R}^{R} dx \sqrt{R^2 - x^2} = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, R\, \cos\varphi \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2\varphi}$$

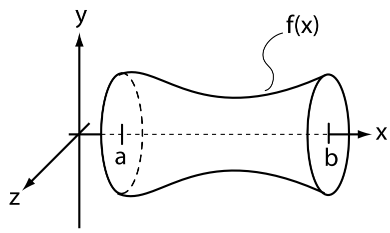
$$= 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos\varphi \sqrt{1 - \sin^2\varphi}$$

$$x = R\sin\varphi \qquad \Rightarrow \qquad x' = R\cos\varphi$$

$$= 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^2\varphi = 2R^2 \left[\frac{1}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi R^2$$

Volumina von Rotationskörpern
Kurve $f(x)$ wird um x-Achse rotiert.



Volumen eines infinitesimalen Zylinders der Höhe Δx bei x ist gleich $\pi\,[f(x)]^2 \cdot \Delta x$

$$\Rightarrow\; V = \int_a^b dx\, \pi\, [f(x)]^2$$

Beispiel: Kugel

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad b = -a = R$$

$$V = \int_{-R}^{R} dx\, \pi(R^2 - x^2) = \pi R^2 \cdot 2R - \pi \frac{2R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 \ .$$

Übungen Brückenkurs — Blatt 3

Aufgabe 1: Wie lauten die Stammfunktionen zu

(a) $ax + b$

(b) $\dfrac{1}{ax+b}$

(c) $\dfrac{1}{x^5}$

(d) $\sin 3x$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die unbestimmten Integrale (mittels Substitution) von

(a) $\dfrac{x^2}{x^3+1}$

(b) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$

(c) $e^{\cos x} \sin x$

(d) $\dfrac{1}{\sinh x}$ (plus Partialbruchzerlegung)

(e) $\tanh x$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die unbestimmten Integral (mittels partieller Integration)

(a) $x^2 e^x$

(b) $e^x \cos x$

(c) $\dfrac{\ln x}{x}$

(d) $e^x \sin^2 x$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale (mittels Partialbruchzerlegung)

(a) $\dfrac{x^2}{x^2-a^2}$

(b) $\dfrac{x+7}{x^2-3x+2}$

(c) $\dfrac{1}{e^x-1}$

Aufgabe 5: Flächen und Volumina

(a) Berechnen Sie die Fläche der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Ellipse um die x-Achse erzeugt wird.

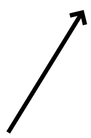
(c) Berechnen Sie das Volumen eines Kreiskegels, der Höhe h und Radius r (in der Grundfläche) hat.

Kapitel 4

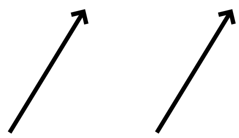
Vektoren und Matrizen

Vektoren

Viele physikalische Größen sind nicht nur durch eine Zahl, sondern auch durch eine Richtung gekennzeichnet, z.B. Geschwindigkeit, zurückgelegte Strecke (Verschiebung), Beschleunigung, Kraft, etc.
$\rightarrow$ Diese Größen sind Vektoren, deren einfachste Realisierung gerichtete Strecken sind.



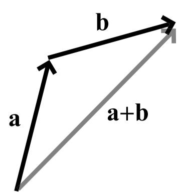
Vektoren sind frei verschiebbar; z.B. sind die folgenden Vektoren gleich:



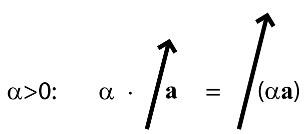
Wir werden Vektoren durch **fettgedruckte** Buchstaben bezeichnen. Die Länge eines Vektors $\mathbf{a}$ wird häufig durch $|\mathbf{a}|$ oder einfach a bezeichnet.

Rechnen mit Vektoren

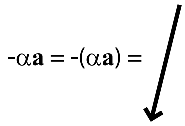
Addition



Multiplikation mit einer Zahl

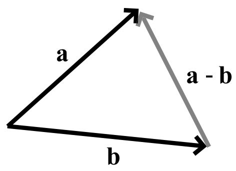


mit Länge $\alpha\,|\mathbf{a}|$ und gleicher Richtung wie $\mathbf{a}$.



d.h. mit Länge $\alpha\,|\mathbf{a}|$ und in entgegengesetzte Richtung zu $\mathbf{a}$ zeigend.

