

Theoretische Physik I

Das Skript

Felix von Oppen



Copyright © 2017 Felix von Oppen

Im Fluss

Contents

1

Teil I – Grundlagen

1	Kinematik (Vektoren und Koordinatensysteme)	. 9
1.1	Skalarprodukt (inneres Produkt)	9
1.2	Kreuzprodukt (Vektorprodukt)	11
1.3	Zeitabhängige Vektoren und ihre Ableitungen	14
1.4	Kreisbewegung eines Massenpunktes	18
1.4.1	Fadenpendel	21
1.5	Allgemeine ebene Bewegung in Polarkoordinaten	22
1.5.1	Zentralkraftfelder	26
1.6	Zylinder- und Kugelkoordinaten	28
1.7	Mathematische Ergänzung: Bogenlänge und begleitendes Dreibein	30
2	Dynamik (Newtonsche Mechanik)	35
2.1	Die Newtonschen Gesetze	35
2.2	Bewegung im homogenen Schwerefeld	37
2.2.1	Freier Fall	38
2.2.2	Bewegung mit Reibung	41
2.2.3	Wurf mit Reibung	44
2.3	Harmonischer Oszillator	46
2.3.1	Freier harmonischer Oszillator	47
2.3.2	Komplexe Zahlen	50
2.3.3	Taylor-Reihe und Eulersche Formel	53

2.3.5 2.3.6 2.3.7	Gedämpfter harmonischer Oszillator Erzwungene Schwingungen und Resonanz Gekoppelte Schwingungen	57 60 64
3	Erhaltungsgrößen	69
3.1	Eindimensionale Bewegungen	69
3.1.1	Energieerhaltung für eindimensionale Bewegungen	69
3.1.2	Allgemeine Lösung eindimensionaler Bewegungen	70
3.2	Partielle Ableitungen und der Gradient	75
3.2.1	Partielle Ableitungen	75
3.2.2	Taylor-Reihe einer Funktion mehrerer Veränderlicher	77
3.2.3	Der Gradient	78
3.2.4	Der Gradient in nicht-kartesischen Koordinaten	80
3.3	Energieerhaltungssatz	80
3.4	Der Energieerhaltungssatz für konservative Kraftfelder	82
3.5	Impuls- und Drehimpulserhaltung	84
3.5.1	Ein Teilchen in einem Kraftfeld	84
3.5.2	Impulserhaltung in Systemen wechselwirkender Teilchen	85

Teil II – Anwendungen

4	Zentralkräfte und Planetenbewegung	. 89
4.1	Die Keplerschen Gesetze	89
4.2	Drehimpulserhaltung und ebene Polarkoordinaten	90
4.3	Elementare Geometrie der Ellipse	91
4.4	Berechnung der Bahnkurve	93
4.5	Energie des Planeten	96
4.6	3. Keplersches Gesetz	97
4.7	Lenzscher Vektor	98
4.8	Offene Bahnen und Rutherford-Streuung	99
4.9	Wirkungsquerschnitt	101
5	Starre Körper	107
5.1	Modell des starren Körpers	107
5.2	Schwerpunkt kontinuierlicher Masseverteilungen	108
5.3	Berechnung von Volumenintegralen	110
5.4	Das physikalische Pendel	113
5.5	Trägheitsmomente und Steinerscher Satz	115
5.6	Bewegungsgleichungen	118
5.6.1	Schwerpunkt	118
5.6.2	Drehimpuls eines N-Körper Systems	118
5.7	Trägheitstensor	122

111	II Teil III – Relativität					
6	Spezielle Relativitätstheorie	127				
6.1	Größen in der Physik	127				
6.2	Inertialsysteme und Galilei-Transformationen	133				
6.3	Postulate der speziellen Relativitätstheorie					
6.4	Relativität der Gleichzeitigkeit	139				
6.5	Zeitdilatation	140				
6.6	Längenkontraktion	142				
6.7	Die Lorentz-Transformationen	143				
6.8	Relativistische Addition von Geschwindigkeiten	146				
6.9	Der relativistische Dopplereffekt	149				
6.10	Äquivalenz von Masse und Energie	152				
6.11	Der Impuls in der Relativitätstheorie	154				
6.12	Die kinetische Energie in der Relativitätstheorie	156				
6.13	Relativistische Dynamik	157				
6.13.1 6.13.2	Geladenes Teilchen im konstanten elektrischen Feld	157 159				
6.14	Transformation von Impuls und Energie	160				
6.15	Viererskalare, Vierervektoren und Vierertensoren	161				

Teil I – Grundlagen

- I
 Kinematik (Vektoren und Koordinatensysteme)
 9
- 1.1 Skalarprodukt (inneres Produkt)
- 1.2 Kreuzprodukt (Vektorprodukt)
- 1.3 Zeitabhängige Vektoren und ihre Ableitungen
- 1.4 Kreisbewegung eines Massenpunktes
- 1.5 Allgemeine ebene Bewegung in Polarkoordinaten
- 1.6 Zylinder- und Kugelkoordinaten
- 1.7 Mathematische Ergänzung: Bogenlänge und begleitendes Dreibein
- 2 Dynamik (Newtonsche Mechanik) ... 35
- 2.1 Die Newtonschen Gesetze
- 2.2 Bewegung im homogenen Schwerefeld
- 2.3 Harmonischer Oszillator

3 Erhaltungsgrößen 69

- 3.1 Eindimensionale Bewegungen
- 3.2 Partielle Ableitungen und der Gradient
- 3.3 Energieerhaltungssatz
- 3.4 Der Energieerhaltungssatz für konservative Kraftfelder
- 3.5 Impuls- und Drehimpulserhaltung

1. Kinematik (Vektoren und Koordinatensysteme)

Um die Bahnkurven von Teilchen im Raum zu beschreiben (Kinematik), müssen wir zunächst einige Grundlagen der Vektorrechnung wiederholen bzw. einführen. Außerdem werden wir einfache Beispiele für die Beschreibung nicht-gradliniger Bewegungen kennenlernen: die Kreisbewegung und eine beliebige Bewegung in der Ebene. In diesem Kapitel werden auch zwei zentrale Probleme der Mechanik, das mathematische Pendel und die Bewegung in einem Zentralkraftfeld, eingeführt und formuliert.

1.1 Skalarprodukt (inneres Produkt)

In der Schule bzw. im Brückenkurs haben Sie Vektoren kennengelernt als Größen, die durch Richtung und Länge (Betrag) charakterisiert werden. Das einfachste Beispiel für Vektoren sind Verschiebungen. Mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems können Vektoren als Spaltenvektoren von Komponenten geschrieben werden:

$$\mathbf{a} = a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 \stackrel{a}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$$a_2$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1$$

$$a_1$$

Figure 1.1: Darstellung des Vektors a

wobei $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ Einheitsvektoren (d.h. Vektoren der Länge 1) sind, die in Richtung der Achsen des Koordinatensystems zeigen. Im Folgenden werden wir Einheitsvektoren immer mit *Dach* notieren.

Vektoren existieren *unabhängig* vom Koordinatensystem. Das Koordinatensystem ist 'nur' dazu da, den Vektor geeignet zu notieren. Insbesondere folgt hieraus auch, dass die Komponenten a_x und a_y des Vektors **a** vom gewählten Koordinatensystem abhängen. So gilt im linken Bild von Abb. 1.2 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, im rechten $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, obwohl wir es in beiden Fällen mit *demselben* Vektor zu tun haben. Rechenvorschriften wie Addition oder Skalar- und Vektorprodukt von Vektoren lassen sich daher sowohl koordinatenfrei (geometrisch) als auch in Koordinatenschreibweise erklären. Wir werden hier immer mit der koordinatenfreien Definition beginnen und die Koordinatenschreibweise daraus ableiten.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Vektoren miteinander zu multiplizieren. Zunächst betrachten wir das Skalarpodukt, das zwei Vektoren einen Skalar (Zahl) zuordnet. Es kann auf koordinatenfreie Weise folgendermaßen definiert werden (s. Abb. 1.3):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\text{Länge von } \mathbf{a}) \cdot (\text{Länge der Projektion von } \mathbf{b} \text{ auf Richtung von } \mathbf{a})$$
$$= ab \cos \varphi, \tag{1.2}$$

wobei $\varphi = \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ den von den Vektoren **a** und **b** eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Das Skalarprodukts erlaubt es uns, die Längen von Vektoren sowie den von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkel zu berechnen:

- Die Länge eines Vektors kann mit Hilfe von a · a = a² = (Länge des Vektors a)² berechnet werden.
- Den Winkel φ zwischen zwei Vektoren **a** und **b** kann man aus

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} \tag{1.3}$$

erhalten.

Hieraus folgen insbesondere die folgenden Tatsachen:

- Zwei Vektoren **a** und **b** stehen senkrecht aufeinander, wenn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.
- Für die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_i$ gilt

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \tag{1.4}$$

mit dem Kronecker-Symbol $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

 Das Skalarprodukt ê_i · a = a_i gibt die Projektion des Vektors a auf die Richtung von ê_i an, da ê_i die Länge 1 hat. Daraus folgt, dass



Figure 1.2: Die Komponenten von a sind abhängig vom Koordinatensystem.

Für das Skalarprodukt gelten weiterhin die folgenden wichtigen Rechenregeln:

- (a) Kommutativgesetz: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- (b) Assoziativgesetz: $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b})$
- (c) Distributivgesetz: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

Eigenschaften (a) und (b) folgen unmittelbar aus der Definition. Zum Beweis von (c) bemerken wir, dass $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ die Projektion von $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ auf \mathbf{a} ist, multipliziert mit der Länge von \mathbf{a} . Da nach Abb. 1.4 Projektionen additiv sind, folgt (c).

Neben der koordinatenfreien Definition ist häufig auch die Komponentendarstellung des Skalarprodukts wichtig und nützlich. Diese kann man (der Einfachheit halber für den Spezialfall von zwei Dimensionen) wie folgt erhalten:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \cdot (b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2)$$

= $a_1 b_1 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1}_1 + a_1 b_2 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2}_0 + a_2 b_1 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1}_0 + a_2 b_2 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2}_1$
= $a_1 b_1 + a_2 b_2.$ (1.5)

Aus der koordinatenfreien Definition des Skalarprodukts ergibt sich unmittelbar, dass es (im Gegensatz zu Vektoren, s.o.) unabhängig vom Koordinatensystem ist! Man sagt, dass das Skalarprodukt *invariant* unter Koordinatentransformationen ist. Größen mit dieser Eigenschaft heißen Skalare.

Vorschau: Die allgemeine physikalische Definition von Skalaren, Vektoren und komplizierteren Größen – genannt Tensoren – beruht gerade auf den Eigenschaften der Größen unter Drehungen des Koordinatensystems: Skalare bleiben invariant, Vektoren transformieren alle wie die Komponenten von Verschiebungen etc. Wir werden auf diesen Punkt zum Ende des Semesters im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie zurückkommen.

1.2 Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

Im dreidimensionalen Raum können wir neben dem Skalarprodukt auch ein Vektorprodukt definieren, das zwei Vektoren **a** und **b** einen weiteren Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ zuordnet: Zwei (linear unabhängige) Vektoren spannen eine Fläche auf, so dass man ihnen in drei Dimensionen einen (bis auf das Vorzeichen) eindeutigen Vektor zuordnen kann, der in Richtung des Normalenvektors zeigt und dem Betrag nach gleich der Fläche des von **a**, **b** aufgespannten Parallelogramms ist. (Die Fläche erfüllt die von Produkten erwartete Eigenschaft, dass sie sich verdoppelt, wenn sich **a** oder **b** verdoppeln.)



Figure 1.3: Grafische Darstellung des Skalarprodukts: $b\cos\varphi$ ist die Länge der Projektion von **b** auf **a**.



Figure 1.4: Zum Beweis von (c): Die Strecke $\alpha\beta$ ist die Projektion von **b** auf **a**, die Strecke $\beta\gamma$ ist die Projektion von **c** auf **a** und die Strecke $\alpha\gamma$ ist die Projektion von (**b**+**c**) auf **a**.

Wir können also ein so genanntes Kreuz- oder Vektorprodukt

 $\begin{array}{cccc} 2 \text{ Vektoren} & \longrightarrow & \text{Vektor} \\ \mathbf{a}, \mathbf{b} & \mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{array}$

folgendermaßen auf koordinatenfreie Weise definieren:

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ steht senkrecht auf \mathbf{a}, \mathbf{b}
- (2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ bildet mit \mathbf{a} , \mathbf{b} eine Rechtsschraube (Rechte-Hand-Regel)
- (3) a × b hat die Länge *ab* sin (∠(a,b)), d.h. die Länge von a × b ist gerade durch die Fläche des Parallelogramms gegeben, das durch a und b aufgespannt wird.

Physikalische Anwendungen des Kreuzprodukts sind zum Beispiel der Drehimpuls $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ sowie die Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Das Vektorprodukt erfüllt folgende Rechenregeln:

- (a) Antisymmetrie: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- (b) Distributivgesetz: $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}$ distributiv
- (c) mit den Spezialfällen: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ und $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ hat die maximale Länge, wenn $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

Die Eigenschaft (2) ist mit Hilfe der koordinatenfreien Definition recht mühsam zu beweisen. Daher sei hier einfach auf Großmann S. 70 verwiesen.

Auch das Kreuzprodukt können wir nun in Komponentendarstellung schreiben. Hierzu be-



Figure 1.5: Durch a und b aufgespannte Fläche



Figure 1.6: Zur Komponentendarstellung des Kreuzprodukts

merken wir, dass laut Definition

 $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3$ $\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1$ $\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2.$

Daraus folgt (mit dem Distributivgesetz):

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \times (b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{e}}_3)$$

= $(a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{\mathbf{e}}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{\mathbf{e}}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{\mathbf{e}}_3.$ (1.6)

Wir erhalten also die Komponentendarstellung

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$
(1.7)

Die Indizes kann man sich mit Hilfe der folgenden Merkregel einprägen: Die Beiträge mit positivem Vorzeichen enthalten *zyklische* Permutationen von (123), s. Abb. 1.7.

Wir können das Kreuzprodukt anwenden, um das Volumen V eines durch drei Vektoren \mathbf{a}, \mathbf{b} und \mathbf{c} aufgespannten Parallelepipeds (Spats) anzugeben, wie es in Abb. 1.8 abgebildet ist. Wir können das Volumen als Produkt der von den Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Grundfläche (Parallelogramm) und der durch \mathbf{c} bestimmten Höhe angeben,

$$V = \underbrace{ab \sin(\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}))}_{\text{Grundfläche}} \cdot \underbrace{c \cos(\measuredangle(\mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}))}_{\text{Höhe des Parallelepipeds}}$$
$$= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|. \tag{1.8}$$

Das Spatprodukt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ gibt demnach ein *vorzeichenbehaftetes* Volumen des Parallelepipeds wieder. Aufgrund der freien Wahl der Basisfläche erhalten wir die Identitäten

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$
(1.9)



Figure 1.7: Zyklische Permutation



Figure 1.8: Von **a**, **b** und **c** aufgespanntes Parallelepiped (UNVOLLENDET)

Beachten Sie, dass dies nur für *zyklische* Permutationen von **a**, **b**, **c** gilt; bei antizyklischen Permutationen ändert sich das Vorzeichen!

Schließlich geben wir noch weitere häufig benötigte Formeln für das Kreuzprodukt an:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$
 (engl. back cab) (1.10)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$
(1.11)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$
(1.12)

Der Beweis wird in den Übungsaufgaben nachgeholt.

- \2

1.3 Zeitabhängige Vektoren und ihre Ableitungen

Mit Hilfe von Vektoren kann nun die Bahnkurve eines Teilchens im dreidimensionalen Raum beschrieben werden. Dazu zeichnen wir einen Punkt im Raum als Ursprung (eines Koordinatensystems) aus und geben den Ort des Teilchens durch denjenigen Vektor \mathbf{r} wieder, der den Ursprung in den Ort des Teilchens verschiebt (Abb. 1.9). Bewegt sich das Teilchen im Raum, so ist dieser sogenannte Ortsvektor \mathbf{r} eine Funktion der Zeit $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (Abb. 1.10).

Es ergibt sich nun natürlich die Frage, wie schnell und in welche Richtung sich das Teilchen zu einem Zeitpunkt bewegt? Um dieser Frage nachzugehen, betrachten wir zwei sehr nahe Zeitpunkte



Figure 1.9: Ortsvektor eines Teilchens



Figure 1.10: Bahnkurve eines Teilchens

t und $t + \Delta t$. Die Verschiebung $\Delta \mathbf{r}$ des Teilchens in diesem Zeitintervall ergibt sich zu (Abb. 1.11)

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t). \tag{1.13}$$

Die *mittlere* Geschwindigkeit des Teilchens im Zeitintervall Δt ist dann gegeben durch

$$\mathbf{v}_{mittel} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.\tag{1.14}$$

Eine momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt *t* kann definiert werden, indem wir das Zeitintervall Δt gegen Null gehen lassen,

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$
$$= \frac{d}{dt} \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}(t).$$
(1.15)

Wir werden also durch die Definition der Momentangeschwindigkeit auf natürliche Weise auf eine Verallgemeinerung der Ableitung auf Vektoren als Funktion der Zeit geführt. In der Mechanik werden Zeitableitungen nach Newton häufig durch einen Punkt über der abgeleiteten Größe bezeichnet: Die Momentangeschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}(t)$ ist also die Ableitung der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ nach der Zeit.

Die Richtung der Momentangeschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ ist durch die Tangente an die Bahnkurve gegeben, wie in Abb. 1.12 dargestellt. Die Ableitung der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ kann auch komponenten-



Figure 1.11: Ortsvektor eines Teilchens zum Zeitpunkt t und $t + \Delta t$



Figure 1.12: Die Richtung von $\mathbf{v}(t)$.

weise berechnet werden. Aus

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{e}}_1 + y(t)\hat{\mathbf{e}}_2 + z(t)\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\hat{\mathbf{e}}_1 + y(t+\Delta t)\hat{\mathbf{e}}_2 + z(t+\Delta t)\hat{\mathbf{e}}_3$$
(1.16)

folgt

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

= $[x(t + \Delta t) - x(t)] \hat{\mathbf{e}}_1 + [y(t + \Delta t) - y(t)] \hat{\mathbf{e}}_2 + [z(t + \Delta t) - z(t)] \hat{\mathbf{e}}_3,$ (1.17)

so dass

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \text{gewöhnliche Ableitung der Funktion x(t)}}} \hat{\mathbf{e}}_1 + \dots$$
$$= \dot{x}(t)\hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{y}(t)\hat{\mathbf{e}}_2 + \dot{z}(t)\hat{\mathbf{e}}_3. \tag{1.18}$$

Es folgt also die Regel, dass die Komponenten von $\dot{\mathbf{r}}(t)$ die Ableitungen der Komponenten von $\mathbf{r}(t)$ sind,

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{y}(t)\hat{\mathbf{e}}_2 + \dot{z}(t)\hat{\mathbf{e}}_3 \tag{1.19}$$

oder, als Spaltenvektor geschrieben,

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$
(1.20)

Analog gibt die Beschleunigung **a** an, wie schnell sich die Geschwindigkeit des Teilchens ändert, d.h.

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t).$$
(1.21)

Um diese Definitionen zu illustrieren, betrachten wir die Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} at \\ -bt^2 \\ 0 \end{pmatrix},\tag{1.22}$$



Figure 1.13: Wurfparabel

d.h. das Teilchen bewegt sich auf einer Parabel, da $y = -b\left(\frac{x}{a}\right)^2$. Dann finden wir für Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} a \\ -2bt \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2b \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Ebenso wie bei gewöhnlichen Funktionen gibt es auch für die Ableitung von Vektoren nützliche Ableitungsregeln, insbesondere diverse Produktregeln:

Produkt von Vektor und Skalar – Betrachte z.B. die zeitliche Änderung des Impulses $\mathbf{p}(t) = m(t)\mathbf{v}(t)$ eines Regentropfens, dessen Masse m(t) durch Verdunstung eine Funktion der Zeit t ist, d.h.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{p}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[m(t + \Delta t)\mathbf{v}(t + \Delta t) - m(t)\mathbf{v}(t) - m(t)\mathbf{v}(t + \Delta t) + m(t)\mathbf{v}(t + \Delta t)}{0 \text{ erganzt}} \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} \mathbf{v}(t + \Delta t) + m(t) \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \right]$$

$$= \frac{dm}{dt} \mathbf{v}(t) + m(t) \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$
(1.24)

Wir erhalten also

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}(t) + m(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$
(1.25)

ganz analog zur üblichen Produktregel. Alternativ kann dies auch mit Hilfe der Koordinatenschreibweise bewiesen werden:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(mv_1) \\ \frac{d}{dt}(mv_2) \\ \frac{d}{dt}(mv_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dm}{dt}v_1 + m\frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dm}{dt}v_2 + m\frac{dv_2}{dt} \\ \frac{dm}{dt}v_3 + m\frac{dv_3}{dt} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{dm}{dt} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \\ \frac{dv_3}{dt} \end{pmatrix} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$
(1.26)



Figure 1.14: Parametrisierung der Kreisbewegung

Skalarprodukt – Zur Abwechslung geben wir diesen Beweis in Komponenten an:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)) = \frac{d}{dt} \sum_{i} a_{i}(t) b_{i}(t)$$

$$= \sum_{i} \left(\frac{da_{i}}{dt} b_{i} + a_{i} \frac{db_{i}}{dt} \right)$$

$$= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$
(1.27)

Wir erhalten also auch hier wieder die Struktur der gewöhnlichen Produktregel:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$
(1.28)

Kreuzprodukt - Der Beweis der Produktregel für das Kreuzprodukt

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$
(1.29)

wird in den Übungen behandelt. Bei dieser Produktregel ist es wichtig, auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten!

1.4 Kreisbewegung eines Massenpunktes

Wir wenden uns nun der Bewegung eines Massepunktes auf einer Kreisbahn zu. Hierbei wollen wir uns explizit *nicht* auf den Fall einer konstanten Winkelgeschwindigkeit beschränken. Um den Ort der Teilchens auf der Kreisbahn zu beschreiben, führen wir den Winkel φ zwischen positiver *x*-Achse und Ortsvektor des Teilchens ein. (Der Ursprung des Koordinatensystems liege im Kreismittelpunkt.) Dies ist in Abb. 1.14 illustriert.

Der Ortsvektor kann dann mit Hilfe des Kreisradius R ausgedrückt werden als

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\\ R\sin\varphi \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \cos\varphi\\ \sin\varphi \end{pmatrix},\tag{1.30}$$

wobei φ eine beliebige Funktion der Zeit ist, $\varphi = \varphi(t)$. Die Geschwindigkeit des Teilchens nimmt dann die Form

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -\sin\varphi \,\dot{\phi} \\ \cos\varphi \,\dot{\phi} \end{pmatrix} = R \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

an. Man beachte hier, dass nach der Zeit abgeleitet wird. Wir müssen also die einzelnen Komponenten zunächst nach dem Winkel φ differenzieren und anschließend den Winkel nach der Zeit nachdifferenzieren (Kettenregel!).

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Geschwindigkeit r tangential zum Kreis ist, d.h. es gilt $\dot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{r}$. Dieses Ergebnis erhält man durch

• direktes Ausrechnen:

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = R^2 \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = 0.$$
(1.32)

• Ableiten von $\mathbf{r}^2 = R^2 = \text{konst. nach } t$:

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0. \tag{1.33}$$

Ebenso können wir nun die Beschleunigung angeben,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \left\{ R\dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \underbrace{R\ddot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{Richtung von } \dot{z} (\text{vertaichen})} \underbrace{-R\dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}}_{\text{Richtung von } \dot{z}}.$$
(1.34)

Richtung von $\dot{\mathbf{r}}$ (evtl. bis auf Vorzeichen) Richtung von $-\mathbf{r}$

Die Beschleunigung hat also im Allgemeinen Komponenten sowohl in Tangential- als auch in Radialrichtung. Die Radialkomponente entspricht der Zentripetalbeschleunigung.

Die Ausdrücke für Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung enthalten die orthogonalen Einheitsvektoren

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi\\\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\\\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

(s. Abb. 1.15). Diese Einheitsvektoren erfüllen die Relationen

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} = 1$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} = 0.$$

$$(1.36)$$

Beim Rechnen mit den Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_{\phi}$ ist es wichtig zu beachten, dass sie als Funktion von φ (und damit der Zeit) ihre Richtung ändern!

Wir können nun zusammenfassend Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung mit Hilfe dieser Einheitsvektoren schreiben:

$$\mathbf{r} = R\hat{\mathbf{e}}_r \tag{1.37}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = R\dot{\phi}\hat{\mathbf{e}}_{\phi} \tag{1.38}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = R\ddot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_{\varphi} - R\dot{\varphi}^{2}\hat{\mathbf{e}}_{r}$$
(1.39)

Im Spezialfall einer gleichförmigen Kreisbewegung wächst der Winkel φ linear in der Zeit,

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0. \tag{1.40}$$



Figure 1.15: Einheitsvektoren am Kreis

Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ ist dann konstant, $\dot{\phi} = \omega$, die Winkelbeschleunigung $\ddot{\phi} = 0$ verschwindet. D.h. der Ortsvektor des Teilchens überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Winkel. Wir können nun auch Geschwindigkeit und Beschleunigung zu

$$\dot{\mathbf{r}} = R\omega\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -R\omega^{2}\hat{\mathbf{e}}_{r}$$
(1.41)

vereinfachen. Insbesondere zeigt die Beschleunigung zu allen Zeiten zum Kreismittelpunkt! Um das Teilchen auf der Kreibahn zu halten, muss also gemäß dem 2. Newtonschen Gesetz die entsprechende Zentripetalkraft aufgebracht werden.

Anwendung: Kurvenfahrt mit Auto -

Wir wollen nun diese Betrachtungen anwenden, indem wir eine Autofahrt um eine Kurve mit Radius R betrachten. Konkret wollen wir die Frage stellen, ob es sich in der Kurve lohnt zu bremsen, um die Straßenhaftung nicht zu verlieren.¹

Der Betrag der Geschwindigkeit beträgt $|\dot{\mathbf{r}}| = R |\dot{\phi}|$. Für die Beschleunigung folgt dann bei konstantem Geschwindigkeitsbetrag ($\ddot{\phi} = 0$)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -R\dot{\phi}^2 \hat{\mathbf{e}}_r \Rightarrow |\ddot{\mathbf{r}}| = R\dot{\phi}^2. \tag{1.42}$$

Diese Formel gilt, wenn das Auto nicht abbremst. Wenn das Auto hingegen abgebremst wird, so ist $\ddot{\varphi} \neq 0$ und wir erhalten für die Beschleunigung und ihren Betrag

$$\ddot{\mathbf{r}} = R\ddot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_{\varphi} - R\dot{\varphi}^{2}\hat{\mathbf{e}}_{r}$$

$$\Rightarrow |\ddot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\left(R\dot{\varphi}^{2}\right)^{2} + \left(R\ddot{\varphi}\right)^{2}}.$$
(1.43)

Wir erhalten also das Resultat, dass die Beschleunigung mit Bremsen größer ist als ohne Bremsen!