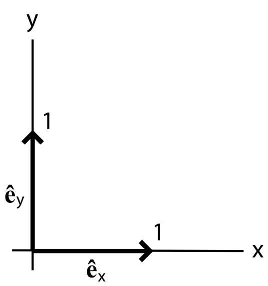
Subtraktion zweier Vektoren



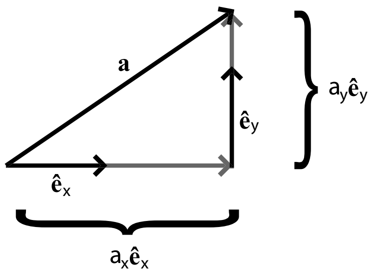
da $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

Komponentendarstellung

Definiere Einheitsvektoren (d.h. Vektoren der Länge 1) $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$ in Richtung der Koordinatenachsen.



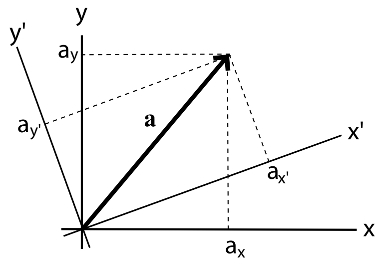
Jeder Vektor (in 2 Dimensionen) kann durch $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ ausgedrückt werden:



$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{e}}_x + a_y\hat{\mathbf{e}}_y$

Häufig benutzt man dazu die Komponentenschreibweise $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$.

ACHTUNG: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ impliziert ein bestimmtes Koordinatensystem, während der Vektor *unabhängig* vom Koordinatensystem existiert. Derselbe Vektor kann in unterschiedlichen Koordinatensystemen verschiedene Formen annehmen.



$$\text{Ungestrichenes Koordinatensystem :} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix},$$

$$\text{gestrichenes Koordinatensystem :} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix},$$

trotzdem der *gleiche* Vektor.

Addition und Subtraktion von Komponenten

$$\begin{aligned} & \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \hat{\mathbf{e}}_y) \pm (b_x \hat{\mathbf{e}}_x + b_y \hat{\mathbf{e}}_y) = (a_x \pm b_x)\hat{\mathbf{e}}_x + (a_y \pm b_y)\hat{\mathbf{e}}_y \\ \Rightarrow \quad & \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\, b\, \cos\varphi, \qquad \varphi = \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

So erhält man beispielsweise:

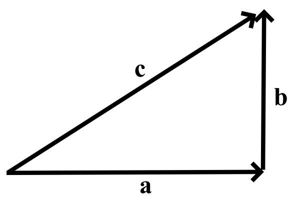
$$\begin{aligned} \varphi = 0 : & \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\, b \\ \varphi = \frac{\pi}{2} : & \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \qquad \text{d.h.} \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \\ \varphi = \pi : & \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -a\, b \end{aligned}$$

Länge von Vektoren:

$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 \qquad \Rightarrow \qquad (\text{Länge von } \mathbf{a}) = \sqrt{\mathbf{a}^2}.$

Satz des Pythagoras:

$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$



$$\begin{aligned} & (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 \\ & \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Skalarprodukt in Komponenten:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_x\hat{\mathbf{e}}_x + a_y\hat{\mathbf{e}}_y)\cdot(b_x\hat{\mathbf{e}}_x + b_y\hat{\mathbf{e}}_y) = a_x b_x \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_x\cdot\hat{\mathbf{e}}_x}_{=1} + a_x b_y \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_x\cdot\hat{\mathbf{e}}_y}_{=0} + a_y b_x \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_y\cdot\hat{\mathbf{e}}_x}_{=0} + a_y b_y \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_y\cdot\hat{\mathbf{e}}_y}_{=1}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Lineare Gleichungssysteme

$$\text{Beispiel:} \qquad \begin{aligned} 5x + 2y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

Allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems (hier für 3 Variablen):

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 &= b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 &= b_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Kompakte Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}}, \qquad \text{d.h.} \quad \mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Matrixmultiplikation

$$(\mathsf{A}\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}x_j$$

$$\text{Beispiel:} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gauß-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

<u>Beispiel 1:</u>

$$\begin{aligned} 6x - 2y &= 2 \\ 3x - 6y &= 1 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $\frac{1}{2}\times$(erste Gleichung) von der zweiten Gleichung:

$$\begin{aligned} 6x - 2y &= 2 \\ -5y &= 0 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beachte: In der neuen Matrix sind alle Einträge unterhalb der Diagonalen Null, die Lösung ist daher trivial:

$$\Rightarrow \quad y = 0; \quad x = \frac{1}{3}.$$

<u>Beispiel 2:</u>

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ 4x - y + z &= 2 \\ 2x + 2y + 2z &= 4 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

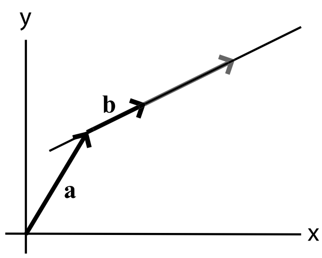
$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ -3y + 3z &= 0 \\ y + 3z &= 3 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ -3y + 3z &= 0 \\ 4z &= 3 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{3}{4},\ y = \frac{3}{4},\ x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(z - y) = \frac{1}{2}.$$

Einfache geometrische Gebilde

Geraden



Parameterdarstellung: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{b}$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$.
Steigung der Geraden: $\frac{b_y}{b_x}$.

Zusammenhang zwischen Parameterdarstellung und funktionaler Form $y = y(x)$ der Geraden:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} x &= a_x + sb_x \\ y &= a_y + sb_y \end{aligned}$$

Auflösen der ersten Gleichung nach s ergibt $s = \frac{x - a_x}{b_x}$ und Einsetzen in die zweite Gleichung führt zu

$$y = a_y + \frac{x - a_x}{b_x} b_y = a_y + \frac{b_y}{b_x}(x - a_x).$$

Normale auf Gerade (in 2 Dimensionen):

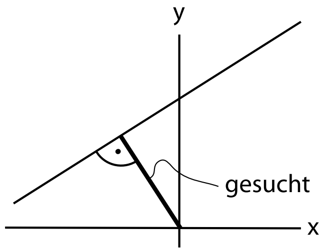
$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b} = 0, \qquad |\hat{\mathbf{n}}| = 1$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \quad n_x b_x + n_y b_y = 0 \qquad \Rightarrow \quad n_y = -\frac{n_x b_x}{b_y} \qquad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{n}} = n_x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b_x}{b_y} \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Normierung $|\hat{\mathbf{n}}| = 1$ erhält man

$$n_x^2\left(1+\frac{b_x^2}{b_y^2}\right)=1 \qquad \Rightarrow \quad n_x=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\frac{b_x^2}{b_y^2}}}=\frac{\pm\,|b_y|}{\sqrt{b_x^2+b_y^2}}=\frac{b_y}{b} \qquad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{n}}=\frac{1}{b}\begin{pmatrix} b_y \\ -b_x \end{pmatrix}$$

(Minimaler) Abstand der Geraden vom Ursprung:



Möglichkeit 1: Minimiere $|\mathbf{x}|^2 = (\mathbf{a} + s\mathbf{b})^2$ als Funktion von s, d.h.

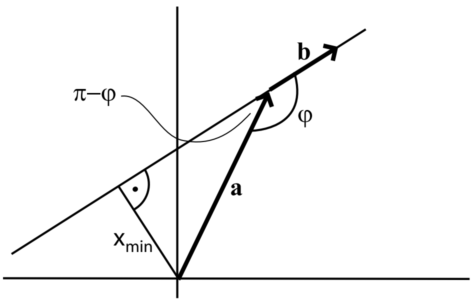
$$|\mathbf{x}|^2 = a^2 + s^2b^2 + 2s\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, \qquad \frac{d\,|\mathbf{x}|^2}{ds} = 2sb^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \qquad \Rightarrow \quad s = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{b^2}$$

Dies ergibt für den minimalen Abstand:

$$|\mathbf{x}|_{\min} = \sqrt{a^2 + \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{b^2} - \frac{2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{b^2}} = \sqrt{a^2 - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{b^2}} = \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\varphi} = a\sqrt{1-\cos^2\varphi} = a\sin\varphi,$$

wobei $\varphi = \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Möglichkeit 2: geometrische Herleitung



$$x_{\min} = a\sin(\pi - \varphi) = a\sin\varphi.$$

Normalform der Geraden in zwei Dimensionen:

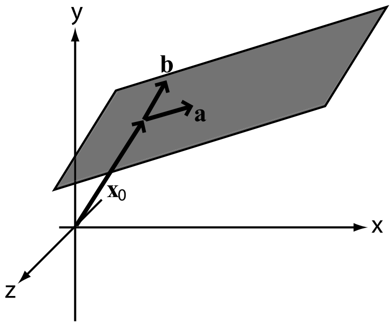
$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

$\mathbf{x_0}$ ist ein beliebiger Punkt auf der Geraden.