¹Haftungsausschluss: Wie in der Physik üblich, machen wir hier Annahmen, die bei einer tatsächlichen Autofahrt nicht gegeben sein mögen. Insofern stellt dies keine allgemeine Handlungsanweisung dar. Hier wird z.B. angenommen, dass die Kurve einen konstanten Krümmungsradius hat, dass der Straßenbelag gleichförmig ist oder dass eine eventuelle Überhöhung der Kurve konstant ist,

Nach dem 2. Newtonschen Gesetz muss eine Kraft $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ existieren, um das Auto auf der Straße zu halten, aufgebracht durch die Haftreibung der Räder auf der Straße. Wir müssen also folgern, dass diese Kraft mit Bremsen *größer* ist als ohne Bremsen. Insofern kann Bremsen in der Kurve gefährlich werden, nämlich dann, wenn die Haftreibung ohne Bremsen gerade noch ausreicht, um das Auto auf der Straße zu halten.

1.4.1 Fadenpendel

Wir wollen nun das in Abb. 1.16 skizzierte Fadenpendel betrachten. Das Pendel ist eine der zentralen Probleme der Mechanik und wird uns in den ersten beiden Semestern immer wieder beschäftigen. Das Pendel spielt nicht nur als Modellsystem für Schwingungen eine wichtige Rolle, sondern auch in der theoretischen Mechanik. Allgemein können mechanische Probleme in zwei Klassen unterteilt werden, in die integrablen und die chaotischen Systeme. Integrable Systeme stehen im Mittelpunkt der Anfängervorlesungen und der Lehrbücher, da man sie analytisch lösen kann, d.h. man kann ihre Bewegungsgleichungen (u.U. bis auf Integrationen) explizit lösen. Chaotische Systeme erlauben eine solche analytische Lösung nicht. (Ihre Bewegung muss beispielsweise mit Hilfe eines Computers berechnet werden.) Es stellt sich nun heraus, dass jedes integrable System in geeigneten Koordinaten die mathematische Form eines oder mehrerer Pendel annimmt.

Man bezeichnet das in Abb. 1.16 skizzierte Pendel auch als "mathematisches Pendel", da der Faden der Länge l als masselos betrachtet wird und die Masse m als punktförmig.² Das Teilchen bewegt sich also auf einem Kreis mit Radius l, so dass wir es hier mit einer Kreisbewegung zu tun haben. Der Ort der Masse kann dann eindeutig durch den Auslenkwinkel φ angegeben werden.

Das Teilchen bewegt sich unter dem Einfluß der folgenden Kräfte:

• Gewichtskraft $\mathbf{F}_g = -mg\hat{\mathbf{e}}_z$. Wir können die Gewichtskraft in ihre Komponenten in Radialund Tangentialrichtung zerlegen (s. Abb. 1.16),

$$\mathbf{F}_g = mg\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_r - mg\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}.\tag{1.44}$$

• Fadenkraft $\mathbf{F}_f = -F_f \hat{\mathbf{e}}_r$. Diese Kraft wird vom Faden aufgebracht, um die Masse auf der Kreisbahn zu halten. Sie hängt (aufgrund der Zentrifugalkraft) vom Bewegungszustand der Masse ab und ist somit nicht *a priori* bekannt.³

Im Vorgriff auf das nächste Kapitel werden wir nun das (bereits aus der Schule bekannte) 2. Newtonsche Gesetz (auch: Newtonsche Bewegungsgleichung)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_f \tag{1.45}$$

auf das Pendel anwenden. Drücken wir die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ durch den Winkel $\varphi(t)$ und seine Ableitungen sowie die Einheitsvektoren in Tangential- und Radialrichtung aus (s. den vorigen Abschnitt 1.4), so nimmt die Newtonsche Bewegungsgleichung die Form

$$m\left(-l\dot{\varphi}^{2}\hat{\mathbf{e}}_{r}+l\ddot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}\right)=mg\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_{r}-mg\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}-F_{f}\,\hat{\mathbf{e}}_{r}$$
(1.46)

an.

Wir können nun die Radial- und Tangentialkomponenten separat aufschreiben und erhalten so⁴

Tangentialkomponente:	mlφ	$= -mg\sin\varphi$	(1 47)
Radialkomponente:	$-ml\dot{\phi}^2$	$= mg\cos\varphi - F_f$	(1.47)

²Ein Pendel, bei dem sich die Masse in beliebiger Weise über das Pendel verteilt, wird als physikalisches Pendel bezeichnet.

³Das Minuszeichen im Ausdruck für die Fadenkraft wurde eingeführt, da die Fadenkraft in die negative \hat{e}_r Richtung zeigt.

⁴Formal können wir diese Gleichungen ableiten, indem wir den Ausdruck (1.46) jeweils skalar mit den Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_r$ und $\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$ multiplizieren und die Relationen $\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = 1$, $\hat{\mathbf{e}}_{\varphi} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} = 1$ und $\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} = 0$ ausnutzen.



Figure 1.16: Mathematisches Pendel

Aus der Tangentialkomponente erhalten wir für die Pendelbewegung $\varphi(t)$ die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{1.48}$$

Als Differentialgleichungen bezeichnet man Gleichungen, die neben der gesuchten Funktion, hier $\varphi(t)$, auch ihre Ableitungen enthalten. Solange die gesuchten Funktionen nur von einer Variablen abhängen, spricht man auch genauer von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Das Entwickeln von Lösungsstrategien für solche Gleichungen ist ein zentrales Anliegen dieser Vorlesung. So werden wir auch die Lösung dieser sogenannten *Bewegungsgleichung* noch auf spätere Kapitel verschieben. Hier wollen wir aber noch darauf hinweisen, dass das 2. Newtonschen Gesetz bei bekannten Kräften ganz allgemein eine gewöhnliche Differentialgleichung darstellt, aus der man die Bewegung des Systems zumindest im Prinzip berechnen kann.

Aus der Radialkomponente folgt eine Gleichung für die Fadenkraft

$$F_f = mg\cos\varphi + ml\dot{\varphi}^2. \tag{1.49}$$

Die Fadenkraft setzt sich demnach aus der Radialkomponente der Gewichtskraft (erster Term) sowie der Zentripetalkraft (zweiter Term) zusammen. Sobald die Bewegungsgleichung für $\varphi(t)$ gelöst wurde, kann also die Fadenkraft direkt berechnet werden.

Wichtiger Spezialfall: Die Bewegungsgleichung (1.48) vereinfacht sich für kleine Auslenkungen $\varphi \ll 1$. In diesem Grenzfall können wir sin $\varphi \simeq \varphi$ nähern und erhalten die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{g}{l}\boldsymbol{\varphi} = 0. \tag{1.50}$$

Wir werden später sehen, dass man für das Federpendel im wesentlichen die gleiche Bewegungsgleichung erhält.

1.5 Allgemeine ebene Bewegung in Polarkoordinaten

Wir wollen nun einen Schritt über die Kreisbewegungen hinausgehen und allgemeine Bewegungen in einer Ebene betrachten. Eine wesentliche Motivation besteht darin, dass wir zu einem späteren Zeitpunkt die Planetenbewegungen (Keplersche Gesetze) aus der Mechanik herleiten wollen. Wie



Figure 1.17: Skizze zur Bewegung der Erde (E) um die Sonne (S)

wir sehen werden, sind die Planetenbewegungen ganz allgemein aufgrund der Drehimpulserhaltung eben, d.h. sie spielen sich in einer Ebene ab. Da nun die Gravitationskraft nur vom Abstand r des Planeten von der Sonne abhängt und in Richtung von $(-\hat{\mathbf{e}}_r)$ zeigt, liegt es nahe, den Abstand r als eine der Koordinaten zu benutzen, um den Ort des Planeten zu beschreiben. (Wir nehmen hier an, dass die Sonne sich aufgrund ihrer großen Masse näherungsweise nicht bewegt.)

Um die Bahnkurve zu beschreiben, können wir nun anstelle der kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

auch die Polarkoordinaten

$$r = r(t)$$
 ; $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(t)$

als Funktion der Zeit angeben. Wie in Abb. 1.18 gezeigt wird, sind die Polarkoordinaten so definiert, dass r den Abstand des Massepunktes vom Ursprung angibt, während φ den Winkel zwischen Ortsvektor und positiver x-Achse bezeichnet. Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten wird dann durch

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi \tag{1.51}$$

oder

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}$$
(1.52)

gegeben.



Figure 1.18: Definition der Polarkoordinaten



Figure 1.19: dr in Polarkoordinaten

Wir wollen analog zur Kreisbewegung wieder Ausdrücke für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung angeben. Hierbei müssen wir beachten, dass nun auch r eine Funktion der Zeit ist. Durch Ableiten erhalten wir für die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r}(t) \begin{pmatrix} \cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} + r(t)\dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t)\\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix}.$$
(1.53)

Wenn wir zur Vereinfachung der Notation die Zeitargumente nicht explizit angeben, so wird dies zu

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\phi}\,\hat{\mathbf{e}}_{\phi}.\tag{1.54}$$

Wir sehen also, dass die zeitliche Änderung von *r* dazu führt, dass die Geschwindigkeit auch eine Komponente in Radialrichtung hat.

Es ist hilfreich, dieses rechnerische Resultat auch geometrisch zu interpretieren. Dazu schreiben wir die Ableitungen suggestiv in der Differentialschreibweise,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{e}}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}.$$
(1.55)

Hieraus ergibt sich formal⁵ durch Multiplizieren mit dt

$$d\mathbf{r} = dr\,\hat{\mathbf{e}}_r + rd\,\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}.\tag{1.56}$$

Den Ausdruck (1.56) können wir nun auch auf geometrischem Wege erhalten. Hierzu beachten wir, dass nach der Definition des Differentialquotienten

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}(t) \tag{1.57}$$

⁵Diese Operation ist im folgenden Sinne sinnvoll: Man stelle sich vor, man berechne die Geschwindigkeit auf der linken Seite durch explizites Ausführen des Grenzübergangs $dt \rightarrow 0$. Für jedes kleine, aber endliche dt gilt dann näherungsweise die Glg. (1.55), wobei alle Ableitungen tatsächlich Brüche (Differentialquotienten) darstellen. In dieser Gleichung können wir also tatsächlich mit dt multiplizieren. Die resultierende Näherungsformel wird umso besser, je kleiner dt wird. Formal ist die Gleichung (1.56)zu linearer Ordnung in dt exakt.



Figure 1.20: Skizzen zur Zeitableitung der Einheitsvektoren in Polarkoordinaten

gilt. Betrachten wir nun Abb. 1.19, so lesen wir ab, dass die Radialkomponente von $d\mathbf{r}$ gerade durch dr gegeben ist und dass die Tangentialkomponente die zu $d\varphi$ gehörende Bogenlänge $rd\varphi$ ist. Damit erhalten wir also wiederum

$$d\mathbf{r} = dr\,\hat{\mathbf{e}}_r + rd\,\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi.\tag{1.58}$$

Es sei schließlich noch darauf hingewiesen, dass hier dr im Gegensatz zur üblichen Notation *nicht* die Länge des Vektors $d\mathbf{r}$ bezeichnet!

Neben der Geschwindigkeit wollen wir nun auch noch einen allgemeinen Ausdruck f"ur die Beschleunigung angeben. Wenn wir Glg. (1.55) ein weiteres Mal nach der Zeit ableiten, so müssen wir beachten, dass die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$ am Ortsvektor festgemacht sind und sich somit mit $\mathbf{r}(t)$ als Funktion der Zeit drehen. Wir müssen also in einem ersten Schritt ihre Zeitableitungen

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_{r} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi\\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$$
(1.59)

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_{\varphi} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -\sin\varphi\\\cos\varphi \end{pmatrix} = -\dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi(t)\\\sin\varphi(t) \end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_r \tag{1.60}$$

berechnen. Dieses Resultat können wir auch wieder geometrisch interpretieren. Hierzu beachten wir, dass gemäß Abb. 1.20

$$d\hat{\mathbf{e}}_{r} = d\varphi \hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$$

$$d\hat{\mathbf{e}}_{\varphi} = -d\varphi \hat{\mathbf{e}}_{r}$$
(1.61)

und damit

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_r}{dt} = \phi \hat{\boldsymbol{e}}_{\phi}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}_{\phi}}{dt} = -\phi \hat{\boldsymbol{e}}_r$$
(1.62)

im Einklang mit den analytisch erhaltenen Ergebnissen.

Nun können wir Glg. (1.55) ein weiteres Mal nach der Zeit differenzieren und erhalten damit für die Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left(\dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_{\phi} \right)$$

= $\ddot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \dot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_{\phi} + r \ddot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_{\phi} + r \dot{\phi} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}}_{\phi}.$ (1.63)

Einsetzen der gerade abgeleiteten Ausdrücke für die Zeitableitungen der Einheitsvektoren ergibt schließlich

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\boldsymbol{\phi}}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(f2\dot{r}\dot{\boldsymbol{\phi}} + r\ddot{\boldsymbol{\phi}}\right)\hat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\phi}}.$$
(1.64)

Aus diesem allgemeinen Resultat können wir nun wiederum den Spezialfall einer Kreisbewegung mit $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ ableiten und erhalten

$$\ddot{\mathbf{r}} = -r\dot{\varphi}^2 \,\hat{\mathbf{e}}_r + r\ddot{\varphi} \,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{1.65}$$

im Einklang mit den Ergebnissen von Kap. 1.4.

1.5.1 Zentralkraftfelder

Neben dem Pendel stellen die Zentralkraftfelder eine zweite wichtige Problemklasse der klassischen Mechanik dar. Dies ist zun"achst auf die besondere Bedeutung der Planetenbewegung in der Geschichte der Mechanik zurückzuführen. Darüber hinaus hat die Coulomb-Wechselwirkung zwischen Elektronen und Atomkern die Form einer Zentralkraft, so dass Zentralkraftfelder auch in der Quantenphysik eine herausgehobene Rolle spielen. Von einem eher theoretischen Standpunkt aus liegt die Bedeutung der Zentralkraftfelder darin, dass sie die zentrale Rolle der Symmetrien sowohl in der klassischen Mechanik als auch in der Quantenmechanik illustrieren. Der Aspekt der Symmetrien wird in diesem Semester noch eine untergeordnete Rolle spielen und erst im zweiten Semester intensiver beleuchtet.

Im Rahmen der Mechanik ist die Gravitationskraft zwischen Sonne und Planeten das Paradebeispiel für ein Zentralkraftfeld. Wenn wir die (näherungsweise unbewegte) Sonne als den Ursprung des Koordinatensystems betrachten, so nimmt die Gravitationskraft die Form

$$\mathbf{F}_G(\mathbf{r}) = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r \tag{1.66}$$

an. Hier ist G die Gravitationskonstante, m die Masse des Planeten, M die Masse der Sonne und r der Abstand des Planeten von der Sonne. Dies ist ein Zentralkraftfeld, da die Kraft überall parallel zum Ortsvektor \mathbf{r} ist und dem Betrag nach nur vom Abstand r abhängt. Allgemeiner können wir Zentralkraftfelder also in der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{e}}_r \tag{1.67}$$

schreiben, wobei f(r) eine beliebige Funktion ist.

Wir wollen hier nun ein wesentliches Resultat für die Bewegung in Zentralkraftfeldern vorwegnehmen, nämlich dass sich diese immer in einer festen Ebene abspielen. Wir werden später noch zeigen, dass dies eine direkte Konsequenz der Drehimpulserhaltung ist. Wir können also die Resultate für eine allgemeine ebene Bewegung direkt auf die Bewegung in einem Zentralkraftfeld anwenden.

Analog zu unseren Überlegungen für das Pendel wenden wir nun die Resultate des vorigen Abschnitts auf das 2. Newtonsches Gesetz $m\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\hat{\mathbf{e}}_r$ an und erhalten so

$$m\left\{\left(\ddot{r}-r\dot{\phi}^{2}\right)\hat{\mathbf{e}}_{r}+\left(2\dot{r}\dot{\phi}+r\ddot{\phi}\right)\hat{\mathbf{e}}_{\phi}\right\}=f(r)\hat{\mathbf{e}}_{r}.$$
(1.68)

Indem wir die Radial- und Tangentialkomponenten dieser Gleichung separat anschreiben, erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = f(r)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = 0$$
(1.69)



Figure 1.21: Skizze zum 2. Keplerschen Gesetz

für die (ebene) Bewegung in einem Zentralkraftfeld, ausgedrückt in den Polarkoordinaten r und φ .

Während die erste dieser beiden Gleichungen von der speziellen Form der Zentralkraft abhängt, gilt die zweite Gleichung ganz allgemein für jede Zentralkraft. Wir wollen nun zeigen, dass diese Gleichung äquivalent ist zum 2. Keplerschen Gesetz, das demnach für *beliebige* Zentralkraftfelder gilt. Das 2. Keplersche Gesetz besagt:

2. *Keplersches Gesetz*: Die Verbindungslinie von Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Die mathematische Formulierung dieses Gesetzes führt genau auf Glg. (1.69). Hierzu berechnen wir zunächst die in der Zeit dt durch die Verbindungslinie Sonne–Planet überstrichene Fläche dF. Auf der Basis der Abb. 1.21 erhalten wir

$$dF = \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times d\mathbf{r}|$$

= $\frac{1}{2} |\mathbf{r} \times (dr \hat{\mathbf{e}}_r + r d\varphi \hat{\mathbf{e}}_{\varphi})|$
= $\frac{1}{2} r^2 d\varphi,$ (1.70)

wobei $|\mathbf{r}(t) \times d\mathbf{r}|$ die Fläche des von \mathbf{r} und $d\mathbf{r}$ aufgespannten Parallelogramms angibt, also näherungsweise das Doppelte der überstrichenen Fläche. Das 2. Keplersches Gesetz besagt demnach

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \text{konst.}$$
(1.71)

Flächengeschwindigkeit

Daraus folgt unmittelbar die Aussage

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^{2}\dot{\phi}\right) = 0 \quad \Rightarrow r\dot{r}\dot{\phi} + \frac{1}{2}r^{2}\ddot{\phi} = 0 \tag{1.72}$$

und somit für $r \neq 0$

$$m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0. \tag{1.73}$$

Dies ist gerade Glg. (1.69). Das 2. Keplersches Gesetz folgt also aus dem 2. Newtonschen Gesetz und gilt für beliebige Zentralkraftfelder.

Schließlich wollen wir darauf hinweisen, dass wir später noch den engen Zusammenhang zwischen dem 2. Keplerschen Gesetz und der Erhaltung des (Betrags) des Drehimpulses kennenlernen werden.



Figure 1.22: Zylinderkoordinaten. ρ ist die Länge der (eingezeichneten) Projektion des Vektors **r** auf die *xy* Ebene.

1.6 Zylinder- und Kugelkoordinaten

Wie wir gesehen haben, können ebene Bewegungen nicht nur in kartesischen, sondern auch in Polarkoordinaten beschrieben werden. Welche Beschreibung vorteilhaft ist, hängt von der Natur des betrachteten Problems ab. Nun wollen wir diese Betrachtungen auf einige häufig benutzte Koordinatensysteme in drei Dimensionen verallgemeinern, die Zylinder- und die Kugelkoordinaten. Auch wenn wir diese hier im Zusammenhang mit der Beschreibung von Bahnkurven einführen, so wollen wir doch gleich erwähnen, dass diese Koordinatensysteme (ebenso wie die Polarkoordinaten) ein sehr viel weitergehendes Anwendungsfeld haben.

Wir beginnen mit den Zylinderkoordinaten. Hier ergänzen wir Polarkoordinaten ρ und φ in der *xy*-Ebene um eine Höhenkoordinate *z*.⁶ Dies wird in Abb. 1.22 illustriert. Zylinderkoordinaten sind insbesondere häufig bei Problemen mit einer Symmetrieachse hilfreich, wobei die Symmetrieachse dann als *z*-Achse des Koordinatensystems gewählt werden sollte.

In Zylinderkkordinaten nimmt der Ortsvektor die Form

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \tag{1.74}$$

an, wodurch auch der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten gegeben ist. Die Geschwindigkeit erhalten wir wieder durch Ableiten nach der Zeit,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\rho}\,\hat{\mathbf{e}}_{\rho} + \rho\,\dot{\phi}\,\hat{\mathbf{e}}_{\varphi} + \dot{z}\,\hat{\mathbf{e}}_{z},\tag{1.75}$$

wobei hier die Einheitsvektoren

$$\hat{\mathbf{e}}_{\rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\\\sin\varphi\\0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\\\cos\varphi\\0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_{z} = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} \tag{1.76}$$

⁶Wir wählen hier ρ anstelle von r, da ρ nicht die Länge des Vektors ist, sondern nur die Länge seiner Projektion auf die *xy*-Ebene.



Figure 1.23: Kugelkoordinaten

eingeführt wurden. Durch eine weitere Ableitung nach der Zeit erhalten wir die Beschleunigung

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_{\rho} + \left(2\dot{\rho}\,\dot{\phi} + \rho\,\ddot{\phi}\right)\hat{\mathbf{e}}_{\phi} + \ddot{z}\hat{\mathbf{e}}_z.$$
(1.77)

Bei der Herleitung der Beschleunigung muss wieder beachtet werden, dass sich die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_{\rho}$ und $\hat{\mathbf{e}}_{\phi}$ bei einer Bewegung des Teilchens zeitlich ändern. Der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}_{z}$ zeigt hingegen entlang der kartesischen Koordinatenachse und ist somit zeitlich unveränderlich.

In Kugelkoordinaten geschicht die Charakterisierung eines Raumpunktes (Ortsvektors) durch den Abstand r vom Ursprung, den Winkel θ zwischen Ortsvektor und z-Achse (Polarwinkel) sowie den Winkel φ zwischen Projektion von $\mathbf{r}(t)$ auf die xy-Ebene und der x-Achse (Azimutalwinkel). Dies wird in Abb. 1.23 illustriert. Um alle möglichen Raumpunkte zu erreichen, nehmen die Kugelkoordinaten Werte in den Intervallen

$$r \in [0, \infty) \quad \theta \in [0, \pi] \quad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{1.78}$$

an. Kugelkoordinaten sind häufig hilfreich, wenn das Problem rotationssymmetrisch um einen festen Punkt ist, wobei dieser Punkt in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt werden sollte. Wie man aus der Abb. 1.23 entnehmen kann, nimmt der Ortsvektor in Kugelkoordinaten die Gestalt

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$
(1.79)

an, wodurch wiederum der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten gegeben ist. Um die Ausdrücke der kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten nachzuvollziehen, beachte man, dass $r \sin \theta$ die Länge der Projektion von **r** auf die *xy*-Ebene ist.

Als Übungsaufgabe sollte man sich überlegen, dass Geschwindigkeit und Beschleunigung mit Hilfe der orthogonalen Einheitsvektoren

$$\hat{\mathbf{e}}_{r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0 \end{pmatrix}$$
(1.80)

zu

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\sin\theta\,\phi\,\hat{\mathbf{e}}_\phi \tag{1.81}$$



Figure 1.24: Skizze zur Bogenlänge

sowie

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right)\,\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2\right)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \left(r\sin\theta\,\ddot{\phi} + 2\sin\theta\,\dot{r}\dot{\phi} + 2r\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\phi}\right)\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$
(1.82)

werden. Aus dem Ausdruck für die Geschwindigkeit folgt weiterhin

$$d\mathbf{r} = dr\,\hat{\mathbf{e}}_r + rd\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\sin\theta\,d\,\phi\,\hat{\mathbf{e}}_\phi \tag{1.83}$$

für den Verschiebungsvektor $d\mathbf{r}$.

1.7 Mathematische Ergänzung: Bogenlänge und begleitendes Dreibein

In diesem Abschnitt wollen wir einige Grundlagen der Differentialgeometrie von Kurven im dreidimensionalen Raum kennenlernen.

Betrachten wir also eine Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ im Raum (s. Abb. 1.24), so wollen wir zunächst nach der Länge $S_{1\to 2}$ des im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ zurückgelegten Weges fragen. Diese Länge wird als Bogenlänge bezeichnet und kann mit Hilfe der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ folgendermaßen berechnet werden,

$$S_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \, |\dot{\mathbf{r}}(t)| \,. \tag{1.84}$$

Den Betrag der Geschwindigkeit können wir in unterschiedlichen Koordinatensystemen berechnen und erhalten so die expliziten Ausdrücke

$$S_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$
(1.85)

in kartesische Koordinaten,

$$S_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}$$
(1.86)

in Polarkoordinaten (für eine ebene Kurve) und

$$S_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$$
(1.87)



Figure 1.25: Geometrische Darstellung der Bogenlänge

in Zylinderkoordinaten. Offenbar hängt die Weglänge nur von den Anfangs- und Endpunkten ab und ist *unabhängig* davon, mit welcher Geschwindigkeit die Bahnkurve durchlaufen wird. Mathematisch bedeutet dies, dass die Weglänge *unabhängig* von der speziellen Wahl der *Parametrisierung* der Bahnkurve ist.

Wir wollen daher die Bogenlänge ohne Bezug auf eine Parametrisierung darstellen. Hierzu bemerken wir, dass

$$S_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

= $\int_{1}^{2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$
= $\int_{1}^{2} ds.$ (1.88)

Hier haben wir das Differential der Bogenlänge $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ definiert, dessen geometrische Interpretation in Abb. 1.25 dargestellt wird. Mit Hilfe von $d\mathbf{r} = dx \hat{\mathbf{e}}_1 + dy \hat{e}_2 + dz \hat{\mathbf{e}}_3$ können wir das Differential der Bogenlänge auch als

$$ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 \tag{1.89}$$

schreiben. Indem wir die Ausdrücke für $d\mathbf{r}$ in anderen Koordinatensystemen ausnutzen, erhalten wir

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$$
(1.90)

in Polarkoordinaten,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \tag{1.91}$$

in Zylinderkoordinaten und

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\varphi^2 \tag{1.92}$$

in Kugelkoordinaten.

Eine konkrete Berechung der Bogenlänge geschieht allerdings *immer* mit Hilfe einer Parametrisierung $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ wobei *u* ein beliebiger Parameter ist,

$$S_{1\to 2} = \int_{u_1}^{u_2} du \frac{ds}{du}.$$
 (1.93)

Als Beispiel wollen wir den Umfang einer kreisförmigen Kurve berechnen. Wir können einen Kreis mit Radius R als gleichförmige Kreisbewegung mit Winkelgeschwindigkeit ω parametrisieren

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\omega t\\ R\sin\omega t \end{pmatrix}.$$
(1.94)

Dann ist der Geschwindigkeitsbetrag gegeben durch

$$\dot{\mathbf{r}} = R\omega\hat{\mathbf{e}}_{\varphi} \Rightarrow |\dot{\mathbf{r}}| = R\omega.$$
 (1.95)

Einsetzen in die Formel für die Bogenlänge ergibt

$$S_{0\to t} = \int_0^t dt' \left| \dot{\mathbf{r}}(t') \right| = \int_0^t dt' R \omega = R \omega t.$$
(1.96)

Dies ist die Länge des in der Zeit t überstrichenen Kreisbogens mit Winkel ωt . Für einen vollen Umlauf des Kreises gilt $\omega t = 2\pi$ und somit erhalten wir

$$S_{0\to t=2\pi/\omega}=2\pi R.$$

Dies ist natürlich die bekannte Formel für den Kreisumfang.

Für jede Bahnkurve bietet sich nun als natürliche Parametrisierung die Bogenlänge an, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Da die Bogenlänge für eine Bahnkurve wiederum eine Funktion der Zeit ist, erhalten wir für die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}.\tag{1.97}$$

Hier ist der zweite Faktor auf der rechten Seite der Betrag der Geschwindigkeit. Somit ist

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{1.98}$$

ein *Einheitsvektor* in Tangentialrichtung, der sogenannte *Tangenteneinheitsvektor*. Natürlich hängt die Richtung von $\hat{\mathbf{t}}$ vom Punkt auf der Kurve ab!