Ebenen

Zwei linear unabhängige Vektoren spannen eine Ebene auf, sobald ein Punkt der Ebene bekannt ist. In Parameterdarstellung:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$



Normale auf die Ebene:

Gesucht ist ein Einheitsnormalenvektor, d.h. $\hat{\mathbf{n}}^2 = 1$ und $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b} = 0$. Die Orthogonalitätsbedingungen führen zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_x n_x + a_y n_y + a_z n_z &= 0 \\ b_x n_x + b_y n_y + b_z n_z &= 0 \end{aligned}$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit b_z und der zweiten mit a_z erhält man

$$\begin{aligned} b_z a_x n_x + b_z a_y n_y + b_z a_z n_z &= 0 \\ a_z b_x n_x + a_z b_y n_y + a_z b_z n_z &= 0, \end{aligned}$$

und nach Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung

$$(a_x b_z - a_z b_x) n_x + (a_y b_z - a_z b_y) n_y = 0 \qquad \Rightarrow \quad n_y = \frac{a_z b_x - a_x b_z}{a_y b_z - a_z b_y} n_x.$$

Analog kann man auch n_y eliminieren, mit dem Zwischenschritt

$$\begin{aligned} b_y a_x n_x + b_y a_y n_y + b_y a_z n_z &= 0 \\ a_y b_x n_x + a_y b_y n_y + a_y b_z n_z &= 0, \end{aligned}$$

und dem Ergebnis

$$(a_x b_y - a_y b_x) n_x + (a_z b_y - a_y b_z) n_z = 0 \qquad \Rightarrow \quad n_z = \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_z - a_z b_y} n_x.$$

Damit folgt für den Normalenvektor

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a_z b_x - a_x b_z}{a_y b_z - a_z b_y} \\ \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_z - a_z b_y} \end{pmatrix} n_x = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \frac{n_x}{a_y b_z - a_z b_y}.$$

Dies lässt sich kompakter mit Hilfe des **Kreuzproduktes** ausdrücken, welches definiert ist als

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Per Konstruktion gilt $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ und $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$ und der Einheitsnormalenvektor ist gegeben durch

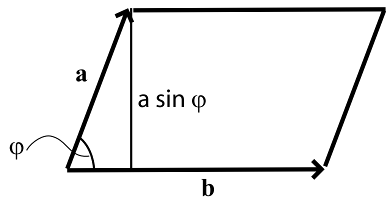
$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

Mehr zum Kreuzprodukt: Neben der Richtung sollten wir auch die Länge geometrisch verstehen. Man erhält

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| &= \sqrt{(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_zb_x-a_xb_z)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2}\\
&= \sqrt{a_y^2b_z^2+a_z^2b_y^2+a_z^2b_x^2+a_x^2b_z^2+a_x^2b_y^2+a_y^2b_x^2-2a_ya_zb_zb_y-2a_za_xb_xb_z-2a_xa_yb_xb_y}\\
&= \sqrt{(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)-a_x^2b_x^2-a_y^2b_y^2-a_z^2b_z^2-2a_yb_ya_zb_z-2a_xb_xa_zb_z-2a_xb_xa_yb_y}\\
&= \sqrt{a^2b^2-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)^2}=\sqrt{a^2b^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}\\
&= \sqrt{a^2b^2-a^2b^2\cos^2\varphi}=ab\sqrt{1-\cos^2\varphi}=ab\,|\sin\varphi|
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\,|\sin\varphi|$ ist die Länge von $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

Geometrische Interpretation von $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$:



(Fläche des Parallelogramms)$= ab\,|\sin\varphi| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

$$\text{Wichtig:}\quad \begin{aligned} \mathbf{a}\times\mathbf{b} &= -\mathbf{b}\times\mathbf{a}\\ \mathbf{a}\times\mathbf{a} &= 0\\ |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| &= ab \quad \text{wenn} \quad \mathbf{a}\perp\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Übungen Brückenkurs — Blatt 4

Aufgabe 1:

(a) Gegeben seien zwei Vektoren $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ und $(\mathbf{a}-\mathbf{b})$. Wann stehen beide Vektoren senkrecht aufeinander?

(b) Drücken Sie $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ (die Fläche des durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms) durch Skalarprodukte aus.

Aufgabe 2:

(a) Bilde aus $\mathbf{a}=(1,2,3)$, $\mathbf{b}=(2,1,3)$, $\mathbf{c}=(2,0,1)$ die Größen

$$\mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{a}-\mathbf{c},\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b},\ \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

(b) Berechne ebenso die Winkel $\measuredangle(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\measuredangle(\mathbf{b},\mathbf{c})$ und $\measuredangle(\mathbf{a},\mathbf{c})$.

(c) Welcher Vektor steht senkrecht auf $\mathbf{a}=(1,1,1)$ und $\mathbf{b}=(1,0,-1)$?

Aufgabe 3:

(a) Eine Gerade geht durch den Punkt $(1,2)$ und hat die Steigung 2. Wie lautet die Parameterdarstellung?

(b) Wie lautet der Normalenvektor $\mathbf{n}$ mit Länge 1 zu dieser Gerade? Welchen Abstand hat die Gerade vom Ursprung?

(c) Wie lautet die funktionale Form der Gerade?

Aufgabe 4:

(a) In einer Klasse hat eine Schülerin doppelt so viele Mitschülerinnen wie Mitschüler, dagegen ein Schüler $2,6$ mal so viele. Was ist die Zahl der Schülerinnen und Schüler?

(b) Ein Flugzeug braucht für die Strecke s mit dem Wind die Zeit t und gegen den Wind die Zeit $1,2t$. Wie groß sind Flugzeug- und Windgeschwindigkeit?

Aufgabe 5:

Lösen Sie:

(a) $8x-3y=11;\quad 5x+2y=34.$

(b) $12x+16y=28;\quad 15x+20y=35.$

(c) $2x-2y=-3;\quad -3x+3y=9.$

(d) $8x-6y=2;\quad 2x+3y=2.$

Aufgabe 6:

(a) Ein Polynom $ax^2 + bx + c$ soll durch den Punkt $(1, 0)$ gehen und in $(2, 6)$ die Steigung 8 haben. Wie lauten die Koeffizienten?

(b) In einem Dreieck ist ein Winkel doppelt so groß wie ein anderer, zusammen sind sie so groß wie der dritte. Bestimmen Sie die Winkel.

(c) Lösen Sie $x = 14 - z$, $-y = x + 1$, $1 = z + y$.

Aufgabe 7: Multiplizieren Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Kapitel 5

Ergänzungen zur Differential- und Integralrechnung

Differentiale

Notation: Physiker schreiben gern (fast immer)

$$\frac{df}{dx} \text{ für } f'(x)$$

Höhere Ableitungen werden häufig mit $\frac{d^n f}{dx^n}$ bezeichnet.
Häufig lässt sich $\frac{df}{dx}$ praktisch wie ein Bruch betrachten, z.B. in der Kettenregel

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

oder bei der Integration durch Substitution

$$\int dy\, f(y) = \int dx\, \frac{dy}{dx}\, f(y(x)).$$

Man kann dies etwas genauer fassen mit dem Begriff des Differentials: Sei dx ein beliebiger Zuwachs von x. Man nennt dx das Differential der unabhängigen Variable. Dann ist $df = f'(x)\,dx$ das zugehörige Differential der Funktion. Mit diesen Definitionen gilt tatsächlich im Sinne der Bruchrechnung

$$\rightarrow \qquad f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Man beachte, dass df also <u>nicht</u> der Zuwachs der Funktion ist, sondern der Zuwachs der Tangente an f in x. Die Differenz zwischen Zuwachs der Tangente und der Funktion geht gegen Null für $dx \to 0$.