Da also $\hat{\mathbf{t}}$ entlang der Kurve seine Richung ändert, können wir seine Ableitung $\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}$ betrachten. Wie in Abb. 1.26 dargestellt, hat sie die folgenden geometrischen Eigenschaften:

- $\left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right|$ ist Maß für die *Krümmung* der Bahnkurve.
- $\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}$ spannt zusammen mit $\hat{\mathbf{t}}$ die Ebene auf, in der die Bahnkurve momentan liegt. Diese Ebene nennt man *Schmiegungsebene*.

Man definiert daher

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{n}}.\tag{1.99}$$

Man bezeichnet κ als *Krümmung* und den weiteren Einheitsvektor $\hat{\mathbf{n}}$ als *Normaleneinheitsvektor*. Die durch $\hat{\mathbf{t}}$ und $\hat{\mathbf{n}}$ aufgespannte Schmiegungsebene definiert dann noch den *Binormalenvektor*

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}.\tag{1.100}$$

Findet die Bewegung in einer festen Ebene statt, so gilt $\hat{\mathbf{b}} = \text{konst.}$ Somit gibt $\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds}$ ein Maß dafür an, wie stark sich Bahnkurve aus der momentanen Schmiegungsebene herausschraubt (*Torsion*). Um dies genauer zu beschreiben, berechnen wir

$$\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \times \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{t}} \times \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = \hat{\mathbf{t}} \times \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds}.$$
(1.101)

Da $\hat{\mathbf{n}}$ ein Einheitsvektor ist, gilt $\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} \perp \hat{\mathbf{n}}$ und somit folgt, dass $\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \parallel \hat{\mathbf{n}}$. Wir können also

$$\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau \hat{\mathbf{n}} \tag{1.102}$$

schreiben. Die Größe τ nennt man *Torsion* der Bahnkurve. Schließlich können wir den Satz der Gleichungen noch komplettieren durch

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{t}} \right) = \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \times \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{b}} \times \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}$$
$$= -\tau \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{b}} \times \kappa \hat{\mathbf{n}} = \tau \hat{\mathbf{b}} - \kappa \hat{\mathbf{t}}.$$
(1.103)

Die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}$ nennt man *begleitendes Dreibein*. Ihre Ableitungen nach der Bogenlänge bilden die *Frenetsche Formeln*

$$\frac{d\mathbf{\hat{t}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{n}} \tag{1.104}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau \hat{\mathbf{n}} \tag{1.105}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = \tau \hat{\mathbf{b}} - \kappa \hat{\mathbf{t}}. \tag{1.106}$$

Als Anwendung wollen wir zunächst die Krümmung eines Kreises berechnen. Parametrisiert durch die Bogenlänge wird der Kreis durch

$$\mathbf{r}(s) = R \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{R} \\ \sin \frac{s}{R} \end{pmatrix}$$
(1.107)

beschrieben. Damit folgt

~

$$\hat{\mathbf{t}}(s) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{s}{R} \\ \cos\frac{s}{R} \end{pmatrix},\tag{1.108}$$



Figure 1.26: Tangenteneinheitsvektoren

so dass wir die Krümmung

$$\kappa = \left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right| = \frac{1}{R} \tag{1.109}$$

erhalten. Wir können die Frenetschen Formeln auch auf die Geschwindigkeit und die Beschleunigung anwenden. Für die Geschwindigkeit erhalten wir

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{\mathbf{t}}.$$
(1.110)

Für die Beschleunigung folgt dann mit v = ds/dt

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} (v \hat{\mathbf{t}}) = \dot{v} \hat{t} + v \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \dot{v} \hat{\mathbf{t}} + v \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \frac{ds}{dt}$$
$$= \dot{v} \hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}}, \qquad (1.111)$$

wobei $\rho = \frac{1}{\kappa}$ den lokalen Krümmungsradius der Bahnkurve bezeichnet. In der zweiten Zeile beschreibt der erste Term die Tangentialbeschleunigung, der zweite Term die Normal- bzw. Zentripetalbeschleunigung. Insbesondere folgt aus dieser Gleichung, dass der Beschleunigungsvektor stets in der Schmiegungsebene liegt!

2. Dynamik (Newtonsche Mechanik)

Im ersten Kapitel haben wir uns vornehmlich mit der Beschreibung von Bahnkurven beschäftigt. Nun wollen wir einen entscheidenden Schritt weitergehen und fragen, wie die Bahnkurven von Teilchen mit den Kräften zusammenhängen, die auf die Teilchen wirken. Dies ist die eigentliche Fragestellung der Mechanik, die durch die *drei Newtonschen Gesetze* beantwortet wird, die Ihnen wahrscheinlich aus der Schule vertraut sind. Wir werden sehen, dass der Zusammenhang zwischen Kraftfeld und Bewegung im Allgemeinen in Form einer Differentialgleichung formuliert ist. Wir werden daher in diesem Kapitel auch anhand verschiedener einfacher Bewegungen einige entsprechende mathematische Grundlagen kennenlernen.

Auch wenn die Newtonschen Gesetze einfach hinzuschreiben sind, so sind ihre Konsequenzen bis zum heutigen Tage nicht vollständig erforscht. Dies gilt insbesondere für nichtlineare chaotische Systeme.

2.1 Die Newtonschen Gesetze

Bisher haben wir uns damit begnügt, die Bewegung von Teilchen im Raum zu beschreiben. Nun wollen wir auch nach der Ursache für die Bewegung fragen. Die Newtonschen Gesetze erlauben es einem im Prinzip, bei bekannten Kräften die Bewegung eines Teilchens aus den Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit vorherzusagen. Wir führen zunächst den Begriff des Massepunktes ein. Unter einem Massepunkt versteht man ein punktförmiges Teilchen der Masse *m*. Dies ist natürlich eine Idealisierung, und es ist vielleicht genauer zu sagen:

Ein Massepunkt ist ein Körper, dessen Ausmaße man bei seiner Beschreibung vernachlässigen kann.

Ob man einen Körper als Massepunkt betrachten kann, hängt demnach von den konkreten Bedingungen und der Genauigkeit ab, mit der man das System beschreiben möchte. So kann man z.B. die Erde bei Betrachtung ihres Umlaufs um die Sonne in guter Näherung als punktförmig betrachten, nicht aber bei Betrachtung ihrer täglichen Drehung um sich selbst. Wir werden uns zunächst in diesem (und folgenden) Kapiteln auf die Mechanik von Massepunkten beschränken, die wir auch einfach als *Teilchen* bezeichnen werden. Wir werden aber noch sehen, dass man sich ausgedehnte Körper (z.B. starre Körper) im Rahmen der Mechanik als aus Massepunkten zusammengesetzt vorstellen kann.

Ein ganz zentraler Begriff der Mechanik ist der des *Inertialsystems*. Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in dem das 1. Newtonsche Gesetz gilt:

1. Newtonsches Gesetz: In einem Inertialsystem bleibt jeder Körper in Ruhe oder im Zustand gleichförmiger Bewegung, auf den keine Kraft wirkt.

Effektiv behauptet Newtons erstes Gesetz, dass ein solches Inertialsystem mit beliebiger Genauigkeit existiert. Offenbar ist eine experimentelle Überprüfung dieses Gesetzes (wie immer) nur näherungsweise möglich, da wir die Gravitationskräfte in unserem Universum niemals ausschalten können. Weiterhin ist jedes Bezugssystem, das sich gleichförmig relativ zu einem Inertialsystem bewegt, selbst ein Inertialsystem. Wir werden auf diese Fragestellungen (Galilei-Transformationen, Galileisches Relativitätsprinzip) später zurückkommen, bevor wir uns mit der Relativitätstheorie beschäftigen.

2. Newtonsches Gesetz: Wirkt auf einen Körper eine Kraft F, so gilt in einem Inertialsystem

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}},\tag{2.1}$$

wobei $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ den Impuls des Teilchens bezeichnet.

Bei zeitlich konstanter Masse nimmt das Gesetz die vielleicht vertrautere Form

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt} = m\mathbf{a}$$
(2.2)

an. Ist aber die Masse des Systems nicht zeitlich konstant (wie z.B. bei der Bewegung einer Rakete oder eines verdampfenden Tröpfchens), so *muss* die ursprüngliche Form $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ beibehalten werden. Wir haben hier die Begriffe der Kraft und der Masse nicht eingeführt, sondern als bekannt vorausgesetzt. Beide Begriffe müssen letztlich experimentell über geeignete Messvorschriften definiert werden.

Bei bekanntem Kraftgesetz (Kraftfeld) $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ führt das 2. Newtonsche Gesetz zu einer Differentialgleichung für die Bewegung des Systems. Diese Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\mathbf{r}}\right) = \mathbf{F}(\mathbf{r},t) \tag{2.3}$$

verknüpft die gesuchte Bewegung $\mathbf{r}(t)$ mit ihren Ableitungen $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{r}}(t)$. Man spricht in diesem Fall auch häufig von der *Newtonschen Bewegungsgleichung*. Entsprechende Beispiele haben wir bereits im letzten Kapitel im Zusammenhang mit dem Pendel und den Zentralpotentialen kennengelernt. Etwas genauer handelt es sich bei der Newtonschen Bewegungsgleichung um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Differentialgleichung ist gewöhnlich, da die gesuchte Funktion nur von einer Variablen, nämlich der Zeit, abhängt und sie ist zweiter Ordnung, da die höchste auftretende Ableitung der gesuchten Funktion die zweite Ableitung ist.

Betrachtet man die Bewegung eines Teilchens im dreidimensionalen Raum, so hat man es eigentlich mit drei gekoppelten Differentialgleichungen zu tun, die jeweils die Beschleunigung in x-, y- und z-Richtung enthalten. In einem System mit N Teilchen wird die Kraft auf das i-te Teilchen im Allgemeinen vom Ort aller N Teilchen abhängen,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; t). \tag{2.4}$$


Figure 2.1: Gravitationskraft: Teilchen 1 wird von Teilchen 2 angezogen

Die Bewegungsgleichung wird dann ein System von 3N gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}(m_{1}\dot{\mathbf{r}}_{1}) = \mathbf{F}_{1}(\mathbf{r}_{1}, \mathbf{r}_{2}, \dots, \mathbf{r}_{N}; t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dt}(m_{N}\dot{\mathbf{r}}_{N}) = \mathbf{F}_{N}(\mathbf{r}_{1}, \mathbf{r}_{2}, \dots, \mathbf{r}_{N}; t)$$
(2.5)

Die in diesen Gleichungen auftretenden Kräfte erfüllen das

3. Newtonsches Gesetz: üben zwei Teilchen Kräfte aufeinander aus, so sind diese gleich groß und entgegengesetzt gerichtet entlang der Verbindungslinie der Teilchen.

Beispiele für fundamentale Kräfte, die das 3. Newtonsche Gesetz erfüllen, sind die

• Gravitationskraft: Zwei Massen m_1 und m_2 ziehen sich über das Kraftgesetz

$$\mathbf{F}_{21} = -Gm_1m_2\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$
(2.6)

an, wobei G die Gravitationskonstante ist. Hier bezeichnet \mathbf{F}_{21} die Kraft, die Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausübt.

• Coulomb-Kraft: Zwei Ladungen Q1 und Q2 üben die Kraft

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right|^3}$$
(2.7)

aufeinander aus.

2.2 Bewegung im homogenen Schwerefeld

Wir haben nun mehrmals gesehen, dass das 2. Newtonsche Gesetz bei bekanntem Kraftgesetz zu einer Differentialgleichung führt, die die Bewegung des Systems beschreibt. Wir wollen im Folgenden eine Reihe von einfachen, aber wichtigen Beispielen solcher Bewegungsgleichungen kennenlernen. Ganz allgemein sollte von vornherein bemerkt werden, dass es für Differentialgleichungen – ähnlich wie für Integrale – keine allgemein anwendbare Lösungsmethode gibt.



Figure 2.2: FreierFall

2.2.1 Freier Fall

Als erstes Beispiel wollen wir den freien Fall eines Teilchens der Masse *m* im homogenen Schwerefeld der Erde betrachten. Die an dem Teilchen angreifende Kraft ist also durch $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{z}}$ gegeben, wobei wir die positive *z*-Richtung nach oben wählen (s. Abb. 2.2). Hier bezeichnet $g = 9,81\text{m}^2/\text{s}$ die Erdbeschleunigung.

Wenn wir annehmen, dass die Geschwindigkeit des Teilchens in horizontaler Richtung verschwindet, d.h. dass die Bewegung eindimensional ist, so erhält man durch Einsetzen der Kraft in das 2. Newtonsche Gesetz die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{z} = -mg. \tag{2.8}$$

Da die Masse sowohl auf der linken Seite (*träge Masse*) als auch auf der rechten Seite (*schwere Masse*) dieser Gleichung auftaucht, können wir sie herauskürzen und erhalten die Bewegungsgleichung

$$\ddot{z} = -g. \tag{2.9}$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wir können sie in eine Differentialgleichung erster Ordnung umwandeln, indem wir sie mit Hilfe der Identität $\ddot{z}(t) = \dot{v}(t)$ durch die Geschwindigkeit ausdrücken,

$$\dot{v}(t) = -g \tag{2.10}$$

Diese Gleichung können wir nun lösen, indem wir beide Seiten über ein Zeitintervall $[t_0, t]$ integrieren,

$$\int_{t_0}^t dt' \frac{dv(t')}{dt'} = -g \int_{t_0}^t dt'.$$
(2.11)

Die linke Seite ist einfach das Integral einer Ableitung, die rechte Seite das Integral über eine konstante Funktion, so dass wir

$$v(t) - v(t_0) = -g(t - t_0).$$
(2.12)

erhalten. Die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit ergibt sich damit zu

$$v(t) = v(t_0) - g(t - t_0).$$
(2.13)

Die Geschwindigkeit wächst also linear mit der Zeit an. Eine wichtige Beobachtung ist, dass diese Lösung die Geschwindigkeit $v(t_0)$ zum Anfangszeitpunkt t_0 enthält. Grundsätzlich ist es so, dass

die allgemeine Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung eine freie Konstante enthält, die man in der Mechanik über Anfangsbedingungen bestimmen muss. Im vorliegenden Fall ist dies eine Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit.

Wir werden im Folgenden sehen, dass die allgemeinen Lösungen von Differentialgleichungen *n*ter Ordnung *n* freie Parameter enthalten, die über die Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen. In der Mechanik treten meist Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf, deren allgemeine Lösung zwei freie Konstanten enthält. Diese werden üblicherweise durch Anfangsbedingungen für den Ort und die Geschwindigkeit des Teilchens bestimmt.

Die Lösung in Glg. (2.13) kann weiterhin als Differentialgleichung für z(t) betrachtet werden,

$$v(t) = \dot{z}(t) = v(t_0) - g(t - t_0).$$
(2.14)

Diese Gleichung kann wieder durch direkte Integration beider Seiten gelöst werden,

$$\int_{t_0}^t dt' \dot{z}(t') = \int_{t_0}^t dt' \left[v(t_0) - g(t' - t_0) \right]$$
(2.15)

woraus man

$$z(t) - z(t_0) = v(t_0) (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$
(2.16)

oder

$$z(t) = z(t_0) + v(t_0) (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$
(2.17)

erhält. Dies löst nun insbesondere die ursprüngliche Differentialgleichung (2.8). Wie bereits diskutiert, enthält diese allgemeine Lösung mit den Anfangswerten für den Ort $z(t_0)$ und die Geschwindigkeit $v(t_0)$ zwei freie Konstanten.

Wir wollen nun einige Spezialfälle der Lösung in Glg. (2.17) diskutieren:

• Der fallende Gegenstand ist zur Zeit $t = t_0$ in Ruhe, d.h. $v(t_0) = 0$. In diesem Fall erhalten wir

$$z(t) = z(t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$
(2.18)

Hieraus können wir die Fallhöhe $s = z(t_0) - z(t)$ in der Zeit $\Delta t = t - t_0$ zu

$$s = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \tag{2.19}$$

bestimmen.

• Bei einem senkrechten Wurf nach *oben* gilt $v(t_0) > 0$. Bei der maximalen Höhe des Körpers gilt v(t) = 0. Diese wird also zur Zeit t_{max} erreicht, die aus

$$v(t_0) - g(t_{max} - t_0) = 0 (2.20)$$

folgt. Durch Auflösen nach t_{max} erhalten wir

$$t_{max} - t_0 = \frac{v(t_0)}{g}.$$
 (2.21)

Hieraus können wir nun die maximale Höhe des Teilchens zu

$$z(t_{max}) = z(t_0) + \frac{v^2(t_0)}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v(t_0)}{g}\right)^2$$
(2.22)

bestimmen. Bei einer Anfangsgeschwindigkeit v(0) wird das Teilchen also gemessen vom Abwurfort eine Höhe von

$$h_{max} = z(t_{max}) - z(t_0) = \frac{v^2(t_0)}{2g}$$
(2.23)

erreichen. (Bemerkung: Dieses Ergebnis folgt natürlich auch ohne Lösung der Bewegungsgleichung direkt aus dem Energieerhaltungssatz.)

Wir wollen nun einen alternativen Lösungsweg betrachten, der die Bedeutung der freien Konstanten in der allgemeinen Lösung und ihre Festlegung über die Anfangsbedingungen besser herausstellt. Hierzu gehen wir zunächst wieder von der Differentialgleichung (2.10) aus und beobachten, dass sie durch jede lineare Funktion

 $v(t) = -gt + a \tag{2.24}$

gelöst wird, wobei *a* eine beliebige Konstante ist. Die Lösung der Gleichung enthält also eine freie Konstante *a*, die über eine Anfangsbedingung an die Geschwindigkeit bestimmt werden kann. Die Geschwindigkeit nimmt zum Anfangszeitpunkt $t = t_0$ den Wert $v(t_0)$ an, d.h. es folgt mit der allgemeinen Lösung (2.24), dass

$$v(t_0) = -gt_0 + a. (2.25)$$

Hieraus kann nun die freie Konstante a zu

$$a = v(t_0) + gt_0 \tag{2.26}$$

bestimmt werden und durch Einsetzen in die allgemeine Lösung erhalten wir wieder

$$v(t) = v(t_0) - g(t - t_0) \tag{2.27}$$

in vollständiger Übereinstimmung mit Glg. (2.13).

Wir wollen noch einmal festhalten, dass ganz allgemein Lösungen von Differentialgleichungen 1. Ordnung *eine* freie Konstante enthalten, die (z.B.) durch *eine* Anfangsbedingung festgelegt wird. Hierbei gibt die Ordnung der Differentialgleichung die höchste auftretende Ableitung der gesuchten Funktion an.

Wir wollen nun diese Art der Lösung auch direkt auf die Differentialgleichung 2. Ordnung (2.9) für z(t) anwenden. Hierzu bemerken wir, dass aus der Konstanz der zweiten Ableitung ($\ddot{z} = -g$) unmittelbar folgt, dass

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$$
(2.28)

die Differentialgleichung für beliebige *a* und *b* löst. Wie wir inzwischen für Differentialgleichungen 2. Ordnung erwarten, enthält diese Lösung mit *a* und *b* zwei freie Konstanten. Diese werden wiederum durch nunmehr *zwei* Anfangsbedingungen für Ort $z(t_0)$ und Geschwindigkeit $v(t_0)$ zum Anfangszeitpunkt t_0 festgelegt. Zusammen mit der allgemeinen Lösung geben diese Anfangsbedingungen

$$z(t_0) = -\frac{1}{2}gt_0^2 + at_0 + b \tag{2.29}$$

$$v(t_0) = -gt_0 + a, (2.30)$$

woraus man durch Auflösen

$$a = v(t_0) + gt_0 \tag{2.31}$$

$$b = z(t_0) - v(t_0)t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2$$
(2.32)

erhält. Durch Einsetzen dieser Konstanten in die allgemeine Lösung (2.28) erhalten wir wiederum

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^{2} + [v(t_{0}) + gt_{0}]t + z(t_{0}) - v(t_{0})t_{0} - \frac{1}{2}gt_{0}^{2}$$

$$= -\frac{1}{2}gt^{2} + gt_{0}t - \frac{1}{2}gt_{0}^{2} + v(t_{0})(t - t_{0}) + z(t_{0})$$

$$= z(t_{0}) + v(t_{0})(t - t_{0}) - \frac{1}{2}g(t - t_{0})^{2}$$
(2.33)

im Einklang mit der bereits bekannten Lösung (2.17).

Auch hier wollen wir noch einmal festhalten, dass ganz allgemein Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung *zwei* freie Parameter enthalten, die durch *zwei* Anfangsbedingungen festgelegt werden - im Rahmen der Mechanik im Allgemeinen durch Ort und Geschwindigkeit zu einem Anfangszeitpunkt t_0 .

2.2.2 Bewegung mit Reibung

Als nächstes Beispiel wollen wir nun die Bewegung eines Teilchens in einem Gas oder einer Flüssigkeit beschreiben. Das Medium führt dazu, dass auf das Teilchen eine Reibungskraft wirkt, die bei langsamer Bewegung des Teilchens als proportional zur Teilchengeschwindigkeit angenommen werden kann,

$$\mathbf{F} = -\lambda \mathbf{v}.\tag{2.34}$$

Betrachten wir nun eine eindimensionale, horizontale Bewegung unter dem Einfluss einer solchen Reibungskraft, so nimmt die Newtonsche Bewegungsgleichung die Form

$$m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} \tag{2.35}$$

an. Wir wollen diese wiederum zunächst mit Hilfe von $\dot{x} = v$ und $\ddot{x} = \dot{v}$ auf die Geschwindigkeit v(t) des Teilchens umschreiben. Dies ergibt

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau_0} v, \tag{2.36}$$

wobei wir die charakteristische Zeit τ_0 durch $1/\tau_0 = \lambda/m$ definiert haben. Dies ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, die wir nun mittels zweier alternativer Lösungswege angehen möchten.

Lösungsweg 1: Lösung durch Ansatz – Laut Bewegungsgleichung ist die Geschwindigkeit v(t) bis auf eine multiplikative Konstante identisch mit ihrer Zeitableitung $\dot{v}(t)$. Dies legt eine Exponentialfunktion als Lösung nahe, so dass wir den folgenden Ansatz machen,

$$v(t) = A e^{Bt}. (2.37)$$

Hieraus erhalten wir durch explizites Ableiten

$$\dot{v}(t) = ABe^{Bt} = Bv(t). \tag{2.38}$$

Durch Vergleich mit der Differentialgleichung identifizieren wir $B = -1/\tau_0$, d.h. der Ansatz wird zu

$$v(t) = A e^{-\frac{t}{\tau_0}}.$$
 (2.39)

Wir können uns nun sogar sicher sein, dass dieser Ansatz die allgemeine Lösung der Differentialgleichung darstellt, da er mit *A* einen freien Parameter enthält.



Figure 2.3: Bewegung mit Reibung: Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit

Diesen freien Parameter bestimmen wir wiederum durch die Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit, v(0), wobei wir nun für den Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ wählen. Damit erhalten wir die Bedingung v(0) = A und somit die Lösung

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{\tau_0}}.$$
(2.40)

Neben der Geschwindigkeit können wir nun auch den zurückgelegten Weg berechnen. Integrieren wir die Gleichung

$$\dot{x}(t) = v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{\tau_0}}$$
(2.41)

über das Zeitintervall [0, t], so erhalten wir

$$x(t) - x(0) = \int_0^t dt' e^{-\frac{t'}{\tau_0}}$$
(2.42)

bzw.

$$x(t) = x(0) + \tau_0 v(0) \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right].$$
(2.43)

Somit folgt insbesondere für die zurückgelegte Strecke

$$S = x(t) - x(0) = \tau_0 v(0) \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right]$$

$$\approx \begin{cases} v(0)t - v(0) \frac{t^2}{2\tau_0} & t \ll \tau_0 \\ \tau_0 v(0) & t \gg \tau_0 \end{cases}$$
(2.44)

Hier haben wir in der zweiten Zeile die Näherungsformel $e^x = 1 + x + x^2/2 + ...$ benutzt, die für kleine *x* gilt. Diese Formel werden wir in Kürze im Zusammenhang mit der Taylorreihe ableiten.

Lösungsweg 2: Trennung der Variablen – Wir wollen nun zeigen, dass wir die Differentialgleichung $\frac{dv}{dt} = f(v)$ ganz allgemein für eine beliebige Funktion f(v) lösen können (genauer: auf eine Integration zurückführen können). Die Bewegungsgleichung (2.36) ist offenbar ein Spezialfall dieser Gleichung mit $f(v) = -v/\tau_0$.

Um diese Differentialgleichungen 1. Ordnung explizit zu lösen, betrachten wir die Ableitung $\frac{dv}{dt}$ formal als endlichen Differenzenquotienten und trennen nun die "Variablen t und v" (daher die Bezeichnung *Trennung der Variablen*), indem wir sie jeweils auf einer Seite der Gleichung



Figure 2.4: Zurückgelegte Strecke bei der Bewegung mit Reibung

sammeln,1

$$dt = \frac{dv}{f(v)}.$$
(2.45)

Diese Gleichung können wir nun über das Intervall $[t_0,t]$ für die Zeit bzw. das entsprechende Intervall $[v(t_0), v(t)]$ für die Geschwindigkeit integrieren. Dies ergibt

$$t - t_0 = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv}{f(v)}.$$
(2.46)

Eine explizite Lösung enthält man, indem man zwei weitere Schritte ausführt, die allerdings erfordern, dass man eine konkrete Wahl der Funktion f(v) betrachtet:

- (i) In einem ersten Schritt müssen wir das Integral über *v* explizit ausführen. Nach Ausführen des Integrals erhält man effektiv die Zeit als Funktion der Geschwindigkeit.
- (ii) Daher müssen wir diese implizite Form der Lösung in einem zweiten Schritt noch nach v(t) auflösen.

Natürlich kann es in bestimmten Fällen schwierig oder gar unmöglich sein, das Integral über *v* explizit zu berechnen.

Illustrieren wir diese allgemeine Herangehensweise nun am Beispiel der Bewegung mit Reibung, so ist $f(v) = -v/\tau_0$. Setzen wir dies in die allgemeine Formel (2.46) ein, so erhalten wir [Schritt (i)]

$$-\frac{1}{\tau_0}(t-t_0) = \int_{\nu(t_0)}^{\nu(t)} \frac{d\nu}{\nu}.$$
(2.47)

Dies ist ein Standardintegral und ergibt

$$-\frac{1}{\tau_0}(t-t_0) = \ln v(t) - \ln v(t_0)$$

= $\ln \frac{v(t)}{v(t_0)}$. (2.48)

Nun müssen wir diese Gleichung nach v(t) auflösen [Schritt (ii)]. Zunächst wählen wir wie oben $t_0 = 0$. Indem wir dann beide Seiten exponenzieren, erhalten wir

$$e^{-\frac{t}{\tau_0}} = \frac{v(t)}{v(0)}$$
(2.49)

¹Diese Gleichung gilt näherungsweise für kleine Zeitintervalle dt und damit auch kleine Geschwindigkeitsdifferenzen dv und gilt beliebig genau, je kleiner dt wird. Im nächsten Schritt integrieren wir über t und v, wobei dt und dv infinitesimale Größen werden, für die diese Relation exakt gilt.

und schließlich

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{\tau_0}}.$$
(2.50)

Dies stimmt natürlich mit dem obigen Resultat (2.40) überein.