<u>Beispiele:</u>

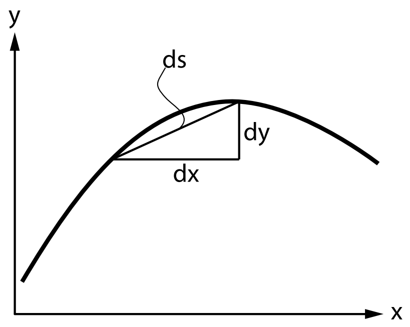
- $f(x) = c \Rightarrow\ df = 0$
- $f(x) = cu(x) \Rightarrow\ df = cu'(x)\,dx = cdu$
- $f(x) = u(x) + w(x) \Rightarrow\ df = [u'(x) + w'(x)]\,dx = du + dw$
- $f(x) = u(x)\,v(x) \Rightarrow\ df = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$

Anwendung bei der Integration durch Substitution

$$\int dx \frac{\sin x}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln\cos x$$
$$\int dx \frac{x^2}{x^3+3} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3+3)}{x^3+3} = \frac{1}{3}\ln(x^3+3)$$

Länge eines Kurvenbogens

Eine weitere geometrische Anwendung der Integralrechnung ist die Berechnung der Länge von Kurven:



$$\begin{aligned} L &\simeq \sum ds = \sum \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ \rightarrow\ ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sum \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx \\ &= \sum \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \\ \rightarrow \qquad L &= \int dx \sqrt{1 + (y')^2} \end{aligned}$$

<u>Beispiel:</u> Kreisumfang

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \;\Rightarrow\; y' = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \qquad U &= 2\int\limits_{-R}^{R} dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2-x^2}} = 2\int\limits_{-R}^{R} dx \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}} = 2R\int\limits_{-1}^{1} dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2R\left[\arcsin x\right]_{-1}^{1} = 2R\left[\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\right] = 2\pi R\,. \end{aligned}$$

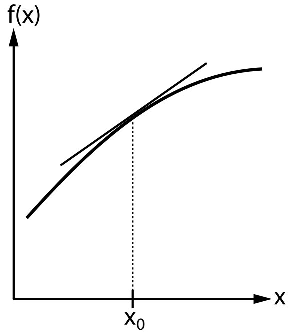
Taylor-Reihe

Wir kennen bereits die Relationen

$$\begin{aligned} e^x &\approx 1 + x \\ \ln(1+x) &\approx x \qquad\qquad \text{für } x \text{ klein} \\ \sin x &\approx x \end{aligned}$$

Dies sind Spezialfälle der Taylor-Reihe, bei denen wir die Funktion in der Nähe von $x = 0$ durch eine Gerade zu nähern versuchen. Allgemeiner kann man fragen, wie man eine Funktion $f(x)$ in der Nähe von $x = x_0$ durch ein Polynom n-ten Grades nähert.

Ist das Polynom erster Ordnung, d.h. eine Gerade, so ist die beste Näherung für x nahe bei x_0 offensichtlich die Tangente an die Funktion bei x_0.



$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

f und Polynom haben bei x_0 gleiche Funktionswerte und gleiche erste Ableitung.
Alle höheren Ableitungen unterscheiden sich im Allgemeinen, da diese Ableitungen des Polynoms erster Ordnung verschwinden.

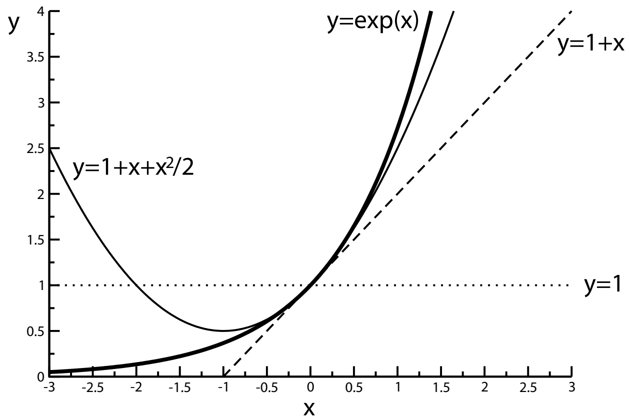
Gehen wir nun zu höheren Polynomen über, so können wir die zusätzlichen Parameter dazu nutzen, dass auch höhere Ableitungen des Polynoms bei x_0 mit den entsprechenden Ableitungen von f übereinstimmen.
Polynom 2. Grades:

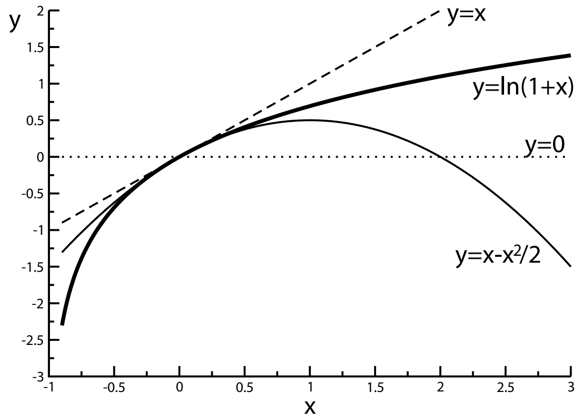
$$\begin{aligned}
& p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{1}{2} a_2 (x - x_0)^2 \\
& f(x_0) = p_2(x_0) \qquad f'(x_0) = p_2'(x_0) \qquad f''(x_0) = p_2''(x_0) \\
\rightarrow \quad & a_0 = f(x_0) \qquad a_1 = f'(x_0) \qquad a_2 = f''(x_0) \\
\text{und somit} \quad & f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\
\text{allgemeiner:} \quad & f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \text{Taylor-Reihe}
\end{aligned}$$

<u>Beispiele:</u>

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots$$

Funktion und Taylor-Reihe bis zur quadratischen Ordnung werden für diese beiden Beispiele in den folgenden Abbildungen gezeigt:





Unbestimmte Ausdrücke und L'Hospital'sche Regel:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = ? \qquad \text{wenn} \qquad f(x_0) = g(x_0) = 0$$

Antwort mit Hilfe der Taylor-Reihe: für x nahe bei x_0 können wir schreiben

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$$

so dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Dies ist die Regel von L'Hospital. Sollten auch die ersten Ableitungen bei x_0 verschwinden, so gilt

$$f(x) \simeq \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \qquad g(x) \simeq \frac{1}{2} g''(x_0)(x - x_0)^2$$

und damit

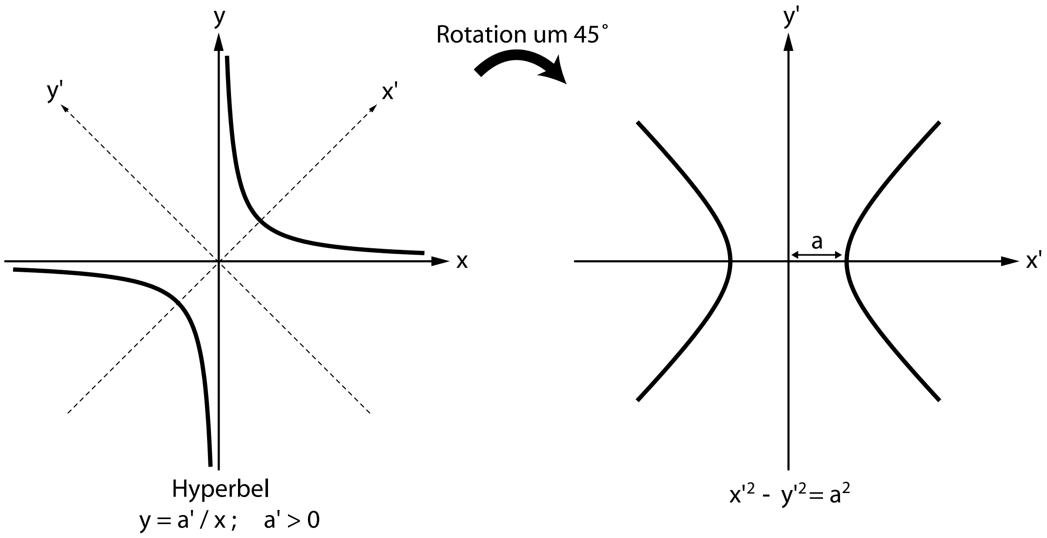
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(x_0)}{g''(x_0)} \qquad \text{etc.}$$

<u>Beispiele:</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^0}{1} = 1$$
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = \frac{2}{1} = 2\ .$$

Hyperbelfunktionen

Ursprung des Namens



$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{aligned}\right\} \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') = \frac{\sqrt{2}a'}{x'-y'} \;\Rightarrow\; (x'+y')(x'-y') = 2a'$$