2.2.3 Wurf mit Reibung

Wir betrachten nun einen Wurf im homogenen Schwerefeld mit Reibung. Die Bewegungsgleichung enthält also das homogene Schwerefeld $-mg\hat{z}$ (in die negative z-Richtung) und die Reibungskraft $-\lambda \dot{r}$,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\lambda\dot{\mathbf{r}} - mg\hat{\mathbf{z}}.\tag{2.51}$$

Die Bewegung spielt sich in einer Ebene ab, die wir als *xz*-Ebene wählen. Wir können dann die Bewegungsgleichung in ihre *x*- und *z*-Komponenten trennen,

$$\ddot{x} = -\frac{1}{\tau_0} \dot{x} \ddot{z} = -\frac{1}{\tau_0} \dot{z} - g.$$
(2.52)

Hier haben wir die Differentialgleichung wieder mit Hilfe der charakteristischen Zeitskala $\frac{1}{\tau_0} = \frac{\lambda}{m}$ geschrieben. Wir sehen an diesen Gleichungen, dass die Bewegungen in *x*- und *z* Richtung ungekoppelt sind.

Die Bewegungsgleichung für x(t) ist identisch zur Bewegungsgleichung für die im vorigen Abschnitt betrachtete Bewegung mit Reibung. Wir erhalten demnach die Lösung

$$x(t) = x(0) + \tau_0 v_x(0) \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right].$$
(2.53)

Die Gleichung für z(t) schreiben wir zunächst um in eine Gleichung für die Geschwindigkeit $v_z(t)$ in *z*-Richtung

$$\dot{v}_z = -\frac{1}{\tau_0} v_z - g, \tag{2.54}$$

die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann. Aus der Differentialgleichung folgt

$$\frac{dv_z}{\frac{1}{\tau_0}v_z + g} = -dt \tag{2.55}$$



Figure 2.5: Koordinatensystem bei Wurf mit Reibung

und wir erhalten durch Integration beider Seiten im Zeitintevall [0, t]

$$-t = \int_{v_z(0)}^{v_z(t)} \frac{dv_z}{\frac{1}{\tau_0} v_z + g}$$

= $\tau_0 \ln\left(\frac{1}{\tau_0} v_z(t) + g\right) - \tau_0 \ln\left(\frac{1}{\tau_0} v_z(0) + g\right)$
= $\tau_0 \ln\left(\frac{v_z(t) + \tau_0 g}{v_z(0) + \tau_0 g}\right).$ (2.56)

Wir können nun nach $v_z(t)$ auflösen, indem wir beide Seite exponenzieren, und finden das Ergebnis

$$v_z(t) = -g\tau_0 + (v_z(0) + g\tau_0)e^{-\frac{1}{\tau_0}}$$
(2.57)

mit den Grenzfällen

$$v_{z}(t) \approx \begin{cases} v_{z}(0) - (v_{z}(0) + g\tau_{0}) \frac{t}{\tau_{0}} & t \ll \tau_{0} \\ -g\tau_{0} & t \gg \tau_{0} \end{cases}$$
(2.58)

Hier haben wir für kleine Zeiten wieder die Exponentialfunktion in eine Taylorreihe entwickelt. Ist $v_z(0)$ positiv, so wird das Teilchen anfangs natürlich sowohl durch die Reibung als auch durch die Erdanziehung abgebremst. Zu großen Zeiten fällt es mit einer konstanten Geschwindigkeit, bei der sich Reibung und Gewichtskraft gerade kompensieren. Ist $v_z(0)$ hingegen negativ, so wird das Teilchen je nach Anfangsgeschwindigkeit zunächst abgebremst (Reibung dominant) oder beschleunigt (Erdbeschleunigung dominant). Für große Zeiten erreicht es auch in diesem Fall die Grenzgeschwindigkeit $-g\tau_0$, bei der sich Gewichtskraft und Reibungskraft kompensieren (s. Abb. 2.6).

Mit Hilfe des Resultats für $v_z(t)$ können wir nun durch Integration auch z(t) bestimmen,

$$z(t) - z(0) = \int_0^t dt' v_z(t')$$

= $\int_0^t dt' \left[-g\tau_0 + (v_z(0) + g\tau_0) e^{-\frac{t'}{\tau_0}} \right]$
= $-g\tau_0 t + (v_z(0) + g\tau_0) \tau_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right].$ (2.59)

Hieraus erhalten wir schließlich das Ergebnis

$$z(t) = z(0) - g\tau_0 t + \tau_0 \left(v_z(0) + g\tau_0 \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right)$$
(2.60)



Figure 2.6: $v_z(0) > -g\tau_0$ (links) und $v_z(0) < -g\tau_0$ (rechts)



Figure 2.7: Wurf mit Reibung: oben: $g\tau_0 > |v_z(0)|$, $v_z(0) < 0$; Mitte: $g\tau_0 < |v_z(0)|$, $v_z(0) < 0$; unten: $v_z(0) > 0$.

mit den Grenzfällen

$$z(t) \approx \begin{cases} z(0) + v_z(0)t - \frac{1}{2} \left(g + \frac{v_z(0)}{\tau_0} \right) t^2 & t \ll \tau_0 \\ z(0) - g\tau_0 t + \tau_0 \left(v_z(0) + g\tau_0 \right) & t \gg \tau_0 \end{cases}$$
(2.61)

2.3 Harmonischer Oszillator

Wir wenden uns nun dem Verhaltens eines Federpendels zu. Das Federpendel ist dadurch gekennzeichnet, dass die Rückstellkraft der Feder proportional zur Auslenkung ist (Hookesches Gesetz). Dieses Verhalten findet sich in der Physik sehr häufig und ist nicht auf das Federpendel beschränkt. Daher bezeichnet man dieses System auch allgemeiner als *harmonischen Oszillator*. Der harmonische Oszillator wird Sie ebenso wie das Pendel durch das gesamte Physik-Studium begleiten.

Neben der physikalischen Bedeutung wird uns der harmonische Oszillator auch auf natürliche Weise zur Einführung komplexer Zahlen führen.



Figure 2.8: Skizze eines Federpendels mit Federkonstante D und Masse m

2.3.1 Freier harmonischer Oszillator

Betrachten wir ein Federpendel, so hängt die Rückstellkraft F(x) der Feder mit ihrer Auslenkung x über das Hookesche Gesetz

$$F(x) = -Dx \tag{2.62}$$

zusammen. Hierbei bezeichnet *D* die Federkonstante. Bewegt sich die an der Feder angebrachte Masse horizontal, so wirkt nur die Federkraft und die Newtonsche Bewegungsgleichung nimmt die Gestalt

$$m\ddot{x} = -Dx \tag{2.63}$$

an. Teilen wir diese Gleichung durch die Masse *m* und beachten wir, dass die Größe $\omega_0^2 = D/m$ die Dimension (die Einheiten) von $1/(\text{Zeit})^2$ hat (so dass ω_0 eine Kreisfrequenz ist), so erhalten wir die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators in ihrer Standardform,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{2.64}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Wir hatten sie bereits im Rahmen unserer Diskussion der Bewegungsgleichung des Pendels gefunden, wenn wir nur kleine Auslenkungen des Pendels betrachten.

Bevor wir diese Gleichung lösen, wollen wir noch kurz ein vertikal aufgehängtes Federpendel betrachten. In diesem Fall wirkt nicht nur die Rückstellkraft der Feder, sondern auch die Gewichtskraft -mg, so dass die Bewegungsgleichung die Form

$$m\ddot{z} = -Dz - mg \tag{2.65}$$

bzw.

$$\dot{z} = -\omega_0^2 z - g \tag{2.66}$$

annimmt. Wir wollen nun zeigen, dass sich dieser Fall auch auf die vorherige Differentialgleichung zurückführen lässt. Hierzu beobachten wir, dass die Gleichgewichtslage (mit $\dot{x} = \ddot{x} = 0$) aufgrund der Gewichtskraft einer endlichen Auslenkung entspricht. Genauer sieht man aus der Bewegungsgleichung (und es ist natürlich auch intuitiv offensichtlich), dass sich das Gleichgewicht genau dann einstellt, wenn sich Federkraft und Gewichtskraft kompensieren,

$$-\omega_0^2 z_0 - g = 0. \tag{2.67}$$

Diese Gleichung wird durch $z_0 = -g/\omega_0^2$ gelöst.

Es ist nun naheliegend, die Schwingungen und damit auch die Auslenkungen relativ zur Gleichgewichtslage zu beschreiben. Wir führen also eine neue Koordinate

$$x = z - z_0 \tag{2.68}$$



Figure 2.9: Skizze eines Federpendels unter Einfluss der Gravitationskraft

ein, die genau dann verschwindet, wenn $z = z_0$. Schreiben wir nun unter Ausnutzen von $z = x + z_0$ und $\ddot{z} = \ddot{x}$ die Bewegungsgleichung (2.66) mit Hilfe von *x*, so finden wir wieder

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x, \tag{2.69}$$

d.h. dieselbe Gleichung des harmonischen Oszillators, die wir bereits für das horizontale Federpendel gefunden hatten.

Wir wollen auch die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators mit zwei verschiedenen Methoden lösen.

Lösungsweg 1: Lösung mit reellen Zahlen – Der erste Lösungsweg beruht auf der Beobachtung, dass gemäß der Bewegungsgleichung die gesuchte Funktion x(t) proportional zum Negativen seiner zweiten Ableitung ist. Aufgrund der Relationen $(\cos x)'' = -\cos x$ und $(\sin x)'' = -\sin x$ legt diese Beobachtung den Ansatz

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{2.70}$$

nahe. Hierbei haben wir den Vorfaktor von *t* im Argument des Kosinus bereits derart gewählt, dass die Bewegungsgleichung explizit erfüllt wird. Außerdem haben wir zwei freie Konstanten, die Amplitude *a* und die Phase φ , eingeführt. Dass dieser Ansatz die Bewegungsgleichung erfüllt, können wir nun explizit nachrechnen,

$$\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x(t).$$

Die Lösung für x(t) wird in Abb. 2.10 graphisch dargestellt und wird als harmonische Schwingung bezeichnet.

Im Folgenden wollen wir diese Lösung nun etwas genauer diskutieren.

Anfangsbedingungen: Die Lösung enthält zwei freie Konstanten, die Amplitude *a* und die Phase φ. Da wir eine Differentialgleichung 2. Ordnung betrachten, haben wir es also mit einer allgemeinen Lösung zu tun. Die freien Konstanten können über die Anfangsbedingungen x(0) und v(0) für Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 0 bestimmt werden. Dies führt auf

$$x(0) = a\cos\varphi \tag{2.71}$$

$$v(0) = -a\omega_0 \sin\varphi \tag{2.72}$$



Figure 2.10: Weg-Zeit-Diagramm für das Federpendel

Indem wir die trigonometrische Identität $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ benutzen, können wir die Amplitude zu

$$a = \sqrt{x^2(0) + \left(\frac{v(0)}{\omega_0}\right)^2}$$
(2.73)

bestimmen. Für die Phase erhalten wir

$$\tan \varphi = -\frac{\nu(0)}{\omega_0 x(0)},\tag{2.74}$$

indem wir die Glg. (2.71) und (2.72) durcheinander teilen.

- Die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ des Federpendels ist *unabhängig* von der Amplitude *a*. Dieses Resultat gilt nur für die Schwingungen eines *harmonischen* Oszillators. Im Gegensatz dazu hängt beispielsweise die Schwingungsdauer eines Fadenpendels von der Amplitude der Schwingung ab. Wir werden auf diese Tatsache später zurückkommen.
- Alternativ hätten wir ebenso eine sinus-förmige Lösung wählen können. In der Tat ist auch die Linearkombination

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \tag{2.75}$$

eine allgemeine Lösung mit zwei freien Parametern A und B. Diese ist zur vorigen Lösung äquivalent, da

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

= $a\cos\omega_0 t\cos\varphi - a\sin\omega_0 t\sin\varphi$
= $\underbrace{a\cos\varphi}_A \cos\omega_0 t + \underbrace{(-a\sin\varphi)}_B \sin\omega_0 t$ (2.76)

Der letzte Punkt enthält noch eine wichtige allgemeine Beobachtung zu *linearen* Differentialgleichungen. Kennen wir zwei Lösungen einer solchen linearen Differentialgleichung, in unserem Fall also z.B. $x_1(t) = \cos \omega_0 t$ und $x_2(t) = \sin \omega_0 t$, so ist auch eine beliebige *Linearkombination* $Ax_1(t) + Bx_2(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung. Dies lässt sich leicht direkt nachprüfen,

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0 \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} (Ax_1 + Bx_2) + \omega_0^2 (Ax_1 + Bx_2) = 0.$$
 (2.77)

Offenbar benutzt dieser Beweis nur die Linearität der Differentialgleichung, nicht aber ihre spezielle Form. Wir werden diese als *Superpositionsprinzip* bekannte Eigenschaft linearer Differentialgleichungen wiederholt ausnutzen. Lösungsweg 2: Lösung mit komplexen Zahlen – Die Tatsache, dass gemäß der Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ des harmonischen Oszillators x und \ddot{x} proportional zueinander sind, würde auch eine Exponentialfunktion als Lösungsansatz nahelegen. In der Tat folgen aus dem Exponentialansatz

$$x(t) = A e^{\alpha t} \tag{2.78}$$

die Ableitungen

$$\dot{x}(t) = \alpha A \, e^{\alpha t} = \alpha x(t) \tag{2.79}$$

$$\ddot{x}(t) = \alpha^2 A e^{\alpha t} = \alpha^2 x(t) \tag{2.80}$$

Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung gibt

$$(\alpha^2 + \omega_0^2) x(t) = 0. (2.81)$$

Eine nicht-triviale Lösung mit $x(t) \neq 0$ erfordert, dass

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0. \tag{2.82}$$

Damit der Exponentialansatz also die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators löst, müssen wir den Parameter α zu

$$\alpha = \pm \sqrt{-\omega_0^2} \tag{2.83}$$

wählen. Da ω_0^2 eine positive Zahl ist, kann α keine reelle Zahl sein. Allerdings lassen sich Wurzeln aus negativen Zahlen mit Hilfe von *komplexen Zahlen* ziehen. Komplexe Zahlen spielen in der Physik eine wichtige Rolle, und wir wollen diese nun kurz einführen, bevor wir mit diesem Lösungsweg für die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators fortfahren.

2.3.2 Komplexe Zahlen

Im Rahmen der reellen Zahlen gibt es eine Reihe von algebraischen Gleichungen, die keine Lösung haben. Dies gilt beispielsweise für die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0, (2.84)$$

die formal durch $x = \pm \sqrt{-1}$ gelöst würde. Weiterhin können wir keine Logarithmen von negativen Zahlen berechnen. Im Rahmen der komplexen Zahlen können derartige Gleichungen gelöst werden. Dies führt unter anderem dazu, dass im Komplexen jedes Polynom *n*-ter Ordnung genau *n* Nullstellen hat. (Im Reellen sind es nur maximal *n* Nullstellen.) Darüber hinaus stellt es sich heraus, dass im Rahmen der komplexen Zahlen Zusammenhänge zwischen Funktionen aufgedeckt werden, die im Reellen verborgen bleiben. So werden wir z.B. sehen, dass die trigonometrischen Funktionen im Komplexen ganz eng mit der Exponentialfunktion verknüpft sind.

Komplexe Zahlen z können nicht mehr entlang einer Zahlengerade angeordnet werden, sondern werden durch geordnete Zahlenpaare z = (x, y) dargestellt. Sie können also in einer Ebene (*komplexe Ebene*) dargestellt werden, wie in Abb. 2.11 zu sehen.

Hierbei heißt die x-Achse reelle Achse, die y-Achse wird als *imaginäre Achse* bezeichnet. Zahlen auf der reellen Achse werden weiter mit den bekannten reellen Zahlen identifiziert, (x, 0) = x. Komplexe Zahlen haben demnach gewisse Ähnlichkeiten mit Vektoren in zwei Dimensionen. Insbesondere sind Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen analog zu Vektoren in zwei Dimensionen definiert. Allerdings können wir darüber hinaus eine Multiplikation definieren, so dass die komplexen Zahlen nicht nur einen Vektorraum, sondern einen Körper bilden.



Figure 2.11: graphische Darstellung einer komplexen Zahl

Wir können komplexe Zahlen (x, y) alternativ durch Angabe ihres Betrags $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Länge des Pfeils in Abb. 2.11) sowie des Polarwinkels φ zwischen positiver x-Achse und Pfeil beschreiben (vgl. Polarkoordinaten). Das Produkt $z_1 \cdot z_2$ zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 ist nun darüber erklärt, dass sein Betrag durch $|z_1| \cdot |z_2|$ und sein Polarwinkel durch $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ gegeben ist. In Worten ist also der Betrag des Produkts das Produkt der Beträge, der Polarwinkel des Produkts ist aber durch die *Summe* der Polarwinkel gegeben. Mit Hilfe dieser Definition können wir nun unmittelbar die Wurzel aus negativen Zahlen ziehen. Denn das Quadrat aller auf der imaginären Achse liegenden komplexen Zahlen führt auf eine Zahl auf der negativen reellen Achse.

Nehmen wir z.B. die komplexe Zahl (0,1). Sie hat den Betrag eins und den Polarwinkel $\pi/2$. Quadrieren wir diese komplexe Zahl, so erhalten wir eine komplexe Zahl, die ebenfalls den Betrag eins hat, aber den Polarwinkel $\pi = \pi/2 + \pi/2$. Diese Zahl können wir also mit (-1) identifizieren! Als Formel erhalten wir

$$(0,1) \cdot (0,1) = -1. \tag{2.85}$$

Umgekehrt gilt also auch

$$\sqrt{-1} = \pm(0,1). \tag{2.86}$$

Die komplexe Zahl (0,1) spielt eine so zentrale Rolle, dass man für sie eine gesonderte Bezeichnung einführt,

i = (0, 1). (2.87)

Wir können also insbesondere $i^2 = -1$ schreiben.

Die zentrale Rolle von *i* beruht darauf, dass diese Zahl so etwas wir einen "Einheitsvektor" entlang der imaginären Achse darstellt. Mit Hilfe von *i* kann man komplexe Zahlen (x, y) geschickter als

$$z = x + iy \tag{2.88}$$

darstellen. So geschrieben können alle Operationen mit komplexen Zahlen nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra durchgeführt werden, wenn man nur $i^2 = -1$ beachtet. So gilt z.B. für die Addition

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$

= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) (2.89)

und für die Multiplikation

$$z_{1}z_{2} = (x_{1} + iy_{2})(x_{2} + iy_{2})$$

= $x_{1}x_{2} + iy_{1}x_{2} + ix_{1}y_{2} + i^{2}y_{1}y_{2}$
= $(x_{1}x_{2} - y_{1}y_{2}) + i(y_{1}x_{2} + x_{1}y_{2}).$ (2.90)



Figure 2.12: Darstellung von z und der konjugiert komplexen Zahl z*

Man bezeichnet x als *Realteil* der komplexen Zahl z = x + iy, y als *Imaginärteil* und schreibt

$$x = \operatorname{Re}z$$

$$y = \operatorname{Im}z$$
(2.91)

Die Zahl $z^* = x - iy$ heißt *konjugiert komplex* zu *z*.

Mit Hilfe der konjugiert komplexen Zahl kann der Betrag von z als $|z| = \sqrt{z \cdot z^*}$ geschrieben werden, da

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$
(2.92)

Hiermit können wir nun auch die Division z_1/z_2 zweier komplexer Zahlen berechnen,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1}{z_2} \frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$
$$= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$
(2.93)

Neben der kartesischen Darstellung z = x + iy ist auch die oben bereits eingeführte Polardarstellung komplexer Zahlen ausgesprochen wichtig. Offensichtlich ist analog zu den Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$
(2.94)

so dass wir

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{2.95}$$

schreiben können.

Gleich werden wir die sehr wichtige und faszinierende Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{2.96}$$



Figure 2.13: Polardarstellung der komplexen Zahl z = x + iy

beweisen, so dass wir die Polardarstellung

$$z = re^{i\phi} \tag{2.97}$$

erhalten. In der Polardarstellung nimmt die komplexe Konjugation die Form

$$z^* = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = re^{-i\varphi}$$
(2.98)

an und die Definition der Multiplikation und der Division reduzieren sich unmittelbar auf die Potenzgesetze,

$$z_{1}z_{2} = r_{1}e^{i\varphi_{1}}r_{2}e^{i\varphi_{2}} = r_{1}r_{2}e^{i(\varphi_{1}+\varphi_{2})}$$

$$\frac{z_{1}}{z_{2}} = \frac{r_{1}e^{i\varphi_{1}}}{r_{2}e^{i\varphi_{2}}} = \frac{r_{1}}{r_{2}}e^{i(\varphi_{1}-\varphi_{2})}$$
(2.99)

Wir schließen diese knappe Einführung in die komplexen Zahlen mit einem ersten "Beweis" der Eulerschen Formel. Hierzu betrachten wir die Funktion $f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ und bemerken wegen $f'(\varphi) = -\sin \varphi + i \cos \varphi$, dass

$$f'(\boldsymbol{\varphi}) = if(\boldsymbol{\varphi}) \tag{2.100}$$

$$f(0) = 1. (2.101)$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung zusammen mit der Anfangsbedingung bestimmt die Funktion $f(\varphi)$ vollständig. Gleichzeitig können wir diese Differentialgleichung samt Anfangsbedingung offenbar auch durch die Funktion $f(\varphi) = e^{i\varphi}$ lösen. Beide Ausdrücke, $f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ und $f(\varphi) = e^{i\varphi}$, müssen also Darstellungen derselben Funktion sein, woraus die Eulersche Formel (2.96) folgt.

2.3.3 Taylor-Reihe und Eulersche Formel

In diesem Abschnitt wollen wir eine zweite Ableitung der Eulerschen Formel diskutieren. Die Motivation dafür besteht wesentlich auch darin, das wichtige Konzept der Taylor-Reihe einzuführen.

Die Taylor-Reihe ist die Antwort auf die Frage, wie man eine Funktion in der Umgebung eines Punktes x_0 möglichst gut durch ein Polynom *n*-ter Ordnung nähern kann. Je besser die Näherung ist, desto eher erwarten wir, dass nicht nur der Funktionswert am Ort x_0 , sondern auch die Ableitungen der Funktion an der Stelle x_0 mit den entsprechenden Größen des Näherungspolynoms übereinstimmen. Wir werden also versuchen, ein Polynom zu finden, dessen Ableitungen am Ort x_0 mit möglichst vielen Ableitungen der Funktion übereinstimmen. Im einfachsten Fall können wir die Funktion in der Umgebung von x_0 durch ihre Tangente nähern,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{2.102}$$

Dies ist ein Polynom ersten Grades. Bei dieser Näherung stimmen am Ort x_0 der Funktionswert sowie die erste Ableitung für Funktion und Näherungspolynom überein. Die höheren Ableitungen stimmen nicht mehr überein, da diese für das Polynom ausnahmslos identisch verschwinden.

Die Näherung wird besser, wenn sie auch noch die Krümmung der Funktion an der Stelle x_0 beschreibt,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$
(2.103)

In diesem Fall stimmen am Ort x_0 bereits neben dem Funktionswert auch die ersten beiden Ableitungen zwischen Funktion und Näherung überein.

Wir können nun entsprechend fortfahren und durch Hinzunahme höherer Potenzen auch Übereinstimmung für höhere Ableitungen herstellen. Dies führt im Limes, dass die Ordnung n des Polynoms gegen Unendlich geht, auf die Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (x - x_0)^j.$$
(2.104)

Denn wir können nun leicht die Ableitungen der Taylor-Reihe am Ort x₀ berechnen,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (x - x_0)^j$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) \frac{d^n}{dx^n} (x - x_0)^j$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) j(j-1) \dots (j-n+1) (x - x_0)^{j-n}$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) \frac{j!}{(j-n)!} (x - x_0)^{j-n}$$

$$\xrightarrow{x \to x_0} f^{(n)}(x_0). \qquad (2.105)$$

Brechen wir die Taylor-Reihe bei kleiner Ordnung *n* des Polynoms ab, so stellt sie häufig eine gute Näherung an die Funktion in der Umgebung von x_0 dar. Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ kann die Potenzreihe aber auch über einen endlichen Bereich oder sogar die gesamte reelle Achse mit der ursprünglichen Funktion zusammenfallen.

Beispiel 1: Geometrische Reihe – Die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$
(2.106)

um den Punkt $x_0 = 0$ reproduziert die geometrische Reihe

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j.$$
 (2.107)

Offenbar konvergiert diese Reihe für |x| < 1.



Figure 2.14: Die Funktion f(x) = 1/(1-x) (rot) and die Taylor-Reihe um x = 0 zur linearen Ordnung $f(x) \simeq 1 + x$ (blau gestrichelt) und zur quadratischen Ordnung $f(x) \simeq 1 + x + x^2$ (grün gestrichelt).



Figure 2.15: Exponential function $f(x) = e^x$ (rot) and die Taylor-Reihe um x = 0 zur linearen Ordnung $f(x) \simeq 1 + x$ (blau gestrichelt) und zur quadratischen Ordnung $f(x) \simeq 1 + x + x^2/2$ (grün gestrichelt).

Beispiel 2: Exponentialfunktion – Die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \tag{2.108}$$

um den Punkt $x_0 = 0$ hat die Form

$$e^{x} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^{j}$$
(2.109)

Es stellt sich heraus, dass diese Reihe die Exponentialfunktion über die gesamte reelle Achse darstellt.

Beispiel 3: Trigonometrische Funktionen – Die Funktionen

$$f(x) = \sin x$$
$$g(x) = \cos x$$

haben um den Punkt $x_0 = 0$ die Taylor-Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$
(2.110)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$
(2.111)

Auch die Taylor-Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ stellen die Funktionen über die gesamte reelle Achse dar.

Mit Hilfe dieser Taylor-Reihen können wir nun die Eulersche Formel noch einmal "beweisen". Hierzu entwickeln wir

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{1}{2!}(i\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(i\varphi)^3 + \frac{1}{4!}(i\varphi)^4 + \dots$$

= $1 + i\varphi - \frac{1}{2!}\varphi^2 - \frac{i}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \dots$
= $\left[1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \dots\right] + i\left[\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \dots\right]$
= $\cos\varphi + i\sin\varphi,$ (2.112)

wobei wir angenommen haben, dass die Reihen genügend schnell konvergieren, so dass wir sie ohne Komplikationen umordnen können. (Weiterhin haben wir natürlich angenommen, dass sich die Taylor-Reihe auch für Funktionen im Komplexen definieren lässt.)

Schließlich weisen wir noch darauf hin, dass die Eulersche Formel für $\varphi = 2\pi$ auf die erstaunliche Relation

$$e^{2\pi i} = 1. (2.113)$$

führt.

2.3.4 Nochmals freier harmonischer Oszillator

Nun wollen wir die Diskussion des harmonischen Oszillators mit Hilfe komplexer Zahlen fortführen. Hierzu gehen wir von der Bewegungsgleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ aus. Wir interpretieren x(t) als Realteil einer komplexen Funktion z(t) = x(t) + iy(t) und betrachten die Differentialgleichung

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0. \tag{2.114}$$



Figure 2.16: Die Funktion $f(x) = \sin x$ (rot) and die Taylor-Reihe um x = 0 zur linearen Ordnung $f(x) \simeq x$ (blau gestrichelt) und zur quadratischen Ordnung $f(x) \simeq x - x^3/3$ (grün gestrichelt).