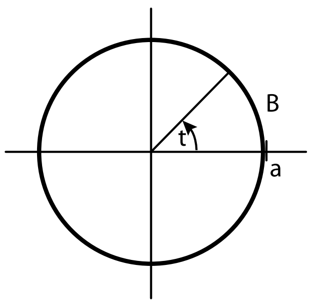
$$\Rightarrow\; x'^2 - y'^2 = 2a'$$

Reskalierung und ohne Striche: $x^2 - y^2 = a^2$ ist alternative Gleichung für Hyperbel

Vgl. mit Kreis: $x^2 + y^2 = R^2$

Parameterdarstellung des Kreises: $x = R\,\cos t\,;\; y = R\,\sin t$
erfüllt Kreisgleichung automatisch wg. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

Geometrische Bedeutung des Parameters t:



$$B = 2\pi a \cdot \frac{t}{2\pi} \qquad B_0 = 2\pi a$$

Umfang des gesamten Kreises

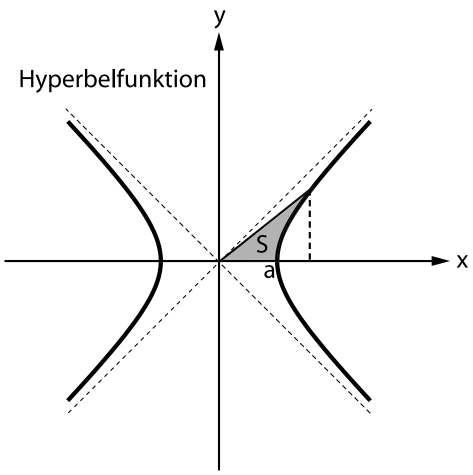
$$t = 2\pi \frac{B}{B_0}$$

Da die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen also eine Bogenlänge angeben, heißen Sie arcus-Funktionen (arcus=Bogen).

Analog für Hyperbel: $x^2 - y^2 = a^2$ hat Parameterdarstellung $x = a\cosh t\,;\; y = a\sinh t$

da $\quad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

Geometrische Bedeutung des Parameters t in diesem Fall:



$$S = \frac{1}{2}xy - \int_a^x y\,dx$$
$$= \frac{1}{2}xy - \int_a^x dx'\sqrt{x'^2 - a^2}$$

$$\text{NR: } \int dx\sqrt{x^2-a^2} = x\sqrt{x^2-a^2} - \int dx\, x\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} = x\sqrt{x^2-a^2} - \int dx\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int dx\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int dx\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$\Rightarrow \int dx\sqrt{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int dx\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\right\}$$
$$\text{wobei} \int dx\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int^{\frac{x}{a}} dy\frac{a}{\sqrt{a^2y^2-a^2}} = \int^{\frac{x}{a}} dy\frac{1}{\sqrt{y^2-1}} = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a}$$
$$x = ay \quad \Rightarrow \quad x' = a$$
$$\Rightarrow \quad \int dx\sqrt{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\operatorname{arcosh}\frac{x}{a}\right\}$$

$$\rightarrow \qquad S = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}x\underbrace{\sqrt{x^2-a^2}}_{y} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcosh}\frac{x}{a} = \frac{a^2}{2}\operatorname{arcosh}\frac{x}{a}$$

führen wir hier $t = 2\pi\frac{S}{S_0}$ mit $S_0 = \pi a^2$ ein, so erhalten wir

$$t = 2\pi\frac{\frac{a^2}{2}\operatorname{arcosh}\frac{x}{a}}{\pi a^2} = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} \qquad \Rightarrow \qquad x = a\cosh t$$
$$y = \sqrt{x^2-a^2} = a\sinh t$$

d. h. wir erhalten wieder die Parameterdarstellung der Hyperbel
$\rightarrow$ geometrische Interpretation von t als Fläche
Da die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen also eine Fläche angeben, heißen Sie area-Funktionen (area=Fläche).

Übungen Brückenkurs — Blatt 5

Aufgabe 1: Vermischte Integrale

(a) $\int dx\, xe^x \sin x$

(b) $\int dx\, \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad |x| < a$

(c) $\int dx\, (x^5 - 4x^3)$

(d) $\int dx\, x^3 \ln x$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Taylor-Reihen bis zur 3. Ordnung um $x_0 = 0$ von

(a) $\sin x$

(b) $\cos x$

(c) $\sinh x$

(d) $\cosh x$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Bogenlängen der folgenden Funktionsgraphen.

(a) $y = x^2$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$.

(b) $y = \cosh x$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$.

(c) $y = \sqrt{x}$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$.