Der Realteil dieser Gleichung ist gerade die zu lösende Bewegungsgleichung für x(t). (Der Imaginärteil ist mit $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ eine analoge Differentialgleichung.) Unsere Strategie besteht nun darin, die komplexe Differentialgleichung für z(t) zu lösen. Die eigentlich gesuchte Lösung der Differentialgleichung für x(t) folgt dann als Realteil

$$x(t) = \operatorname{Re}z(t) \tag{2.115}$$

der komplexen Lösung z(t).

Wie in Abschnitt (2.3.1) beschrieben, machen wir für z(t) einen Exponentialansatz

$$z(t) = Ae^{\alpha t}, \tag{2.116}$$

wobei A und α im Allgemeinen komplex sein können. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung gibt

$$(\alpha^2 + \omega_0^2) z = 0, \tag{2.117}$$

so dass für eine nicht-triviale Lösung $z(t) \neq 0$

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm i\omega_0 \tag{2.118}$$

gelten muss. Da wir es mit einer linearen Differentialgleichung zu tun haben, ist die allgemeine Lösung eine Linearkombination aller möglichen Lösungen,

$$z(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}.$$
(2.119)

Die Gleichungen für den Real- und den Imaginärteil koppeln nicht. So können wir uns auf reelle Lösungen beschränken. (y(t) = 0 ist eine mögliche Lösung der Gleichung für den Imaginärteil.) Offenbar wird z(t) reell, wenn $A = B^*$. Setzen wir also

$$A = B^* = \frac{a}{2}e^{i\varphi} \tag{2.120}$$

mit $a, \phi \in \mathbb{R}$, so erhalten wir

$$z(t) = \frac{a}{2} \left[e^{i\omega_0 t + i\varphi} + e^{-i\omega_0 t - i\varphi} \right]$$
(2.121)

bzw. mit Hilfe der Eulerschen Formel

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi).$$
 (2.122)

Dies entspricht der bereits zuvor abgeleiteten allgemeinen Lösung für den harmonischen Oszillator.

2.3.5 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, dass wir den harmonischen Oszillator auch mit Hilfe der komplexen Zahlen lösen können. Dieser Lösungsweg wird dann sehr nützlich, wenn wir das Problem noch erweitern. So werden wir z.B. in diesem Abschnitt eine auf den harmonischen Oszillator wirkende Reibungskraft berücksichtigen.

In diesem Fall tritt zusätzlich zur Rückstellkraft -Dx der Feder auch die Reibungskraft $-\lambda \dot{x}$ auf, so dass die Newtonsche Bewegungsgleichung die Form

$$m\ddot{x} = -Dx - \lambda\dot{x} \tag{2.123}$$

annimmt. Teilen wir diese Gleichung durch *m* und führen wir die Eigenfrequenz $\omega_0^2 = D/m$ sowie den Reibungskoeffizienten² $2\gamma = \lambda/m$ ein, so erhalten wir

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{2.124}$$

Wir interpretieren dies wie im vorigen Abschnitt als Realteil einer entsprechenden Gleichung für die komplexe Funktion z(t) = x(t) + iy(t).

Wir beobachten nun, dass mit dem Exponentialansatz

$$z(t) = Ae^{\alpha t} \tag{2.125}$$

auch die Reibungskraft proportional zu z(t) ist, denn

$$\dot{z} = \alpha A e^{\alpha t}$$

$$= \alpha z. \tag{2.126}$$

Da ebenso gilt

$$\ddot{z} = \alpha^2 z, \tag{2.127}$$

erhalten wir durch Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung

$$(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2) z(t) = 0.$$
(2.128)

Für eine nicht-triviale Lösung muss $z(t) \neq 0$ gelten, so dass wir

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \tag{2.129}$$

erhalten. Somit folgt

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$
(2.130)

Da die Bewegungsgleichung auch mit Reibung linear ist, ist die allgemeine komplexe Lösung eine Linearkombination aller möglichen Lösungen (gegeben durch die beiden Vorzeichen der Gleichung für α). Somit erhalten wir

$$z(t) = e^{-\gamma t} \left[A e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2 t}} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2 t}} \right].$$
(2.131)

Um die resultierende Bewegung zu verstehen, ist es hilfreich, eine Fallunterscheidung zu machen.

• Schwache Dämpfung $\gamma < \omega_0$: Definieren wir die reelle Frequenz $\omega = [\omega_0^2 - \gamma^2]^{1/2}$, so wird die allgemeine komplexe Lösung zu

$$z(t) = e^{-\gamma t} \left[A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \right].$$
(2.132)

Wir können wie im vorigen Abschnitt eine reelle Lösung suchen.³ Eine reelle Lösung erfordert, dass wir

$$A = B^* = \frac{a}{2}e^{i\varphi} \tag{2.133}$$

wählen. Somit erhalten wir schließlich für die physikalische reelle Lösung

$$x(t) = ae^{-\gamma t}\cos\left(\omega t + \varphi\right). \tag{2.134}$$

Wir sehen also, dass im Fall schwacher Dämpfung die Amplitude der Schwingung exponentiell mit der Zeit abfällt, wie in Abb. 2.17 dargestellt.

Die Frequenz der gedämpften Schwingung ist $\omega = [\omega_0^2 - \gamma^2]^{1/2}$ und damit *kleiner* als die Frequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung.

²Der Faktor zwei in dieser Definition wird eingeführt, damit die späteren Ergebnisse weniger numerische Faktoren enthalten. Zuvor hatten wir auch $\lambda/m = 1/\tau$ definiert. γ und τ hängen also über $\gamma = 1/2\tau$ zusammen.

³Dies ist möglich, da die Gleichung für den Imaginärteil y(t) u.a. durch y(t) = 0 gelöst wird.



Figure 2.17: Auslenkung als Funktion der Zeit für einen harmonischen Oszillator mit schwacher Dämpfung.

• Starke Dämpfung $\gamma > \omega_0$: In diesem Fall ist $\delta = [\gamma^2 - \omega_0^2]^{1/2}$ reell und unsere Lösung somit bereits reell, wenn wir *A* und *B* reell wählen,

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[A e^{\delta t} + B e^{-\delta t} \right].$$
(2.135)

Da

$$\dot{x}(t) = -\gamma x(t) + e^{-\gamma t} \delta \left[A e^{\delta t} - B e^{-\delta t} \right]$$
(2.136)

folgt aus den Anfangsbedingungen x(0) = 0 und $\dot{x}(0) = v_0$, dass

$$x(0) = A + B \tag{2.137}$$

$$\dot{x}(0) = -\gamma(A+B) + \delta(A-B).$$
 (2.138)

Lösen wir diese Gleichungen nach A und B auf, so erhalten wir

$$A = -B = \frac{v_0}{2\delta} \tag{2.139}$$

und somit

$$x(t) = \frac{v_0}{2\delta} e^{-\gamma t} \left[e^{\delta t} - e^{-\delta t} \right]$$

= $\frac{v_0}{\delta} e^{-\gamma t} \sinh(\delta t)$. (2.140)

Da der Oszillator in diesem Fall nur eine Auslenkung macht (s. Abb. 2.18), wird der Fall starker Dämpfung auch als Kriechfall bezeichnet.

• Aperiodischer Grenzfall $\gamma = \omega_0$: Wir untersuchen den aperiodischen Grenzfall als Limes $\delta \to 0$ ausgehend vom Fall starker



Figure 2.18: Auslenkung als Funktion der Zeit für einen harmonischen Oszillator im *Kriechfall* (starke Dämpfung).

Dämpfung $\gamma > \omega_0$. Berechnen wir den Grenzwert mit Hilfe der Regel von l'Hospital, so erhalten wir

$$\lim_{\delta \to 0} x(t) = v_0 e^{-\gamma t} \lim_{\delta \to 0} \frac{\sinh(\delta t)}{\delta}$$
$$= v_0 t e^{-\gamma t}, \qquad (2.141)$$

d.h. auch im aperiodischen Grenzfall besteht die Schwingung nur aus einer einzigen Auslenkung.

2.3.6 Erzwungene Schwingungen und Resonanz

Nun wollen wir einen harmonischen Oszillator betrachten, der extern periodisch angetrieben wir, indem auf ihn die Kraft

$$F = F_0 \cos \Omega t \tag{2.142}$$

wirkt. Die Frequenz Ω der treibenden Kraft unterscheidet sich im Allgemeinen von der Eigenfrequenz ω_0 des harmonischen Oszillators sowie der Schwingungsfrequenz ω bei Anwesenheit von Reibung. Auch für dieses Problem stellt sich der Zugang mit komplexen Zahlen als ausgesprochen hilfreich heraus.

Die Bewegungsgleichung des getriebenen Oszillators hat die Form

$$m\ddot{x} = -Dx - \lambda\dot{x} + F_0 \cos\Omega t \tag{2.143}$$

oder mit $K = F_0/m$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = K \cos \Omega t. \tag{2.144}$$

Um dies in eine komplexe Differentialgleichung zu übersetzen, beobachten wir, dass sich die treibende Kraft aufgrund der Eulerschen Formel als Realteil einer "komplexen Kraft" $F_0 \exp(i\Omega t)$ betrachten lässt. Somit ist mit z(t) = x(t) + iy(t) die Bewegungsgleichung der Realteil der komplexen Differentialgleichung

$$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = K e^{i\Omega t}.$$
(2.145)

Die gesuchte physikalische Lösung folgt als Realteil x(t) = Rez(t) der komplexen Lösung.



Figure 2.19: Durch eine Kraft $F = F_0 \cos \Omega t$ getriebener Oszillator

Die Bewegungsgleichung ist weiterhin linear, aber *inhomogen* aufgrund der treibenden Kraft $K \cos \Omega t$. Als Inhomogenität bezeichnet man einen additiven Term in der Differentialgleichung, der explizit von der Variablen t, aber nicht von der gesuchten Funktion z(t) abhängt. Die allgemeine Lösung einer *inhomogenen* linearen Differentialgleichung setzt sich zusammen aus der Summer einer beliebigen speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

Den Beweis führen wir für die spezielle Differentialgleichung, die wir hier betrachten. Allerdings sollte es offensichtlich sein, dass der Beweis sich nur auf die Linearität der Gleichug stützt. (In der Tat gilt eine entsprechende Aussage für die Lösungen linearer Gleichungssysteme.) Nehmen wir also an, dass wir eine spezielle Lösung $z_{sp}(t)$ der inhomogenen Gleichung kennen, d.h. es gilt

$$\ddot{z}_{\rm sp} + 2\gamma \dot{z}_{\rm sp} + \omega_0^2 z_{\rm sp} = K e^{i\Omega t}.$$
(2.146)

Diese Lösung ist speziell, da sie keine freien Konstanten enthält, die wir an beliebige Anfangsbedingungen anpassen können. Andererseits sei z_{hom} die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, d.h. es gilt

$$\ddot{z}_{\rm hom} + 2\gamma \dot{z}_{\rm hom} + \omega_0^2 z_{\rm hom} = 0,$$
 (2.147)

wobei $z_{hom}(t)$ als allgemeine Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei freie Konstanten enthält. Nun kann man sich durch Addition der Gleichungen (2.146) und (2.147) davon überzeugen, dass $z(t) = z_{sp} + z_{hom}$ die Differentialgleichung (2.145) des getriebenen Pendels erfüllt. Andererseits enthält z(t) durch die Lösung der homogenen Gleichung zwei freie Konstanten, ist also die allgemeine Lösung.

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung haben wir bereits in Kap. 2.3.5 abgeleitet. Insofern bleibt uns nur noch die Aufgabe, eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden. Hierzu machen wir den Ansatz

$$z = A e^{i\Omega t}.$$
(2.148)

Wie man sich leicht überzeugt, enthalten dann alle Summanden der Differentialgleichung den Faktor $e^{i\Omega t}$, so dass dieser aus der Gleichung herausgekürzt werden kann. In der Tat erhalten wir durch Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung des getriebenen Oszillators

$$\left[-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2\right]A e^{i\Omega t} = K e^{i\Omega t}$$
(2.149)

und nach Herauskürzen des Exponentialfaktors

$$A = \frac{K}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} = |A|e^{i\varphi}.$$
(2.150)



Figure 2.20: Auslenkung |A| in Abhängigkeit von Ω/ω_0 für drei Dämpfungskonstanten $\gamma/\omega_0 = 0,05$ (orange), $\gamma/\omega_0 = 0,1$ (blau), $\gamma/\omega_0 = 0,3$ (grün).

Somit erhalten wir für die spezielle Lösung der komplexen Gleichung

$$z(t) = \frac{K}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} e^{i\Omega t} = |A| e^{i(\Omega t + \varphi)}.$$
(2.151)

Die physikalische Lösung ist durch den Realteil gegeben,

$$x(t) = \operatorname{Re}z(t) = |A| \cos\left(\Omega t + \varphi\right). \tag{2.152}$$

Aus dem Ausdruck für A folgt für die Amplitude

$$|A| = \frac{K}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$
(2.153)

und für die Phase⁴

$$\tan \varphi = \frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}.$$
(2.154)

Man beachte, dass die Amplitude der speziellen Lösung zeitlich konstant bleibt. Im Gegensatz dazu fällt die allgemeine Lösung (2.131) der homogenen Gleichung exponentiell mit der Zeit ab. Daraus folgt, dass unabhängig von den Anfangsbedingungen nach einer gewissen Einschwingzeit die spezielle Lösung die Bewegung des Oszillators vollständig beschreibt.

Daher wollen wir nun die spezielle Lösung näher diskutieren.

• Die Amplitude |A| der erzwungenen Schwingung wird als Funktion der Frequenz der treibenden Kraft maximal für $\Omega_{max} = [\omega_0^2 - 2\gamma^2]^{1/2}$, da

$$\frac{d}{d\Omega^2} \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow -2(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\gamma^2 = 0 \Rightarrow \Omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2.$$
(2.155)

Man beachte, dass diese *Resonanzfrequenz* sowohl von der Eigenfrequenz ω_0 als auch von Schwingungsfrequenz $\omega = [\omega_0^2 - \gamma^2]^{1/2}$ des freien gedämpften Oszillators abweicht.

⁴Da Re $z = |z| \cos \varphi$ und Im $z = |z| \sin \varphi$, gilt allgemein für die Phase einer komplexen Zahl tan $\varphi = \text{Im}z/\text{Re}z$.

• An der Resonanz ist die maximale Amplitude der erzwungenen Schwingung

$$|A_{max}| = \frac{K}{\left[\left(\omega_0^2 - \Omega_{max}^2\right)^2 + (4\gamma^2 \Omega_{max}^2)\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{K}{\left[4\gamma^4 + 4\gamma^2 \left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{K}{\left[4\gamma^2 \omega_0^2 - 4\gamma^4\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{K}{2\gamma \left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{K}{2\gamma \omega}$$
$$\Rightarrow |A_{max}| = \frac{K}{2\gamma \omega}.$$
(2.156)

Man beachte, dass die Amplitude im Limes verschwindender Reibung ($\gamma \rightarrow 0$) gegen Unendlich geht (divergiert). Dies wird auch als Resonanzkatastrophe bezeichnet. Im Experiment wird diese Divergenz nicht nur durch die Reibung begrenzt, sondern auch dadurch, dass reale Oszillatoren bei genügend großen Auslenkungen nicht mehr linear (harmonisch) sind und dadurch die Schwingungsfrequenz von der Auslenkung abhängt.

Das Phänomen der Resonanzkatastrophe schlägt sich sogar in der Gesetzgebung nieder. So lautet Paragraph 27 Absatz (6) der gültigen Straßeverkehrsordnung: "Auf Brücken darf nicht im Gleichschritt marschiert werden."

• Um die Breite der Resonanzkurve zu bestimmen, schreiben wir $\Omega = \Omega_{max} + \Delta \Omega$ und entwickeln den Ausdruck unter der Wurzel im Nenner von |A|,

$$\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\gamma\Omega\right)^2 \simeq 4\gamma^2\omega^2 + 4\Omega_{max}^2\Delta\Omega^2$$
$$\simeq 4\gamma^2\omega^2 \left[1 + \left(\frac{\Omega_{max}}{\omega}\frac{\Delta\Omega}{\gamma}\right)^2\right].$$
(2.157)

Hieraus folgt

$$|A| = \frac{K}{2\gamma\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_{max}}{\omega} \frac{\Delta\Omega}{\gamma}\right)^2}}.$$
(2.158)



Figure 2.21: Phasenverschiebung der getriebenen Schwingung

Bei schwacher Dämpfung, $\gamma \ll \Omega_{max}$, gilt $\Omega_{max}/\omega \approx 1$, so dass die volle Breite beim halben Maximum (FWHM = '*Full width at half maximum*') gegeben ist durch $2\Delta\Omega$ mit $(\Delta\Omega/\gamma)^2 = 3$, d.h.

$$\Delta\Omega_{\rm FWHM} = 2\sqrt{3\gamma}.\tag{2.159}$$

Wir sehen also, dass die Breite der Resonanzkurve direkt proportional zur Dämpfungsrate γ ist.

• Die Schwingung des Systems ist gegenüber der treibenden Kraft phasenverschoben um

$$\varphi = \arctan \frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \tag{2.160}$$

Bei kleinen Frequenzen Ω folgt der Oszillator der treibenden Kraft ohne Verzögerung, bei großen Frequenzen sind treibende Kraft und Oszillator maximal phasenverschoben. Schließlich wollen wir noch die allgemeine Lösung explizit angeben,

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\gamma\Omega\right)^2}} \cos\left(\Omega t + \varphi\right) + ae^{-\gamma t}\cos\left(\omega_0 t + \tilde{\varphi}\right)$$
(2.161)

Dies zeigt noch einmal, dass wie oben beschrieben nach einem Einschwingvorgang nur die erzwungene Schwingung übrig bleibt. Die Dauer des Einschwingvorgangs wird durch die Stärke der Dämpfung bestimmt, $t \sim 1/\gamma$.

2.3.7 Gekoppelte Schwingungen

Ein weites und wichtiges Feld in der Physik sind gekoppelte Schwingungen. In der Festkörperphysik sind z.B. die Phononen (Gitterschwingungen) das Resultat gekoppelter Oszillatoren. Ebenso stellen (Quanten)feldtheorien Systeme (nichtlinear) gekoppelter Oszillatoren dar. Hier wollen wir aber zunächst nur das einfachste Beispiel von zwei gekoppelten identischen Oszillatoren untersuchen.

Betrachten wir also das System von zwei gekoppelten Oszillatoren in Abb. (2.22). Genauer wollen wir den Fall untersuchen, in dem beide Oszillatoren identisch sind, d.h. wir wählen gleiche Federkonstanten $k_1 = k_2 = k$ und Massen $m_1 = m_2 = m$ und betrachten eine Kopplung $k_{12} = \varepsilon$. In diesem Fall werden die Bewegungsgleichungen der beiden Massen zu

$$m\ddot{y}_{1} = -ky_{1} - \varepsilon(y_{1} - y_{2})$$
(2.162)
$$m\ddot{y}_{2} = -ky_{2} - \varepsilon(y_{2} - y_{1})$$
(2.163)



Figure 2.22: System aus 2 gekoppelten Oszillatoren

wobei y_1 und y_2 die Auslenkungen aus den Ruhepositionen $x_{01/2}$ bezeichnen. Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt hier die Kräfte, die durch die äußeren Federn auf die Massen ausgeübt werden. Die Auslenkung dieser Federn und damit diese Kräfte hängen nur von der Auslenkung der mit der Feder verbundenen Masse ab. Der zweite Term beschreibt die durch die Kopplungsfeder vermittelten Kräfte. Die Auslenkung dieser Feder hängt von den Auslenkungen beider Massen ab, und die auf Masse 1 und 2 wirkenden Kräfte sind im Einklang mit dem 3. Newtonschen Gesetz gerade entgegengesetzt gerichtet. Wir finden also zwei *gekoppelte* Differentialgleichungen für $y_1(t)$ und $y_2(t)$.

Um diese Gleichungen zu lösen, machen wir wieder einen Exponentialansatz

$$y_{1/2} = A_{1/2} e^{i\omega t}, (2.164)$$

wobei beide Oszillatoren mit der gleichen Frequenz ω schwingen. Solange beide Massen mit dergleichen Frequenz schwingen, kürzen sich die entsprechenden oszillierenden Terme nach Einsetzen in die Bewegungsgleichung gerade heraus, so dass sich die Bewegungsgleichung auf einen Satz algebraischer Gleichungen reduziert. Setzen wir diesen Ansatz in die Bewegungsgleichung ein, so erhalten wir in der Tat

$$(k + \varepsilon - m\omega^2)A_1 - \varepsilon A_2 = 0$$

-\varepsilon A_1 + (k + \varepsilon - m\omega^2)A_2 = 0 (2.165)

Benutzen wir die zweite Gleichung, um A_1 aus der ersten Gleichung zu eliminieren, so erhalten wir

$$[(k+\varepsilon - m\omega^2)(k+\varepsilon - m\omega^2) - \varepsilon^2]A_2 = 0.$$
(2.166)

Für eine nicht-triviale Lösung müssen die Massen tatsächlich schwingen, d.h. es muss $A_1, A_2 \neq 0$ gelten. Daher folgt mit

$$(k + \varepsilon - m\omega^2)(k + \varepsilon - m\omega^2) - \varepsilon^2 = 0$$
(2.167)

eine Bedingung für die Frequenz ω. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$\omega^2 = \begin{cases} k/m \\ (k+2\varepsilon)/m \end{cases}$$
(2.168)

bzw.

$$\omega_{+} = \sqrt{(k+2\varepsilon)/m}$$
 $\omega_{-} = \sqrt{k/m}.$ (2.169)

Aus Glg. (2.165) folgt für das Amplitudenverhältnis

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{k + k_{12} - m\omega^2}{\varepsilon}$$
(2.170)

und somit für $\omega = \omega_+$

$$A_2^+ = -A_1^+ \tag{2.171}$$

und für $\omega = \omega_{-}$

$$A_2^- = A_1^-. (2.172)$$

D.h., bei der Frequenz ω_+ schwingen die beiden Pendel um π außer Phase, bei ω_- in Phase. Im zweiten Fall wird die Kopplungsfeder nicht gedehnt, so dass die Schwingungsfrequenz nur durch

die äußeren Federn bestimmt wird. In der Tat ist die Frequenz ω_{-} gerade die Eigenfrequenz zur Federkonstanten *k*.

Diese beiden Lösungen, bei denen die Massen mit der *gleichen* Frequenz schwingen, heißen *Normalmoden* des gekoppelten Oszillators. Wir werden nun zeigen, dass wir aus ihnen die allgemeine Lösung der gekoppelten Pendel konstruieren können. Da wir es mit gekoppelten, aber linearen Bewegungsgleichungen zu tun haben, ist diese allgemeine Lösung einfach eine Linearkombination der beiden Normalmoden,

$$y_{1}(t) = A^{-} \cos(\omega_{-}t + \varphi_{-}) + A^{+} \cos(\omega_{+}t + \varphi_{+})$$

$$y_{2}(t) = A^{-} \cos(\omega_{-}t + \varphi_{-}) - A^{+} \cos(\omega_{+}t + \varphi_{+}).$$
(2.173)

Hier sind wir gleich analog zu den vorigen Abschnitten zur reellen Lösung übergegangen. Betrachten wir den Fall, dass zum Zeitpunkt t = 0 eines der Pendel ausgelenkt wird, d.h. die Anfangsbedingungen

$$y_1(t=0) = A$$

 $y_2(t=0) = 0$ (2.174)

und

$$\dot{y}_1(t=0) = 0$$

 $\dot{y}_2(t=0) = 0,$ (2.175)

so folgt

$$\varphi_{+} = \varphi_{-} = 0 \tag{2.176}$$

$$A_{+} = A_{-} = \frac{A}{2}.$$
 (2.177)

Hiermit erhalten wir

$$y_{1}(t) = \frac{A}{2} \{ \cos(\omega_{-}t) + \cos(\omega_{+}t) \}$$

$$y_{2}(t) = \frac{A}{2} \{ \cos(\omega_{-}t) - \cos(\omega_{+}t) \}.$$
(2.178)

Die bekannte schwebungsartige Bewegung der Pendel ist direkt ersichtlich, wenn man diese Lösung mithilfe der trigonometrischen Identitäten

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$
(2.179)

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2}$$
(2.180)

als

$$y_{1}(t) = A\cos\frac{(\omega_{+} - \omega_{-})t}{2}\cos\frac{(\omega_{+} + \omega_{-})t}{2}$$
$$y_{2}(t) = -A\sin\frac{(\omega_{+} - \omega_{-})t}{2}\sin\frac{(\omega_{+} + \omega_{-})t}{2}.$$
(2.181)

schreibt. Insbsondere gilt für schwach gekoppelte Pendel mit $\varepsilon \ll k$, dass⁵

$$\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \simeq \omega_0 \tag{2.182}$$

$$\frac{\omega_{+} - \omega_{-}}{2} \simeq \omega_{0} \frac{\varepsilon}{2k}$$
(2.183)

⁵Hier benutzen wir die Taylorreihe $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2 + \dots$

wobei $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Damit erhalten wir schließlich

$$y_1(t) = A\cos(\omega_0 \frac{\varepsilon}{2k}t)\cos\omega_0 t$$

$$y_1(t) = -A\sin(\omega_0 \frac{\varepsilon}{2k}t)\sin\omega_0 t.$$
(2.184)

Dies zeigt, dass y_1 und y_2 schwebungsartige Schwingungen vollführen, die um $\pi/2$ außer Phase sind. Die Grundschwingungen finden mit der Frequenz ω_0 statt, wobei die Amplitude mit der Frequenz $\omega_0 \frac{\varepsilon}{2k} \ll \omega_0$ periodisch moduliert wird.



Einige Größen spielen in der Mechanik (und allgemeiner in der Physik) eine herausgehobene Rolle, da sie im Zuge der Bewegung konstant bleiben. Diese so genannten *Erhaltungsgrößen* können vielfach helfen, die Bewegungsgleichungen zu integrieren. So werden wir z.B. in diesem Kapitel lernen, wie man eindimensionale Bewegungen in einem beliebigen Kraftfeld F(x) ganz allgemein berechnen kann. Um insbesondere die Energieerhaltung in höheren Dimensionen zu charakterisieren, müssen wir mit den partiellen Ableitungen, dem Gradienten und den Wegintegralen weitere mathematische Hilfsmittel bereitstellen.

3.1 Eindimensionale Bewegungen

3.1.1 Energieerhaltung für eindimensionale Bewegungen

Die Erhaltungsgrößen und insbesondere die Energieerhaltung haben besonders umfassende Konsequenzen in eindimensionalen Systemen. Wir betrachten daher eine eindimensionale Bewegung in einem beliebigen, zeitunabhängigen Kraftfeld F = F(x), beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = F(x). \tag{3.1}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit der Geschwindigkeit \dot{x} , so erhalten wir

$$m\ddot{x}\dot{x} = F(x)\dot{x}.$$
(3.2)

Führen wir das Potential

$$V(x) = -\int^x dx' F(x')$$
(3.3)

ein, so erhalten wir also

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\frac{d}{dt}V(x).$$
(3.4)

Hieraus folgt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)\right) = 0 \tag{3.5}$$

und somit, dass die Energie

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$
(3.6)

im Zuge der Bewegung konstant bleibt. Die Energie E ist also eine *Erhaltungsgröße*, häufig auch *Konstante der Bewegung* genannt.

Die Energie setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ und der potentielle Energie V(x), auch kurz *Potential* genannt. Man beachte, dass das Potential nur bis auf eine additive Konstante definiert ist, da die untere Grenze im Integral (3.3) beliebig gewählt werden kann. Der absolute Wert der potentiellen Energie hat also keine physikalische Bedeutung, sondern nur Differenzen. Insbesondere hat daher auch die Ableitung der potentiellen Energie V(x) eine physikalische Bedeutung, sie ist nämlich bis auf ein Vorzeichen gerade die Kraft,

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx},\tag{3.7}$$

wie unmittelbar aus Glg. (3.3) ersichtlich ist.

Wir können also in einer Dimension jeder zeitunabhängigen Kraft ein Potential zuordnen, solange diese nur vom Ort und nicht von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängt. Derartige Kräfte heißen *konservativ*. Kräfte, für die die Energieerhaltung nicht gilt, wie z.B. Reibungskräfte werden als *dissipativ* bezeichnet. Wir werden noch sehen, dass in höheren Dimensionen auch Kräfte, die nur vom Ort abhängen, nicht notwendigerweise konservativ sind.

Wir wollen hier einige wichtige Beispiele für das Potential auflisten:

- Homogenes Schwerefeld: Zur Kraft F(z) = -mg erhält man das Potential V(z) = mgz. In diesem Fall haben wir den Nullpunkt der potentiellen Energie bei z = 0 gewählt.
- Hookesches Gesetz: Aus F(x) = -Dx folgt $V(x) = \frac{1}{2}Dx^2$. Wir haben die potentielle Energie so gewählt, dass sie für x = 0 (entspannte Feder) verschwindet.
- Pendel: Aus der potentiellen Energie für das homogene Schwerefeld folgt auch das Potential für das mathematische Pendel. Wenn wir die Ruhelage des Pendels als Nullpunkt der potentiellen Energie wählen und die Höhe der Masse *m* durch den Auslenkwinkel ausdrücken, so erhalten wir $V(\varphi) = mgl(1 \cos \varphi)$.

3.1.2 Allgemeine Lösung eindimensionaler Bewegungen

Wir wollen nun zeigen, dass die Lösung der Bewegungsgleichung für eindimensionale Bewegungen ganz allgemein mit Hilfe der Energieerhaltung auf eine Integration zurückgeführt werden kann. Hierzu löst man den Ausdruck (3.6) für die Gesamtenergie *E* zunächst nach der Geschwindigkeit auf,

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[E - V(x) \right]}.$$
(3.8)

Dies ist offenbar eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Bewegung x(t). Verglichen mit der Newtonschen Bewegungsgleichung haben wir also eine Ordnung eliminiert. Man bezeichnet die Erhaltungsgrößen daher auch manchmal als erste Integrale der Bewegung.

Die Differentialgleichung kann nun unmittelbar mit Hilfe der Trennung der Variablen gelöst werden. Dies führt auf

$$\pm dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}} \tag{3.9}$$



Figure 3.1: Potential eines harmonischen Oszillators. Die Bewegung mit Energie *E* spielt sich zwischen den Umkehrpunkten $\pm x_0$ ab, wobei $E = \frac{1}{2}Dx_0^2$.

in differentieller Form. Nach Integration über das Zeitintervall $[t_0, t]$ erhält man

$$\pm (t - t_0) = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}}.$$
(3.10)

Die explizite Lösung folgt nun, wie für die Trennung der Variablen üblich, in zwei weiteren Schritten:

- (i) Durch Auswertung des Integrals erhält man t = t(x).
- (ii) Hieraus gewinnt man durch Invertieren die gesuchte Lösung x = x(t).

Harmonischer Oszillator

Als erstes wollen wir diese Methode anwenden, um eine weiteres Mal die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators zu lösen. Hierzu setzen wir das zugehörige Potential $V(x) = \frac{1}{2}Dx^2$ in Glg. (3.10) ein und erhalten

$$\pm (t - t_0) = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{1}{2}Dx^2\right)}}.$$
(3.11)

Es ist hilfreich, die Gesamtenergie durch den Umkehrpunkt x_0 der Bewegung des harmonischen Oszillators auszudrücken. Da die kinetische Energie am Umkehrpunkt verschwindet, gilt $E = \frac{1}{2}Dx_0^2$ (vgl. Abb. 3.1). Setzen wir dies ein und führen wir wieder die Eigenfrequenz $\omega_0^2 = D/m$ ein, so erhalten wir

$$\pm \omega_0(t - t_0) = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}.$$
(3.12)

Wählen wir nun $t_0 = 0$ und $x(t_0 = 0) = x_0$, so ist die Geschwindigkeit anfangs negativ. Daher müssen wir in den vorangehenden Gleichungen das negative Vorzeichen wählen. Das Integral ist elementar und wir erhalten

$$-\omega_0 t = \arcsin \frac{x(t)}{x_0} - \underbrace{\arcsin 1}_{=\frac{\pi}{2}}.$$
(3.13)

Auflösen nach x(t) ergibt nun

$$x(t) = x_0 \sin\left(-\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.14}$$

bzw.

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t. \tag{3.15}$$

Dies stimmt natürlich mit unseren vorherigen Lösungen überein.

Pendel

Interessanter ist es natürlich, Probleme zu betrachten, für die die Bewegungsgleichungen auf andere Art nicht einfach zu lösen sind. Ein solches Probem ist das mathematische Pendel, für das wir bereits die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{3.16}$$

gefunden hatten. Diese können wir nun im Prinzip auch mit Hilfe der Energieerhaltung lösen. Mit den Ausdrücken für die kinetische und die potentielle Energie,

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$
 kinetische Energie

$$V = mgl(1 - \cos\varphi)$$
 potentielle Energie, (3.17)

erhalten wir für die Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi).$$
(3.18)

Durch Auflösen nach $\dot{\phi}$ ergibt sich

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2}{ml^2} \left[E - mgl(1 - \cos \varphi) \right]}$$
 (3.19)

Führen wir auch hier die maximale Auslenkung φ_0 über $E = mgl(1 - \cos \varphi_0)$ ein,¹ so wird dies zu

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2}{ml^2} mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} \tag{3.20}$$

und nach Trennung der Variablen zu

$$\pm \omega_0 dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}.$$
(3.21)

Hier ist $\omega_0^2 = g/l$. Wählen wir als Anfangsbedingung $\varphi(t_0 = 0) = \varphi_0$, so erhalten wir

$$-\omega_0 t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}.$$
(3.22)

Hier haben wir bereits das negative Vorzeichen gewählt, da ϕ für diese Wahl anfangs negativ ist. Das negative Vorzeichen können wir absorbieren, indem wir die Integralgrenzen vertauschen,

$$\omega_0 t = \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}.$$
(3.23)


Figure 3.2: Mathematisches Pendel

Damit haben wir die Lösung des Fadenpendels im Prinzip auf eine Integration zurückgeführt. Diese Integration führt auf sogenannte elliptische Integrale, ist aber in allgemeiner Form nicht besonders erhellend.

Der abgeleitete Ausdruck ist trotzdem instruktiv, da wir mit seiner Hilfe unmittelbar eine Formel für die Schwingungsperiode *T* des Pendels angeben können. Hierzu beachten wir, dass die Bewegung von der Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ bis zur maximalen Auslenkung φ_0 gerade einer Viertelperiode entspricht. Damit erhalten wir die Formel

$$\frac{\omega_0 T}{4} = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}},\tag{3.24}$$

die wir nun näher untersuchen wollen. Wir hatten bereits gesehen, dass die Schwingungsperiode des harmonischen Oszillators unabhängig von der Amplitude der Schwingung ist, und erwähnt, dass dies für das Fadenpendel nicht mehr der Fall ist. Andererseits reduziert sich das Fadenpendel im Limes kleiner Auslenkungen auf den harmonischen Oszillators. Es ist daher naheliegend, die Schwingungsperiode zunächst im Limes kleiner Auslenkungen zu betrachten.²

In der vorliegenden Form ist der Ausdruck für *T* noch nicht besonders geeignet, um ihn für kleine Auslenkungen $\varphi_0 \ll 1$ zu untersuchen, da φ_0 sowohl im Integranden als auch in den Integrationsgrenzen auftritt. Daher transformieren wir das Integral zunächst wie folgt. Die trigonometrische Identität $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ führt auf

$$\frac{\omega_0 T}{2} = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$
(3.25)

Hier können wir nun

$$\sin\xi = \frac{\sin\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\phi_0}{2}} \tag{3.26}$$

¹Wir nehmen hier an, dass das Pendel Oszillationen und keine Rotationen ausführt.

²Auch der Ausdruck für die Schwingungsperiode T lässt sich im Prinzip exakt mit Hilfe elliptischer Integrale berechnen. Allerdings ist auch dieser Ausdruck nicht weiter erhellend und es ist instruktiver, den Ausdruck für die Schwingungsdauer in verschiedenen Limites zu untersuchen.

substituieren. Beachten wir

$$\cos\xi d\xi = \frac{1}{2} \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} d\varphi, \tag{3.27}$$

so ergibt sich

$$d\varphi = 2\sin\frac{\varphi_0}{2}\frac{\cos\xi}{\cos(\varphi/2)}d\xi$$

= $2\sin\frac{\varphi_0}{2}\frac{\cos\xi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}d\xi$
= $2\sin\frac{\varphi_0}{2}\frac{\cos\xi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi}}d\xi.$ (3.28)

Durch Einsetzen ins Integral erhält man

$$\frac{\omega_0 T}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\xi \, 2\sin\frac{\varphi_0}{2} \frac{\cos\xi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi}} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{1 - \sin^2\xi}}$$
(3.29)

und durch Kürzen letztlich

$$\omega_0 T = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\xi \, \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \xi}}.$$
(3.30)

In diesem Ausdruck taucht der maximale Auslenkwinkel φ_0 nur noch im Integranden und nicht mehr in den Integrationsgrenzen auf. Entsprechend können wir nun den Limes kleiner Auslenkungen durchführen.

Hierzu entwickeln wir den Integranden in eine Taylorreihe bis zur quadratischen Ordnung in φ_0 . Zu dieser Ordnung finden wir sin $\varphi_0/2 \simeq \varphi_0/2$ und somit für den Integranden³

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi}} \simeq \frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi}$$
$$\simeq 1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi+\dots$$
$$\simeq 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^2\sin^2\xi+\dots$$
$$\simeq 1+\frac{\varphi_0^2}{8}\sin^2\xi+\dots$$
(3.31)

Einsetzen dieser Näherung in Glg. (3.30) für die Schwingungsdauer T ergibt⁴

$$T \simeq \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\xi \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{8} \sin^2 \xi + \dots \right)$$

= $\frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + \dots \right).$ (3.32)

³Hier benutzen wir die folgenden, häufig auftretenden Taylorreihen für kleine |x|: $1/(1-x) \approx 1 + x + x^2 + ...$ sowie $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 ...$

⁴Hier haben wir das Integral $\int_0^{\pi/2} d\xi \sin^2 \xi = \pi/4$ benutzt. Dieses Integral kann man natürlich leicht ausrechnen. Alternativ kann man sich merken, dass der Mittelwert über eine Periode von $\langle (\cos^2 \xi + \sin^2 \xi) \rangle = 1$, einfach aufgrund der Identität $\cos^2 \xi + \sin^2 \xi = 1$. Der Mittelwert über eine Periode ist hier einfach als $\langle \ldots \rangle = \int_0^{2\pi} (d\xi/2\pi) \ldots$ definiert. Wir finden also $\langle \cos^2 \xi \rangle + \langle \sin^2 \xi \rangle = 1$. Da nun offensichtlich $\langle \cos^2 \xi \rangle = \langle \sin^2 \xi \rangle$ gilt, finden wir $\langle \cos^2 \xi \rangle = \langle \sin^2 \xi \rangle = 1/2$. Somit können wir das Integral $\int_0^{\pi/2} d\xi \sin^2 \xi$ einfach als Produkt der Mittelwerts mit der Größe des Integrationsintervalls berechnen. Wie zu erwarten war, ist der führende Term gerade die Periode des harmonischen Oszillators, auf den sich das Pendel im Limes kleiner Auslenkungen reduziert. Nun können wir aber auch einen weiteren Term angeben, der die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude für kleine Auslenkungen quantifiziert. Wir sehen, dass die Schwingungsdauer des Pendels (im Gegensatz zum harmonischen Oszillator) von der Schwingungsamplitude abhängt. Allerdings bleibt diese Korrektur aufgrund des numerisch kleinen Vorfaktors 1/16 sogar für recht große Amplituden numerisch klein.

Trotzdem weicht die Schwingungsperiode natürlich für große Auslenkungen signifikant von $2\pi/\omega_0$ an. Das wird besonders deutlich, wenn man die Schwingungsperiode für Amplituden nahe dem Überschlag betrachtet, d.h. $\varphi_0 = \pi - \varepsilon$ mit einem kleinen positiven ε . Da ε klein ist, können wir

$$\sin\frac{\varphi_0}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \cos\frac{\varepsilon}{2} \simeq 1 - \frac{\varepsilon^2}{8}$$
(3.33)

nähern. Ferner führen wir im Integralausdruck für die Schwingungsdauer die Substitution $\alpha = \frac{\pi}{2} - \xi$ durch, so dass $\cos^2 \alpha = \sin^2 \xi$. Wir erhalten damit für kleine ε

$$\omega_0 T \approx 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)\cos^2\alpha}}$$
$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{\varepsilon}{4}\cos^2\alpha}}$$
(3.34)

Für $\varepsilon \to 0$ divergiert dieses Integral logarithmisch an der unteren Grenze. Bis auf eine Konstante erhalten wir daher das Ergebnis

$$T \simeq \frac{4}{\omega_0} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \text{konst.}, \tag{3.35}$$

d.h. die Schwingungsperiode geht gegen Unendlich, wenn wir dem Überschlag immer näher kommen.

3.2 Partielle Ableitungen und der Gradient

Um den Energieerhaltungssatz auch in höheren Dimensionen abzuleiten, müssen wir zunächst eine Reihe von wichtigen mathematischen Konzepten einführen. Insbesondere müssen wir Ableitungen für Funktionen mehrerer Veränderlicher einführen, was uns auf den Begriff der partiellen Ableitung führt. Ferner werden wir den Gradienten kennenlernen.

3.2.1 Partielle Ableitungen

Beschreiben wir physikalische Systeme im Raum, so treten häufig Funktionen mehrerer Veränderlicher auf. Denn viele physikalische Größen sind räumlich veränderlich und hängen demnach von den drei Raumkoordinaten ab. Beispiele sind die Temperaturverteilung in einem Raum,

$$T(\mathbf{r}) = T(x, y, z), \tag{3.36}$$

die Dichteverteilung eines Körpers,

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\rho}(x, y, z) \tag{3.37}$$



Figure 3.3: Darstellung der Funktion $f(x,y) = \sin(x^2 + y)$ von zwei Variablen

oder eben die potentielle Energie eines Körpers im Raum,

$$V(\mathbf{r}) = V(x, y, z). \tag{3.38}$$

Wir wollen nun zunächst fragen, ob wir für solche Funktionen mehrerer Veränderlicher auch Ableitungen definieren können.

Der Einfachheit halber wollen wir zunächst eine Funktion f(x,y) zweier Veränderlicher betrachten. Anschaulich können wir uns diese Funktion als Gebirgslandschaft vorstellen, wobei (x,y) den Ort auf der Erde angibt und f(x,y) die Höhe des Gebirges an diesem Ort. Dann ist es naheliegend, dass die Ableitung mit der Steigung dieser Gebirgslandschaft zu tun hat. Allerdings stellt sich sofort das Problem, dass es an jedem Ort im Allgemeinen unendlich viele Steigungen gibt, da wir die Steigung in jede beliebige Richtung betrachten können. Wir können beispielsweise entlang der Höhenlinien gehen. In diesem Fall verschwindet die Steigung. Oder wir gehen in Richtung der größten Steigung, von der wir sehen werden, dass sie ganz allgemein senkrecht auf den Höhenlinien steht.

Vorläufig werden wir dieses Problem einfach umgehen, indem wir nur die Steigungen (sprich: Ableitungen) parallel zu vorgegebenen, kartesischen Koordinatenlinien betrachten. Wir werden später sehen, wie wir mit Hilfe dieser Steigungen auch alle anderen Steigungen in beliebige Richtungen berechnen können. Setzen wir also $y = y_0$ fest und betrachten wir $f(x, y_0)$ nur als Funktion von x. Nun können wir die Steigung bei (x_0, y_0) entlang der x-Achse wie für Funktionen einer Veränderlicher berechnen über

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$
(3.39)

Wir definieren nun diese Steigung und die entsprechende Steigung entlang der y-Achse als *partielle* Ableitungen der Funktion f(x, y). Man schreibt

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$
(3.40)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$
(3.41)

Berechnet werden partielle Ableitungen genau wie gewöhnliche Ableitungen, wobei man die Veränderlichen, nach denen nicht abgeleitet wird, einfach als feste Parameter betrachtet. Dies wird durch die Beispiele

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \tag{3.42}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \tag{3.43}$$

sowie

$$f(x,y) = xy^2 \tag{3.44}$$

mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \tag{3.45}$$

illustriert.

Ebenso wie für die gewöhnliche Ableitung können Funktionen auch mehrfach partiell abgeleitet werden, z.B. $\partial^2 f / \partial x^2$. Man kann sich davon überzeugen, dass es bei gemischten Ableitungen nicht auf die Reihenfolge der partiellen Ableitungen ankommt, d.h. es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$
(3.46)

3.2.2 Taylor-Reihe einer Funktion mehrerer Veränderlicher

Wir wollen nun das Konzept der Taylor-Reihe auf Funktionen mehrerer Veränderlicher ausdehnen. Wir werde sehen, dass die Taylor-Reihe zwar nur die partiellen Ableitungen enthält, sie es uns aber letztlich erlauben wird, die Steigungen der Funktion in beliebige Richtungen zu berechnen.

Analog zur Diskussion der Taylor-Reihe für Funktionen einer Variablen wollen wir also untersuchen, wie die Funktion in der Nähe eines Punktes (x_0, y_0) durch ein Polynom in *x* und *y* angenähert werden kann. Für eine Variable nimmt die Taylor-Reihe bekanntlich die Form

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$
(3.47)

an. Die Taylor-Reihe für Funktionen mehrerer Veränderlicher folgt nun einfach, indem wir diese Formel mehrfach anwenden.

Um f(x, y) in der Nähe von (x_0, y_0) zu untersuchen, betrachten wir $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ und halten in einem ersten Schritt $y_0 + \Delta y$ fest. Nun können wir die Taylor-Reihe (3.47) für Funktionen einer Veränderlichen anwenden, um $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ nach Δx zu entwickeln. Beschränken wir uns auf die quadratische Ordnung in Δx , so erhalten wir

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0 + \Delta y) + \frac{\partial f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\partial x^2} \Delta x^2 + \dots$$
(3.48)

Nun können wir in einem zweiten Schritt auch die Koeffizienten nach Potenzen von Δy entwickeln, wobei wir x_0 als fest betrachten. Wenn wir uns insgesamt auf Terme bis zur quadratischen Ordnung

beschränken, so benötigen wir die Taylor-Entwicklungen

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 + \dots$$
$$\frac{\partial f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right) \Delta y + \dots$$
$$= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta y + \dots$$
$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \dots$$
(3.49)

Hier müssen wir z.B. den Term $\frac{\partial f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\partial x}$ nur bis zur linearen Ordnung in Δy entwickeln, da er ohnehin schon mit Δx multipliziert wird.

Einsetzen dieser Entwicklungen in Δy ergibt nun die Taylor-Reihe für Funktionen mehrerer Veränderlicher,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y\right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2\right] + \dots$$
(3.50)

Mit etwas zusätzlichem Aufwand kann man natürlich auch Terme höherer Ordnung berechnen.

3.2.3 Der Gradient

Die Taylor-Reihe für Funktionen mehrerer Veränderlicher legt die Definition des Gradienten einer solchen Funktion nahe. Hierzu verallgemeinern wir die Taylor-Reihe auf Funktionen von drei Raumkoordinaten und betrachten nur Terme linearer Ordnung,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \Delta z + \dots$$
(3.51)

Die linearen Terme erinnern strukturell stark an ein Skalarprodukt zwischen dem Vektor $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ und dem Vektor der partiellen Ableitungen

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$
(3.52)

Mit Hilfe dieses Vektors können wir die Taylor-Reihe bis zur linearen Ordnung nun auch auf die kompakte Weise

$$f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r} + \dots$$
(3.53)

schreiben.

Den Vektor $\nabla f(\mathbf{r})$ nennt man den Gradienten der Funktion $f(\mathbf{r})$. Er wird heute zumeist mit Hilfe des so genannten Nabla-Operators

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{3.54}$$

geschrieben. Es finden sich aber verschiedentlich als alternative Schreibweisen $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$ sowie grad f.

Mit Hilfe des Gradienten können wir nun die am Anfang dieses Abschnitts gestellte Frage nach der Steigung von Funktionen mehrerer Veränderlicher beantworten. Die Steigung der Funktion $f(\mathbf{r})$ entlang einer beliebigen Richtung, charakterisiert durch den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{n}}$ (d.h. $\hat{\mathbf{n}}^2 = 1$), nennt man Richtungsableitung von $f(\mathbf{r})$. Diese Richtungsableitung kann ganz analog zu gewöhnlichen und partiellen Ableitungen definiert werden über

Steigung von
$$f(\mathbf{r})$$
 entlang $\hat{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(\mathbf{r} + \Delta s \hat{\mathbf{n}}) - f(\mathbf{r})}{\Delta s}$. (3.55)

Ersetzen wir nun den Zähler des Differenzenquotienten mit Hilfe der Taylor-Reihe, wobei es aufgrund des Grenzübergangs ausreicht, nur die lineare Ordnung zu betrachten, so erhalten wir

Steigung von
$$f(\mathbf{r})$$
 entlang $\hat{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\nabla f(\mathbf{r}) \cdot \Delta s \hat{\mathbf{n}}}{\Delta s} = \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$
= $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla f(\mathbf{r})$. (3.56)

Wir sehen also, dass die Richtungsableitung einfach durch das Skalarprodukt des Gradienten mit dem Einheitsvektor der interessierenden Richtung gegeben ist.

Mit Hilfe der Richtungsableitung können wir nun die geometrische Bedeutung des Gradienten besser verstehen. Da der Gradient ein Vektor ist, möchten wir gerne sowohl seinen Betrag als auch seine Richtung geometrisch interpretieren. Aus dem Ausdruck für die Richtungsableitung folgt mit Hilfe der koordinatenfreien Definition des Skalarprodukts

$$|\nabla f \cdot \hat{\mathbf{n}}| = |\nabla f| |\cos\left(\measuredangle(\nabla f, \hat{\mathbf{n}})\right)|. \tag{3.57}$$

Betrachten wir nun die Richtungsableitungen an einem Raumpunkt als Funktion der Richtung $\hat{\mathbf{n}}$, so wird diese maximal für $\hat{\mathbf{n}} \parallel \nabla f$, wo der Kosinus dem Betrag nach maximal wird und den Wert 1 annimmt. Wir sehen also, dass der Betrag des Gradienten $|\nabla f(\mathbf{r})|$ gerade die maximale Steigung der Funktion $f(\mathbf{r})$ am Ort \mathbf{r} angibt und dass der Gradient in Richtung dieser maximalen Steigung zeigt.

Diese Überlegung genügt noch nicht, um zu entscheiden, ob der Gradient in Richtung des maximalen Anstiegs oder Abfalls zeigt. Hierzu betrachten wir eine kleine Verschiebung $\Delta \mathbf{r}$ in Richtung des maximalen Anstiegs, d.h. $f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) > 0$. Dann folgt aus der Taylor-Reihe zu linearer Ordnung

$$f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \simeq \nabla f \cdot \Delta \mathbf{r} > 0, \tag{3.58}$$

so dass $\nabla f(\mathbf{r})$ parallel (und nicht antiparallel) zu $\Delta \mathbf{r}$ steht und somit in Richtung des maximalen Anstiegs der Funktion $f(\mathbf{r})$ am Ort \mathbf{r} zeigt.

Wir können schließlich zeigen, dass die Höhenlinien der Funktion $f(\mathbf{r})$, d.h. die Linien im Raum, entlang derer die Funktion unverändert bleibt, überall senkrecht auf ∇f stehen. Denn bezeichnen wir die Richtung der Höhenlinie am Ort \mathbf{r} mit $\hat{\mathbf{n}}_{\perp}$, so gilt

$$\nabla f \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\perp} = |\nabla f| \cos\left(\measuredangle (\nabla f, \hat{\mathbf{n}}_{\perp})\right) = 0 \tag{3.59}$$

und damit folgt $\nabla f \perp \hat{\mathbf{n}}_{\perp}$.

Zusammenfassend finden wir, dass der Vektor ∇f in Richtung des maximalen Anstiegs der Funktion $f(\mathbf{r})$ zeigt, senkrecht auf den Höhenlinien der Funktion steht und dem Betrag nach gleich der maximalen Steigung ist.

3.2.4 Der Gradient in nicht-kartesischen Koordinaten

Für Funktionen $f(\mathbf{r})$ von Raumpunkten \mathbf{r} können wir die Raumpunkte nicht nur in kartesischen Koordinaten, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ angeben, sondern auch in nicht-kartesischen Koordinatensystemen (z.B. Polar-, Zylinder- oder Kugelkoordinaten). Wir zeigen nun am Beispiel der Polarkoordinaten, wie der Gradient in solchen Fällen berechnet werden kann. Für Zylinder- und Kugelkoordinaten geben wir nur das Ergebnis an, die Ableitung in Analogie zu den Polarkoordinaten ist eine Übungsaufgabe.

Geben wir die Punkte **r** und **r** + d**r** in der Ebene durch ihre Polarkoordinaten (r, φ) sowie $(r+dr, \varphi+d\varphi)$ an, so ist nach Glg. (1.56) d**r** = dr $\hat{\mathbf{e}}_r + rd\varphi \hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$. Somit finden wir einerseits

$$f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \simeq \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

= $\nabla f \cdot (d\mathbf{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r d\varphi \hat{\mathbf{e}}_{\varphi}),$ (3.60)

andererseits

$$f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = f(r + dr, \varphi + d\varphi) - f(r, \varphi)$$

= $\frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi.$ (3.61)

Durch Vergleich der Glg. (3.60) and (3.61) folgt nun unmittelbar

$$\nabla f \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial f}{\partial r}$$

$$r \nabla f \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$
(3.62)

Somit erhalten wir schließlich

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_{\varphi}.$$
(3.63)

Analog findet man für Zylinderkoordinaten

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z$$
(3.64)

sowie für Kugelkoordinaten

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_{\varphi}.$$
(3.65)

3.3 Energieerhaltungssatz

Nach diesen mathematischen Einschüben können wir zum Energieerhaltungssatz zurückkehren. Wir wollen nun Bewegungen eines Teilchens im Raum betrachten, das sich in einem Kraftfeld $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ bewegt. Um den Energieerhaltungssatz abzuleiten, gehen wir ebenso wie in einer Dimension von der Newtonschen Bewegungsgleichung für die Trajektorie aus und multiplizieren diese skalar mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$,

$$m\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{r}} \tag{3.66}$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann wieder als Zeitableitung der kinetischen Energie $T = (1/2)m\dot{\mathbf{r}}^2$ geschrieben werden. Somit erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2\right) = \mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{r}}.$$
(3.67)

80



Figure 3.4: Wegintegral

Integrieren wir beide Seiten über die Zeit von einem Anfangszeitpunkt t_i bis zu einem Endzeitpunkt t_f , so erhalten wir

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2\Big|_{t_i}^{t_f} = \int_{t_i}^{t_f} dt\,\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{r}}$$
(3.68)

bzw.

$$T_f - T_i = \int_{t_i}^{t_f} dt \, \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$
(3.69)

Um die rechte Seite dieser Gleichung besser zu verstehen, schreiben wir explizit die Riemann-Summe für das Integral aus,

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \, \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{j=0}^N (t_{j+1} - t_j) \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_j)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t_j).$$
(3.70)

Hier haben wir das Zeitintervall $[t_i, t_f]$ in N + 1 Intervalle geteilt und $t_i = t_0$ sowie $t_f = t_{N+1}$ definiert. Im Grenzfall des Integrals werden diese Intervalle beliebig klein, so dass wir $\dot{\mathbf{r}}(t_j)(t_{j+1} - t_j)$ als den vom Teilchen im Zeitintervall $[t_j, t_{j+1}]$ zurückgelegten Weg $\Delta \mathbf{r}_j$ interpretieren können. Geometrisch sind die $\Delta \mathbf{r}_j$ Sekanten an die Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ des Teilchens, die mit zunehmender Anzahl N der Zeitintervalle eine immer bessere Näherung an die Trajektorie des Teilchens darstellen. Dies ist in Abb. 3.4 dargestellt.

Somit erhalten wir mit $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i)$

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \, \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta \mathbf{r} \to 0} \sum_{j=0}^{N} \mathbf{F}(\mathbf{r}_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j.$$
(3.71)

Interessanterweise hängt die rechte Seite nur noch von der Bahnkurve ab, aber nicht mehr von der Art und Weise, wie die Bahnkurve als Funktion der Zeit durchlaufen wird. Die rechte Seite definiert daher ein sogenanntes Wegintegral,

$$\int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta \mathbf{r} \to 0} \sum_{j=0}^{N} \mathbf{F}(\mathbf{r}_{j}) \cdot \Delta \mathbf{r}_{j}, \qquad (3.72)$$

wobei wir die Bahnkurve von *i* nach *f* mit γ bezeichnet haben. Diese Schreibweise als Wegintegral betont die Tatsache, dass das Integral nur von der Bahnkurve (Weg) abhängt. Diese Schreibweise ist auch direkt vom ursprünglichen Integral über die Zeit in Glg. (3.70) her verständlich, wenn wir die Geschwindigkeit als $d\mathbf{r}/dt$ schreiben,

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \, \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}). \tag{3.73}$$

Wir sehen, dass wir formal dt aus dem Integralausdruck "gekürzt" haben.

Mit dieser Schreibweise erhalten wir nun

$$T_f - T_i = \int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}). \tag{3.74}$$

Diese Gleichung hat eine klare physikalische Interpretation: $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist die infinitesimale, durch die Kraft **F** bei der Verschiebung $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ am Teilchen geleistete Arbeit. Das Wegintegral $\int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist somit die gesamte, entlang der Trajektorie am Teilchen geleistete Arbeit. Glg. (3.74) ist also der Energieerhaltungssatz: Die Änderung der kinetischen Energie des Teilchens ist gleich der am Teilchen entlang der Trajektorie verrichteten Arbeit.

3.4 Der Energieerhaltungssatz für konservative Kraftfelder

In einer Dimension konnten wir für beliebige, zeitunabhängige Kraftfelder ein Potential

$$V(x) = -\int^{x} dx' F(x')$$
(3.75)

definieren. In höheren Dimensionen ist dies im Allgemeinen nicht möglich, da das Integral $\int^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot F(\mathbf{r}')$ nicht nur vom Endpunkt **r** des Integrationsweges abhängt, sondern vom gesamten Weg. Damit definiert das Integral keine eindeutige Funktion von **r**. Man definiert nun allgemein *konservative* Kraftfelder **F**(**r**) genau darüber, dass für diese das Wegintegral

$$\int_{1}^{2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{3.76}$$

unabhängig vom Integrationsweg ist und nur von den Endpunkten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 abhängt. Konservative Kräfte spielen in der Mechanik (und der Natur) eine zentrale Rolle. Tatsächlich sind alle fundamentalen Kräfte wie die Gravitationskraft oder die Coulombkraft konservativ.

Für konservative Kräfte können wir nun auch in höheren Dimensionen ein Potential

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}'), \qquad (3.77)$$

definieren, wobei **a** ein beliebiger Referenzpunkt ist. Da **F** nach Annahme konservativ ist, kann das Integral im Prinzip entlang eines beliebigen Integrationswegs ausgewertet werden und wir brauchen diesen Weg zur Definition des Integrals nicht weiter zu spezifizieren. Das Potential $V(\mathbf{r})$ ist wieder eine bis auf eine additive Konstante (wegen der beliebigen Wahl von **a**) eindeutig definierte Funktion.

Betrachten wir nun den Energieerhaltungssatz für konservative Kraftfelder, so können wir die rechte Seite von Glg. (3.74) für eine Trajektorie γ von \mathbf{r}_i nach \mathbf{r}_f folgendermaßen vereinfachen. Da das Wegintegral nach Annahme nicht vom Integrationsweg abhängt, können wir den Integrationsweg von \mathbf{r}_i nach \mathbf{r}_f beliebig wählen. Insbesondere können wir eine Trajektorie wählen, die zunächst von \mathbf{r}_i zum Referenzpunkt **a** verläuft und dann von **a** nach \mathbf{r}_f weitergeht. Dann erhalten wir

$$\int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{a}}^{2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \int_{1}^{\mathbf{a}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$$
$$= \int_{\mathbf{a}}^{2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) - \int_{\mathbf{a}}^{1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$$
$$= -(V_{2} - V_{1})$$
(3.78)

Für konservative Kräfte nimmt der Energieerhaltungssatz in Glg. (3.74) also die Form

$$T_2 - T_1 = -(V_2 - V_1) \tag{3.79}$$

bzw.

$$E = T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = \text{konst.}$$
(3.80)

an, wobei E wieder die erhaltene Gesamtenergie bezeichnet.

Wir wollen nun konservative Kraftfelder noch ein wenig genauer diskutieren und eine Reihe äquivalenter (und nützlicher) Definitionen angeben:

• Eine Kraft heißt genau dann konservativ, wenn das Wegintegral für *alle* geschlossenen Wege verschwindet,

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0. \tag{3.81}$$

Wegintegrale über geschlossene Wege werden häufig durch das Symbol ∮ angedeutet.

• Eine Kraft heißt genau dann konservativ, wenn ein Potential $V(\mathbf{r})$ existiert, so dass

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \tag{3.82}$$

Wir müssen nun zeigen, dass diese Definitionen tatsächlich zu der ursprünglichen Definition äquivalent sind. Für die erste der beiden ist der Beweis recht elementar und wird daher in die Übungsaufgaben verwiesen. Genauer wollen wir hier die Äquivalenz für die zweite Definition diskutieren.

Zunächst wollen wir annehmen, dass das Wegintegral über das Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ wegunabhängig ist und wollen darauf schließen, dass dann ein Potential existiert, so dass $\mathbf{F} = -\nabla V$. Diesen Beweis können wir konstruktiv führen, indem wir das Potential explizit angeben, $V(\mathbf{r}) = -\int^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')$. Wie diskutiert folgt aus der Wegunabhängigkeit, dass dieses Wegintegral eine eindeutige Funktion des Endpunkts \mathbf{r} definiert. Dann gilt:

$$-\nabla V \cdot d\mathbf{r} = -[V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - V(\mathbf{r})]$$

= $\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + d\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') - \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')$
= $\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + d\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')$
= $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ (3.83)

(Genau genommen sind hier die Gleichheitszeichen als Gleichheit der linearen Terme in $d\mathbf{r}$ zu lesen.) Es folgt also

$$F(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}),\tag{3.84}$$

d.h. die Existenz eines Potentials.

Nun müssen wir noch zeigen, dass aus der Existenz des Potentials die Wegunabhängigkeit folgt. Hierzu berechnen wir

$$\int_{i}^{f} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\int_{i}^{f} d\mathbf{r} \cdot \nabla V(\mathbf{r})$$

$$= -\lim \sum_{j=1}^{N} \nabla V(\mathbf{r}_{j}) \cdot d\mathbf{r}_{j}$$

$$= -\lim \sum_{j=1}^{N} [V(\mathbf{r}_{j} + d\mathbf{r}_{j}) - V(\mathbf{r}_{j})]$$

$$= -\lim \sum_{j=1}^{N} [V(\mathbf{r}_{j+1}) - V(\mathbf{r}_{j})]$$

$$= -\lim [V_{N+1} - V_{1}]$$

$$= -[V_{f} - V_{i}].$$
(3.85)

Die letzte Zeile offenbart, dass das Wegintegral über das Kraftfeld tatsächlich wegunabhängig ist und nur von den Endpunkten abhängt. Damit haben wir den Beweis der Äquivalenz abgeschlossen.

Die letzte Berechnung zeigt noch eine wichtige, allgemein gültige Tatsache für das Wegintegral über einen Gradienten, nämlich

$$\int_{i}^{f} d\mathbf{r} \cdot \nabla V(\mathbf{r}) = V_{f} - V_{i}.$$
(3.86)

Dies ist ganz analog zum bekannten Hauptsatz der Diffential- und Integralrechnung, $\int_{x_1}^{x_2} dx$ $(df/dx) = f(x_2) - f(x_1)$.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einigen Beispielen. Die Gravitationskraft folgt aus dem Potential

$$V(\mathbf{r}) = -G\frac{mM}{r},\tag{3.87}$$

denn mit Hilfe des Gradienten in Kugelkoordinaten in Glg. (3.65) finden wir für die zugehörige Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{\hat{e}}_r = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{\hat{e}}_r$$
(3.88)

Damit folgt auch, dass die Gravitationskraft tatsächlich konservativ ist.

Allgemeiner gilt für beliebige Zentralkräfte $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{\hat{e}}_r$, dass

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r \tag{3.89}$$

mit $V(r) = -\int^r dr f(r)$. Zentralkräfte sind also immer konservativ.

3.5 Impuls- und Drehimpulserhaltung

3.5.1 Ein Teilchen in einem Kraftfeld

Wir wollen nun noch kurz die Impuls- und Drehimpulserhaltung diskutieren. Die Impulserhaltung für die Bewegung eines Teilchens folgt unmittelbar aus der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}.\tag{3.90}$$

Wirkt nämlich auf ein Teilchen keine Kraft, so ist $\dot{\mathbf{p}} = 0$ und der Impuls \mathbf{p} bleibt erhalten.

Für die Zeitableitung des Drehimpulses $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ eines Teilchens erhalten wir mit Hilfe der Newtonschen Bewegungsgleichung sowie der Tatsache $\dot{\mathbf{r}} \parallel \mathbf{p}$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}
= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}
= \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$
(3.91)

Definieren wir das am Teilchen angreifende Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, so erhalten wir

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}.\tag{3.92}$$

Diese wichtige Gleichung sollte mit der Newtonschen Bewegungsgleichung verglichen werden. Aus ihr folgt unmittelbar der Drehimpulserhaltungssatz: Wirkt auf ein Teilchen kein Drehmoment, so bleibt der Drehimpuls erhalten, $\dot{\mathbf{L}} = 0$.

Speziell gilt für alle Zentralkräfte

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times f(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_r = 0. \tag{3.93}$$

Daher ist der Drehimpuls für beliebige Zentralkräfte eine Erhaltungsgröße.

3.5.2 Impulserhaltung in Systemen wechselwirkender Teilchen

Nachdem wir im vorigen Abschnitt nur ein Teilchen betrachtet haben, wollen wir nun ein System von *N* Teilchen diskutieren, die Kräfte aufeinander ausüben können. Man spricht davon, dass diese Teilchen wechselwirken. Da die Impulserhaltung z.B. gerade bei Stößen von Teilchen angewendet wird, ist dies natürlich eine wichtige Erweiterung.

Wir betrachten also N wechselwirkende Teilchen. Auf das i-te Teilchen wirkt die Kraft

$$\mathbf{F}_{i} = \mathbf{F}_{i}^{(a)} + \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{ji}.$$
(3.94)

Hier bezeichnet $\mathbf{F}_{i}^{(a)}$ die äußere Kraft, z.B. aufgrund eines Gravitationsfeldes, das an allen Teilchen angreift. \mathbf{F}_{ji} bezeichnet die vom *j*-ten auf das *i*-te Teilchen ausgeübte Kraft. In der Summe in Glg. (3.94) ist der Term i = j ausgespart, da ein Teilchen keine Kraft auf sich selbst ausüben kann (keine Selbstwechselwirkung). Definieren wir daher der Einfachheit halber $\mathbf{F}_{ii} = 0$, so können wir die Newtonschen Bewegungsgleichungen für Teilchen i = 1, ..., N schreiben als

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \sum_j \mathbf{F}_{ij}.$$
(3.95)

Offensichtlich ist der Impuls jedes einzelnen Teilchens nicht mehr erhalten.

Betrachten wir aber den Gesamtimpuls $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$ des Systems, so finden wir unter Benutzung der Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i} \dot{\mathbf{p}}_{i}$$

$$= \sum_{i} \mathbf{F}_{i}^{(a)} + \sum_{i} \sum_{j} \mathbf{F}_{ji}$$

$$= \sum_{i} \mathbf{F}_{i}^{(a)} + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j} (\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij})$$
(3.96)

In der letzten Zeile haben wir benutzt, dass wir die Summationsindizes *i* und *j* umbenennen können, ohne die Summe zu ändern. Nun gilt für die Kräfte natürlich das 3. Newtonschen Gesetz $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$. Somit erhalten wir

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i} \mathbf{F}_{i}^{(a)},\tag{3.97}$$

d.h. der Gesamtimpuls des Systems bleibt durch die Wechselwirkungen unbeeinflusst und ist eine Erhaltungsgröße, wenn die totale, am System angreifende äußere Kraft verschwindet.

Wir können aus dieser Rechnung auch noch Aussagen über den Schwerpunkt des *N*-Teilchen-Systems extrahieren. Der Schwerpunkt ist durch

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i} m_i \mathbf{r}_i \tag{3.98}$$

definiert, wobei $M = \sum_i m_i$ die Gesamtmasse des Systems ist. Somit folgt

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_{i} m_{i} \ddot{\mathbf{r}}_{i} = \sum_{i} \mathbf{F}_{i}^{(a)} + \sum_{ij} \mathbf{F}_{ji} = \sum_{i} \mathbf{F}_{i}^{(a)} = \mathbf{F}^{(a)}$$
(3.99)

Wir schließen also, dass sich der Schwerpunkt so bewegt, als ob die totale äußere Kraft $\mathbf{F}^{(a)}$ an der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse *M* des Systems angreift.



Teil II – Anwendungen

4 Zentralkräfte und Planetenbewegung . 89

- 4.1 Die Keplerschen Gesetze
- 4.2 Drehimpulserhaltung und ebene Polarkoordinaten
- 4.3 Elementare Geometrie der Ellipse
- 4.4 Berechnung der Bahnkurve
- 4.5 Energie des Planeten
- 4.6 3. Keplersches Gesetz
- 4.7 Lenzscher Vektor
- 4.8 Offene Bahnen und Rutherford-Streuung
- 4.9 Wirkungsquerschnitt

5 Starre Körper 107

- 5.1 Modell des starren Körpers
- 5.2 Schwerpunkt kontinuierlicher Masseverteilungen
- 5.3 Berechnung von Volumenintegralen
- 5.4 Das physikalische Pendel
- 5.5 Trägheitsmomente und Steinerscher Satz
- 5.6 Bewegungsgleichungen
- 5.7 Trägheitstensor

4. Zentralkräfte und Planetenbewegung

4.1 Die Keplerschen Gesetze

Der größte Triumph Newtons war die Ableitung der Planetenbewegungen aus dem Gravitationsgesetz

$$\mathbf{F}_G = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r.$$
(4.1)

Damit konnte er die von Johannes Kepler (1571-1630) zuvor aufgestellten Gesetze, die wiederum auf den Beobachtungen von Tycho Brahe (1546-1601) beruhten, im Rahmen der Mechanik erklären. Die drei Keplerschen Gesetze der Planetenbewegungen lauten:

- (1) Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.
- (2) Die Verbindungslinie von Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
- (3) Das Quadrat der Umlaufzeiten *T* verhält sich wie die dritte Potenz der großen Halbachse *a* der Ellipse, d.h. das Verhältnis

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{konst.} \tag{4.2}$$

nimmt für alle Planeten eines Sonnensystems denselben Wert an.

Wie Newton werden wir nun diese Gesetze unter einigen Näherungen aus dem Gravitationsgesetz ableiten:

- Wir vernachlässigen die Gravitationskräfte, die die Planeten aufeinander ausüben, d.h. wir betrachten effektiv nur die Sonne und einen der Planeten. Dies ist eine gute Näherung, da die Masse der Sonne viel größer ist als die der Planeten, $M_{\text{Sonne}} \gg m_{\text{Planeten}}$. Repräsentative Werte sind $M_{\text{Sonne}} = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg, $M_{\text{Jupiter}} = 1,90 \cdot 10^{27}$ kg und $M_{\text{Erde}} = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg.
- Sonne und Planeten haben im Vergleich zu ihren Abständen eine verachlässigbare Ausdehnung, d.h. wir können Sonne und Planeten als Massepunkte betrachten. Diese Näherung beruht darauf, dass die Durchmesser der Sonne sowie der Planeten viel kleiner sind als die Abstände zwischen der Sonne und den Planeten. So ist der Durchmesser der Sonne $d_{\text{Sonne}} = 1,4 \cdot 10^6$ km und der Durchmesser der Erde $d_{\text{Erde}} = 12700$ km. Diese sollten mit dem Radius $r_{\text{Erde}} = 1,5 \cdot 10^8$ km der Erdbahn verglichen werden.



Figure 4.1: Ebene Polarkoordinaten r, φ in der Ebene der Planetenbewegung

 Da M_{Sonne} ≫ M_{Planeten}, können wir die Sonne als fest im Zentrum des Planetensystems betrachten. (Diese Annahme ist eigentlich unnötig, da das Zweikörperproblem mit Hilfe der reduzierten Masse auf ein Problem mit festem Zentralgestirn zurückgeführt werden kann.) Mit diesen Näherungen nimmt die Bewegungsgleichung eines Planeten die Form

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r \tag{4.3}$$

an. Hieraus werden wir in diesem Kapitel die Keplerschen Gesetze herleiten.

4.2 Drehimpulserhaltung und ebene Polarkoordinaten

Der Drehimpuls $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ spielt für die Planetenbewegung eine zentrale Rolle. Wir haben bereits im letzten Kapitel gesehen, dass der Drehimpuls relativ zum Kraftzentrum für alle Zentralkräfte eine Konstante der Bewegung ist. Dies gilt also insbesondere auch für das Gravitationspotential.

Zunächst können wir aus der Drehimulserhaltung schließen, dass sich die Bewegung der Planeten in einer Ebene abspielt. Der Drehimpuls steht senkrecht auf dieser Ebene. Aufgrund der Definition des Drehimpulses über ein Kreuzprodukt gilt $\mathbf{v} \perp \mathbf{L}$. Da $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, stehen also alle Verschiebungen $d\mathbf{r}$ des Planeten senkrecht auf dem festen Drehimpulsvektor \mathbf{L} und die Bewegung findet tatsächlich in einer *Ebene* senkrecht zu \mathbf{L} statt. In dieser Ebene können wir die Bewegung mit Hilfe von ebenen Polarkoordinaten beschreiben.

Wie wir bereits in Abs. 1.1.7 gesehen haben, nimmt die Newtonsche Bewegungsgleichung (4.3) in Polarkoordinaten die Form

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -G\frac{mM}{r^2}$$

$$m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = 0$$
(4.4)

an. Dort haben wir auch gezeigt, dass die zweite dieser Gleichungen äquivalent ist zum 2. Keplerschen Gesetz, d.h. zur Konstanz der Flächengeschwindigkeit. Wir können nun einen Schritt weitergehen und dies in Zusammenhang bringen mit der Erhaltung des Drehimpulses. Die Erhaltung der Richtung des Drehimpulsvektors haben wir bereits benutzt, um zu verstehen, dass sich die Planetenbewegung in einer Ebene abspielt. Die zweite Gleichung drückt nun genau die Erhaltung des Betrags des Drehimpulsvektors aus. Um dies zu zeigen, schreiben wir den Betrag des Drehimpulses L in Polarkoordinaten,

$$L = |m\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = mr \left| \hat{\mathbf{e}}_r \times (\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\phi}\hat{\mathbf{e}}_{\phi}) \right| = mr^2\dot{\phi}.$$
(4.5)

Aus der Erhaltung des Drehimpulses folgt insbesondere, dass L = const und somit

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(mr^2 \dot{\phi} \right) = m(2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2 \ddot{\phi})$$
$$= mr(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = 0. \tag{4.6}$$

Wie behauptet ist dies äquivalent zum Winkelanteil der Bewegungsgleichung [s. die zweite Gleichung in Glg. (4.4)]. Da die Drehimpulserhaltung für beliebige Zentralkräfte gilt, ist der Winkelanteil der Bewegungsgleichung unabhängig von der Abstandsabhängigkeit f(r) der Kraftgesetzes. Somit gilt also auch das 2. Keplersche Gesetz für *beliebige* Zentralkräfte.

4.3 Elementare Geometrie der Ellipse

Motiviert durch das erste Keplersche Gesetz wollen wir uns in diesem Abschnitt mit der elementaren Geometrie der Ellipse beschäftigen. Wie in Abb. 4.2 illustriert wird, sind Ellipsen definiert als die Menge aller Punkte, deren Abstandssumme von zwei sogenannten Brennpunkten einen festen Wert annimmt. Betrachten wir einen Punkt der Ellipse auf der Verbindungslinie der beiden Brennpunkte, so findet man, dass die Abstandssumme gerade gleich dem Doppelten der großen Halbachse *a* sein muss,

$$r_1 + r_2 = 2a,$$
 (4.7)

wobei r_1 und r_2 die Abstände der beiden Brennpunkte von einem Punkt auf der Ellipse bezeichnen. Der Abstand der beiden Brennpunkte vom Mittelpunkt der Ellipse wird als lineare Exzentrizität e bezeichnet. Die kleine Halbachse b bezeichnet den kleinsten Abstand von Mittelpunkt und Ellipse.

Betrachten wir das rechtwinklige Dreieck mit Ecken an einem Brennpunkt, dem Mittelpunkt und einem Punkt des kleinsten Abstands vom Mittelpunkt, so haben die Katheten die Längen e und b und die Hypothenuse die Länge a. Nach dem Satz der Pythagoras gilt demnach der Zusammenhang

$$e^2 = a^2 - b^2. (4.8)$$

Neben der linearen Exzentrizität definiert man auch das Verhältnis

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{4.9}$$

und bezeichnet es als numerische Exzentrizität.

Ein Kreis mit Radius *R* kann in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$ beschrieben werden. Die entsprechende Gleichung für Ellipsen lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (4.10)$$

wobei der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems im Mittelpunkt der Ellipse liegt. Das kartesische Koordinatensystem ist so gewählt, dass die Brennpunkte – und somit auch die große Halbachse – auf der x-Achse liegen (s. Abb. 4.2). Diese Gleichung lässt sich direkt aus der



Figure 4.2: Ellipse mit den verwendeten Bezeichnungen.

definierenden Konstruktionsvorschrift in Glg. (4.7) ableiten. Zunächst drücken wir die Abstände r_1 und r_2 mithilfe der kartesischen Koordinaten x und y aus,

$$r_1^2 = (x+e)^2 + y^2$$

$$r_2^2 = (x-e)^2 + y^2.$$
(4.11)

Ziehen wir die beiden Gleichungen voneinander ab, so erhalten wir

.

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4ex. (4.12)$$

Benutzen wir Glg. (4.7) zweimal, so erhalten wir hieraus zunächst $r_1 - r_2 = 2ex/a$ und dann

$$r_1 = a + \frac{ex}{a}.\tag{4.13}$$

Nun quadrieren wir diesen Ausdruck und kombinieren ihn mit Glg. (4.11). Dies ergibt

$$\left(a + \frac{ex}{a}\right)^2 = (x + e)^2 + y^2.$$
(4.14)

Beim Ausmultiplizieren fallen die linearen Terme in x heraus und wir erhalten

$$x^{2}\left(1-\frac{e^{2}}{a^{2}}\right)+y^{2}=a^{2}-e^{2}.$$
(4.15)

Teilen wir nun durch $a^2 - e^2 = b^2$, so erhalten wir schließlich Glg. (4.10).

Wir haben bereits die Bewegungsgleichung des Planeten in Polarkoordinaten mit der Sonne im Ursprung des Koordinatensystems ausgedrückt. Wir sollten daher auch die Ellipsengleichung in Polarkoordinaten auszudrücken, wobei der Ursprung in einen der Brennpunkte gelegt wird. Wir zeigen nun, dass die entsprechende Ellipsengleichung die Form

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} \left(1 + \varepsilon \cos \varphi \right) \tag{4.16}$$

annimmt. Als Ursprung haben wir den rechten Brennpunkt gewählt und $p = a(1 - \varepsilon^2)$ definiert.

Zum Beweis schreiben wir zunächst die Ellipsengleichung (4.10) so um, dass die kartesischen Koordinaten ihren Ursprung im rechten Brennpunkt haben. Dies ergibt

$$\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
(4.17)

Multiplizieren wir diese Gleichung mit a^2b^2 , so erhalten wir

$$b^{2}(x+e)^{2} + a^{2}y^{2} = a^{2}b^{2}$$
(4.18)

und

$$b^{2}x^{2} + a^{2}y^{2} + 2b^{2}ex = b^{2}(a^{2} - e^{2}).$$
(4.19)

Nun benutzen wir Glg. (4.8) und führen Polarkoordinaten in der üblichen Weise über $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ ein. Dies führt auf

$$b^{2}r^{2}\cos^{2}\varphi + a^{2}r^{2}\sin^{2}\varphi + 2b^{2}er\cos\varphi - b^{4} = 0.$$
(4.20)

Multiplizieren wir die Gleichung mit a^2/b^4r^2 und nutzen wir die Identität $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ aus, so erhalten wir

$$\frac{a^4}{b^4} + \frac{a^2(b^2 - a^2)}{b^4}\cos^2\varphi + \frac{2ea^2}{b^2r}\cos\varphi - \frac{a^2}{r^2} = 0$$
(4.21)

und somit

$$\frac{a^4}{b^4} - \frac{a^2 e^2}{b^4} \cos^2 \varphi + \frac{2ea}{b^2} \frac{a}{r} \cos \varphi - \frac{a^2}{r^2} = 0.$$
(4.22)

Lösen wir dies nun mit Hilfe der quadratischen Gleichung nach a/r auf, so erhalten wir

$$\frac{a}{r} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{ea}{b^2} \cos \varphi$$
$$= \frac{a^2}{b^2} (1 + \varepsilon \cos \varphi).$$
(4.23)

Glg. (4.16) folgt schließlich mit der Identität $b^2/a^2 = 1 - \varepsilon^2$.

Man beachte, dass die Exzentrizität ε für Ellipsen nur die Werte $0 \le \varepsilon < 1$ annehmen kann. Tatsächlich beschreibt die Gleichung (4.16) auch für $\varepsilon \ge 1$ bekannte geometrische Gebilde. Man kann zeigen, dass die Gleichung für $\varepsilon = 1$ eine Parabel und für $\varepsilon > 1$ Hyperbeln beschreibt. Alle diese Kurven werden summarisch als Kegelschnitte bezeichnet.

4.4 Berechnung der Bahnkurve

Nun können wir uns dem ersten Keplerschen Gesetz zuwenden, das sich mit der Bahnkurve der Planetenbewegung befasst. Die Bahnkurve lässt sich beschreiben, indem man den Abstand r des Planeten als Funktion des Winkels φ angibt, $r = r(\varphi)$. Das erste Keplersche Gesetz besagt dann, dass die Bahnkurve $r = r(\varphi)$ durch die Ellipsengleichung (4.16) gegeben sein sollte.

Wir wollen diese Bahnkurve nun aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen des Planeten ableiten. Die Bewegungsgleichungen stellen an sich Differentialgleichungen für die Polarkoordinaten als Funktion der Zeit dar, d.h. für die Funktionen r = r(t) und $\varphi = \varphi(t)$. Mit Hilfe der Drehimpulserhaltung können wir aber aus den Bewegungsgleichungen eine Differentialgleichung für die Bahnkurve ableiten. Hierzu beginnen wir mit der Radialkomponente der Bewegungsgleichung (s. Glg. (4.4)),

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -G\frac{M}{r^2}.$$
(4.24)

Diese Gleichung erhält noch die beiden unbekannten Funktionen r = r(t) und $\varphi = \varphi(t)$. Wir können zunächst die Winkelfunktion $\varphi = \varphi(t)$ mit Hilfe der Drehimpulserhaltung eliminieren. Hierzu lösen wir Glg. (4.5) für den Betrag des Drehimpulses nach der Winkelgeschwindigkeit auf,

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = L/mr^2 \tag{4.25}$$

und setzen dies in Glg. (4.24) ein. Dies ergibt

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} = -G\frac{M}{r^2}.$$
(4.26)

Physikalisch lässt sich der zweite Term auf der linken Seite als Zentrifugalbeschleunigung interpretieren.

Wir wollen nun die Gleichung (4.26) für die Trajektorie r = r(t) in eine Gleichung für die Bahnkurve $r = r(\varphi)$ umschreiben. Hierzu beachten wir, dass wir r(t) berechnen können, wenn wir die Bahnkurve $r(\varphi)$ sowie die Abhängigkeit des Winkels φ von der Zeit, $\varphi(t)$, kennen. Mathematisch kann dies durch

$$r(t) = r(\boldsymbol{\varphi}(t)) \tag{4.27}$$

ausgedrückt werden. Damit können wir aber auch die Zeitableitung von *r* mit Hilfe der Kettenregel bestimmen,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}.$$
(4.28)

Der Trick besteht nun darin, noch einmal die Drehimpulserhaltung auszunutzen und mittels Glg. $(4.25) \dot{\phi}$ zu eliminieren. Damit erhalten wir

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{L}{mr^2}.$$
(4.29)

Wenden wir denselben Trick nun noch einmal an für die zweite Zeitableitung, so erhalten wir

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dr}{d\varphi} \frac{L}{mr^2} \right]$$
(4.30)

$$= \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{dr}{d\varphi} \frac{L}{mr^2} \right] \frac{d\varphi}{dt}$$
(4.31)

$$= \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{dr}{d\varphi} \frac{L}{mr^2} \right].$$
(4.32)

Setzen wir dies in die Bewegungsgleichung (4.26) ein, so erhalten wir tatsächlich wie gewünscht eine Gleichung für die Bahnkurve,

$$\frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{dr}{d\varphi}\frac{L}{mr^2}\right] - \frac{L^2}{m^2r^3} = -G\frac{M}{r^2}.$$
(4.33)

Sie lässt sich noch vereinfachen, indem wir sie mit $(mr/L)^2$ multiplizieren,

$$\frac{d}{d\varphi} \left[\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right] - \frac{1}{r} = -\frac{Gm^2 M}{L^2}.$$
(4.34)

Auf den ersten Blick scheint dies eine recht komplizierte Differentialgleichung zu sein.

Allerdings lässt sie sich durch einen weiteren kleinen Trick auf eine Form bringen, die uns bereits bekannt ist. Hierzu führen wir die neue Funktion

$$\tilde{u}(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{r(\boldsymbol{\varphi})} \tag{4.35}$$

ein und bemerken, dass

$$\frac{d\tilde{u}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}.$$
(4.36)

Ausgedrückt durch die Funktion $\tilde{u}(\varphi)$ nimmt die Differentialgleichung für die Bahnkurve also die Form

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\varphi^2} + \tilde{u} = \frac{Gm^2M}{L^2} \tag{4.37}$$

an. Diese Differentialgleichung ist vollkommen analog zur Gleichung eines Federpendels im Schwerefeld der Erde. Die angreifenden Kräfte sind dann Schwerkraft und Federkraft (mit Federkonstante k und Masse m), und die Bewegungsgleichung für die Auslenkung z(t) der Feder nimmt die Form

$$m\ddot{z} = -kz - mg \tag{4.38}$$

an, wobei z = 0 der entspannten Feder entspricht. Mit $\omega^2 = k/m$ wird dies zu

$$\ddot{z} + \omega^2 z = -g. \tag{4.39}$$

Mit den Identifikationen $t \leftrightarrow \varphi$, $z \leftrightarrow \tilde{u}$, $\omega^2 \leftrightarrow 1$ und $-g \leftrightarrow Gm^2M/L^2$ entspricht dies exakt der Differentialgleichung für die Bahnkurve.

Wie wir bereits gesehen haben, führt das Federpendel harmonische Schwingungen um eine neue Gleichgwichtslage aus, in der sich Schwerkraft und Federkraft gerade ausgleichen. Um die Glg. (4.37) für die Bahnkurve zu lösen, können wir also analog zur Lösung des Federpendels vorgehen. Wir eliminieren zunächst die Konstante auf der rechten Seite, indem wir eine neue Funktion $u(\varphi)$ einführen über

$$u(\boldsymbol{\varphi}) = \tilde{u}(\boldsymbol{\varphi}) - Gm^2 M/L^2. \tag{4.40}$$

Diese Funktion erfüllt nun eine einfache homogene Schwingungsgleichung,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0, (4.41)$$

wie man leicht aus Glg. (4.37) ableitet. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung kennen wir,

$$u(\boldsymbol{\varphi}) = A\cos(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0), \tag{4.42}$$

wobei *A* und φ_0 freie Parameter sind. Berechnen wir hieraus $\tilde{u}(\varphi)$ und schließlich die Bahnkurve $r(\varphi)$, so erhalten wir

$$\frac{1}{r} = \frac{Gm^2M}{L^2} + A\cos(\varphi - \varphi_0).$$
(4.43)

Durch geeignete Wahl der *x*-Achse können wir immer $\varphi_0 = 0$ wählen. Damit erhalten wir das Resultat

$$\frac{1}{r} = \frac{Gm^2M}{L^2} (1 + \varepsilon \cos \varphi), \tag{4.44}$$

wobei wir

$$\varepsilon = \frac{AL^2}{Gm^2M} \tag{4.45}$$

definiert haben. Diese Lösung gibt auch noch einen Ausdruck für die Größe p in der Ellipsengleichung (4.16),

$$p = \frac{L^2}{Gm^2M} \tag{4.46}$$

Allgemein zeigt Glg. (4.44), dass die Bahnkurve eines Himmelskörpers im Gravitationspotential ein Kegelschnitt ist. Insbesondere ist sie eine Ellipse, solange $0 \le \varepsilon < 1$. Ob diese Bedingung erfüllt ist, hängt nach Glg. (4.45) von dem freien Parameter *A* ab. Um die physikalische Bedeutung der Exzentrizität genauer herauszuarbeiten, berechnen wir nun die Gesamtenergie des Himmelskörpers.

4.5 Energie des Planeten

Die Gesamtenergie *E* des Planeten setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen. Die kinetische Energie $T = m\mathbf{v}^2/2$ können wir mithilfe von Glg. (1.54) leicht in ebenen Polarkoordinaten ausdrücken,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2). \tag{4.47}$$

Somit erhalten wir für die Gesamtenergie den Ausdruck

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - G\frac{mM}{r}.$$
(4.48)

Ersetzen wir nun ϕ und \dot{r} mithilfe der Glg. (4.25) und (4.29), so erhalten wir

$$E = \frac{m}{2} \frac{L^2}{m^2 r^4} \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \right] - \frac{GmM}{r}.$$
(4.49)

Da die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße ist, können wir sie an einer beliebigen Stelle der Bahnkurve berechnen. Wir wählen $\varphi = 0$. Hier ist *r* extremal, so dass $dr/d\varphi = 0$ und nach der Ellipsengleichung in Polarkoordinaten $r = p/(1 + \varepsilon)$ gilt. Setzen wir dies in den Ausdruck für *E* ein, so erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$E = -\frac{G^2 m^3 M^2}{2L^2} (1 - \varepsilon^2).$$
(4.50)

Das Vorzeichen der Energie hängt also davon ab, ob $\varepsilon < 1$ (*E* ist negativ) oder $\varepsilon > 1$ (*E* ist positiv) ist.

Wir können nun leicht verstehen, dass sich die Natur der Bahnen bei $\varepsilon = 1$ qualitativ ändert. Wenn seine Gesamtenergie positiv ist, ist ein Himmelskörper nicht im Gravitationsfeld der Sonne gebunden. Denn in unendlicher Entfernung von der Sonne geht das Gravitationspotential gegen Null. Ein Teilchen, dass sich unendlich weit von der Sonne entfernt, muss also notwendigerweise eine positive Gesamtenergie haben, denn die kinetische Energie ist immer nicht-negativ. Dieses



Figure 4.3: Hyperbelbahn

Ergebnis ist konsistent mit der Tatsache, dass eine positive Gesamtenergie für $\varepsilon > 1$ auftritt. Für diese Werte von ε beschreibt die Gleichung (4.44) für die Bahnkurve Hyperbelbahnen, die sich tatsächlich unendlich weit vom Zentralgestirn entfernen. Diese Bahnen werden in Abb. 4.3 illustriert und im Abschnitt 4.8 genauer untersucht.

Umgekehrt gilt, dass ein Planet mit negativer Energie im Gravitationsfeld der Sonne gebunden und für alle Zeiten in einem endlichen Abstand von der Sonne bleibt. Eine negative Gesamtenergie tritt für $\varepsilon < 1$ auf. In diesem Fall beschreibt die Gleichung (4.44) für die Bahnkurve im Einklang mit dem ersten Keplerschen Gesetz tatsächlich eine Ellipse.

Schließlich erwähnen wir noch, dass im Grenzfall $\varepsilon = 1$ die Gesamtenergie verschwindet. Die Bahn entspricht in diesem Fall gerade einer Parabel.

4.6 3. Keplersches Gesetz

Schließlich wenden wir uns dem letzten Keplerschen Gesetz zu. Bereits in Kapitel 1 hatten wir in Glg. (1.71) die Flächengeschwindigkeit in Polarkoordinaten ausgedrückt. Ersetzen wir nun ϕ in diesem Ausdruck mithilfe von Glg. (4.25), so erhalten wir für die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{dF}{dt} = \frac{L}{2m}.\tag{4.51}$$

Andererseits ist die Fläche einer Ellipse gegeben durch $F = \pi ab$ und somit gilt aufgrund der Konstanz der Flächengeschwindigkeit

$$\frac{dF}{dt} = \frac{F}{T} = \frac{\pi ab}{T}.$$
(4.52)

Aus den letzten beiden Gleichungen erhalten wir

$$T = \frac{2\pi mab}{L}.$$
(4.53)

Aus der Definition (4.9) der numerischen Exzentrizität ε folgt die Identität $b = \sqrt{1 - \varepsilon^2}a$. Ferner gilt nach der Definition von p unter der Glg. (4.16) $1 - \varepsilon^2 = p/a$, so dass $b = \sqrt{pa}$ und

$$T = \frac{2\pi m p^{1/2} a^{3/2}}{L}.$$
(4.54)

Schließlich können wir p mithilfe von Glg. (4.46) ersetzen und erhalten das Resultat

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$
(4.55)

Man beachte, dass die rechte Seite nur von der Sonnenmasse und der Gravitationskonstante abhängt. Sie ist unabhängig von den Eigenschaften des Planeten. Somit nimmt das Verhältnis T^2/a^3 für alle Planeten eines Sonnensystems den gleichen Wert an. Dies ist das 3. Keplersche Gesetz.

4.7 Lenzscher Vektor

Eine besondere Eigenschaft der Planetenbahnen ist die Tatsache, dass sie geschlossen sind. Es stellt sich heraus, dass die Bahnen diese Eigenschaft nur für zwei Zentralpotentiale haben: Neben dem Gravitationspotential $V(r) \propto 1/r$ hat noch das Potential $V(r) \propto r^2$ diese Eigenschaft. Im Falle des Gravitationspotentials kann man dies mit einer zusätzlichen Erhaltungsgröße in Zusammenhang bringen, dem sogenannten Lenzschen Vektor.

Der Lenzsche Vektor wird durch

$$\mathbf{H} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - GmM_{r}^{\mathbf{I}} \tag{4.56}$$

definiert. Wir zeigen nun zunächst, dass dieser Vektor eine Erhaltungsgröße ist. Beachten wir, dass der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist, so wird die Zeitableitung des Lenschen Vektors zu

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{L} - GmM\frac{\mathbf{v}}{r} + GmM\frac{\mathbf{r}}{r^2}\frac{dr}{dt}.$$
(4.57)

Den letzten Term auf der rechten Seite dieser Gleichung können wir der Identität

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}}{dt} = \frac{1}{2r} 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r}$$
(4.58)

umformen. Den ersten Term vereinfachen wir mithilfe der Bewegungsgleichung

$$m\dot{\mathbf{v}} = -GmM\frac{\mathbf{r}}{r^3},\tag{4.59}$$

aus der wir

$$\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{L} = -GmM \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \tag{4.60}$$

erhalten. Hier können wir die rechte Seite mit der Regel (1.10) für doppelte Kreuzprodukte umformen,

$$\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{L} = -GmM \frac{1}{r^3} \left[\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}r^2 \right] = -GmM \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r^3} + GmM \frac{\mathbf{v}}{r}.$$
(4.61)

Setzen wir nun die Glg. (4.58) und (4.61) in den Ausdruck (4.57) ein, so finden wir, dass sich auf der rechten Seite alle Terme wegheben,

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = 0. \tag{4.62}$$

Damit haben wir gezeigt, dass der Lenzsche Vektor für das Gravitationspotential tatsächlich eine Konstante der Bewegung ist.

Interessanterweise lässt der Lenzschen Vektors eine alternative Ableitung der Bahnkurven im Gravitationspotential zu. Hierzu multiplizieren wir Glg. (4.56) skalar mit dem Ortsvektor des Planeten und erhalten

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L}) - GmMr. \tag{4.63}$$

Teilen wir nun diese Gleichung durch *r* und nutzen wir die zyklische Invarianz des Spatprodukts aus, $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L}^2/m$, so erhalten wir

$$\frac{\mathbf{L}^2}{mr} = GmM + \frac{1}{r}\mathbf{r}\cdot\mathbf{G}.$$
(4.64)

Definieren wir schliesslich den Winkel $\varphi = \measuredangle(\mathbf{r}, \mathbf{H})$ ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{r} = \frac{Gm^2M}{L^2} \left(1 + \frac{L^2|\mathbf{H}|}{Gm^2M} \cos\varphi \right).$$
(4.65)

Dies ist die gleiche Kegelschnittgleichung (4.44), die wir bereits zuvor abgeleitet haben. Hieraus folgt, dass der Lenzsche Vektor in Richtung der grossen Halbachse zeigt und dass die Länge des Lenzschen Vektors mit der Exzentrizität verknüpft ist [vgl. auch Glg. (4.45)].



Figure 4.4: Schematischer Aufbau eines Streuexperiments

4.8 Offene Bahnen und Rutherford-Streuung

Mithilfe der Bahnen im Gravitationspotential können wir mit dem Rutherford-Experiment nun noch ein historisches Experiment diskutieren, das zentral zur Entwicklung der Atommodelle beigetragen hat. In diesem Experiment wurden α -Teilchen (sprich He²⁺-Kerne) auf Metallfolien geschossen und ihre Ablenkung gemessen. Dies war wohl das erste Streuexperiment, eine besonders wichtige Klasse von Experimenten, die inzwischen in fast allen Teilbereichen der Physik eine zentrale Rolle spielt. So werden Streuexperimente nicht nur in den großen Beschleunigern durchgeführt, um die Eigenschaften der Elementarteilchen aufzuklären, sondern auch in der Atom- oder Festkörperphysik. Es stellt sich heraus, dass Streuexperimente in all diesen Gebieten in einer ähnlichen Sprache beschrieben werden und dass sich diese Sprache bereits am Beispiel der Rutherford-Streuung einführen lässt.

Ein weiterer bemerkenswerter Aspekt des Rutherford-Experiments ist die Tatsache, dass die Originalarbeiten sehr zugänglich sind und eine interessante Lektüre darstellen.

Wir betrachten zunächst Streuexperimente im allgemeinen. Bei diesen wird idealerweise ein homogener Strahl von Teilchen (Projektil) auf eine Probe (Target) geschickt. Die Teilchen werden durch die Probe abgelenkt und es wird gemessen, wieviele Teilchen pro Zeiteinheit ein Detektor nachweist, der ein bestimmtes Winkelfenster abdeckt. Wir betrachten zunächst nur Detektoren, die rotationssymmetrisch um die Richtung des einfallenden Strahls sind. Messen wir den Ablenkwinkel θ relativ zur Richtung des einfallenden Strahls, so wird das Winkelfenster durch $[\theta, \theta + d\theta]$ definiert, wobei $d\theta$ die Winkelauflösung des Detektors beschreibt. Ein Schema eines solchen Experiments ist in Abb. 4.4 dargestellt. Obwohl Streuexperimente nicht die gesamte Trajektorie einzelner Teilchen nachweisen, kann man häufig aus den Resultaten relevante Rückschlüsse auf die Eigenschaften des Targets und seiner Wechselwirkung mit den Projektilen ziehen.

Beim Rutherford-Experiment wechselwirken die α -Teilchen (mit elektrischer Ladung +2e) mit den Atomkernen (Ladung +Ze mit der Kernladungszahl Z). (Die Wechselwirkung mit den Elektronen in der Atomhülle ist irrelevant aufgrund der großen Massendifferenz zwischen Protonen und Neutronen auf der einen Seite und den Elektronen auf der anderen.) Diese Wechselwirkung beruht auf der Coulomb-Kraft, die ebenso wie die Gravitationskraft wie $1/r^2$ vom Abstand der Ladungen abhängt. Solange wir wie Rutherford von der Annahme ausgehen, dass die α -Teilchen im Rahmen der Newtonschen Mechanik beschrieben werden können, so genügen die Bahnkurven der α -Teilchen im wesentlichen der gleichen Bewegungsgleichung wie Himmelskörper in einem Sonnensystem. Beide Probleme unterscheiden sich nur durch die eingehenden Konstanten (G,m,Manstelle von $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, 2e, Ze). Wir werden in diesem Kapitel also so tun, als ob wir es weiter mit der Bewegung von Himmelskörpern im Gravitationsfeld zu tun haben. Wir beschreiben daher quasi eine Art kosmisches Streuexperiment, bei dem ein homogener Strahl von Himmelskörpern auf eine



Figure 4.5: Definition des Stoßparameters

Sonne fällt. Die entsprechenden Resultate für das eigentliche Rutherford-Experiment lassen sich natürlich leicht rekonstruieren, indem man der Rechnung noch einmal Schritt für Schritt folgt.¹

Bisher haben wir die Bahnkurven des Keplerproblems charakterisiert durch ihren Drehimpuls L und ihre Energie E. Während der Drehimpuls L von Anfang an in die Berechnung der Bahnkurve einging, haben wir die Exzentrizität der Bahn ε erst im Anschluss durch die Gesamtenergie ausgedrückt.² Im Zusammenhang mit Streuproblemen ist es nun üblich, die Bahnkurven durch zwei andere Parameter zu charakterisieren:

- die Projektilgeschwindigkeit v_{∞} , wenn das Projektil unendlich weit vom Target entfernt ist
- der Stoßparameter b, d.h. der minimale Abstand der Projektils vom Streuzentrum, wenn das Projektil nicht abgelenkt würde, s. Abb. 4.5

Es ist nicht schwer, die alten und neuen charakterisierenden Größen miteinander in Beziehung zu setzen. So hat das Projektil im Unendlichen (d.h. für $r \to \infty$) nur kinetische und keine potentielle Energie. Somit können wir die Gesamtenergie leicht mit der Geschwindigkeit v_{∞} in Beziehung setzen,

$$E = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2. \tag{4.66}$$

Ebenso können wir nach der Definition des Kreuzprodukts den Betrag des Drehimpulses berechnen über

$$L = mrv \left| \sin\left(\measuredangle(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \right) \right|. \tag{4.67}$$

Betrachten wir nun den Limes $r \to \infty$, so geht $r |\sin(\measuredangle(\mathbf{r}, \mathbf{v}))|$ gegen den Stoßparameter *b* und $v \to v_{\infty}$ (vgl. Abb. 4.6). Somit erhalten wir

$$L = mv_{\infty}b. \tag{4.68}$$

Die zentrale Eigenschaft der Bahnkurve des Projektils, an der wir im Zusammenhang mit Streuexperimenten interessiert sind, ist der Ablenkwinkel θ . Wir wollen diesen nun für das Kepler-Problem bestimmen. Hierzu betrachten wir die offenen Bahnen, die für $\varepsilon > 1$ auftreten und geometrisch Hyperbeln entsprechen. Der Ablenkwinkel θ sowie der halbe Öffnungswinkel φ_0 der Hyperbel werden in Abb. 4.7 definiert. Wir wollen nun diese Winkel mit den Parametern p und ε der Hyperbelbahn (4.16) in Zusammenhang setzen. Bezeichnen wir die Winkel des einfallenden und auslaufenden Projektils für $r \to \infty$ mit $\pm \varphi_{\infty}$, so folgt aus Glg. (4.16)

$$1 + \varepsilon \cos \varphi_{\infty} = 0 \tag{4.69}$$

¹Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass sich beim Kepler-Problem die Masse des Planeten auf den beiden Seiten der Bewegungsgleichung herauskürzt. Man könnte auch einwenden, dass die Gravitationskraft immer anziehend ist, während die Coulomb-Kraft zwischen α -Teilchen und Atomkern abstoßend wirkt. Es stellt sich aber – vielleicht überraschenderweise – heraus, dass das Rutherfordexperiment nicht zwischen anziehender und abstoßender Wechselwirkung unterscheiden kann. Dies werden wir am Ende unserer Rechnung explizit verifizieren.

²Gewöhnlich haben wir die freien Konstanten, die in der allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichung auftreten, durch Anfangsbedingungen festgelegt. Aber natürlich können wir auch eine andere Wahl treffen. Die Festlegung von Drehimpuls und Energie ist eine solche alternative Wahl.



Figure 4.6: Vektoren **r** und **v** für $r \rightarrow \infty$

bzw.

$$\cos\varphi_{\infty} = -\frac{1}{\varepsilon}.\tag{4.70}$$

Hierbei wird der Winkel φ_{∞} relativ zur positiven *x*-Achse gemessen. Aus Abb. 4.7 lesen wir nun die Identitäten $\theta = \pi - 2\varphi_0$ sowie $\varphi_{\infty} = \pi - \varphi_0$ ab. Aus der zweiten Identität folgt, dass

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon}.\tag{4.71}$$

Damit erhalten wir nun aus der ersten Identität einen expliziten Ausdruck für den Ablenkwinkel,

$$\theta = \pi - 2\arccos\frac{1}{\varepsilon}.\tag{4.72}$$

Um schließlich einen Zusammenhang herzustellen zwischen dem Ablenkwinkel θ und den Parametern *b* und v_{∞} des einfallenden Projektils setzen wir nun die Exzentrizität ε in Beziehung zu v_{∞} und *b*. Hierzu starten wir von Glg. (4.50). Für offenen Bahnen gilt $\varepsilon > 1$ und somit erhalten wir durch Auflösen

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 m^3 M^2}}.\tag{4.73}$$

Ersetzen wir nun E und L mittels der Glg. (4.66) und (4.68), so erhalten wir die Identität

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{v_{\infty}^4 b^2}{G^2 M^2}},\tag{4.74}$$

und durch Einsetzen in Glg. (4.72) einen Ausdruck für die Funktion $\theta = \theta(v_{\infty}, b)$.

Schließlich werden wir im Folgenden noch die Umkehrfunktion $b = b(v_{\infty}, \theta)$ benötigen. Um diese zu erhalten, betrachten wir

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{\cos(\pi/2 - \arccos(1/\varepsilon))}{\sin(\pi/2 - \arccos(1/\varepsilon))} = \frac{\sin(\arccos(1/\varepsilon))}{\cos(\arccos(1/\varepsilon))} = \frac{\sqrt{1 - (1/\varepsilon)^2}}{1/\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$
 (4.75)

Hier haben wir die trigonometrischen Identitäten $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$, $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$ sowie $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ ausgenutzt. Benutzen wir nun Glg. (4.74) und lösen nach dem Stoßparameter *b* auf, so erhalten wir

$$b = \frac{GM}{v_{\infty}^2} \cot \frac{\theta}{2}.$$
(4.76)

4.9 Wirkungsquerschnitt

In einem Streuexperiment fällt natürlich nicht ein einziges Projektil mit wohldefinierten Parametern auf das Target. Vielmehr hat man es typischerweise mit einem homogenen Strahl einfallender



Figure 4.7: Winkel θ und φ_0 . Man beachte, dass in dieser Abbildung die Winkel bzgl. eines Ursprungs gemessen werden, der gegenüber dem Kraftzentrum verschoben ist. Andererseits gilt unser Ausdruck für die Bahnkurve für Polarkoordinaten – und damit auch für den Polarwinkel – wenn der Ursprung im Kraftzentrum liegt. Dies fährt nicht zu Fehlern, da wir hier nur die Winkel für $r \rightarrow \infty$ benötigen. Diese ädern sich nicht, wenn wir den Ursprung um eine endliche Strecke verschieben.

Teilchen zu tun. Es ist häufig möglich, dass alle Teilchen in dem Strahl eine wohldefinierte Energie haben. Man sagt dann, dass der Strahl monochromatisch sei.³

Andererseits fallen die Teilchen aber natürlich mit allen möglichen Stoßparametern ein. Wir betrachten nun einen homogenen einfallenden Strahl, den wir durch den einfallenden Teilchenfluss F charakterisieren können. Hierbei ist F definiert als

$$F = \frac{\text{Anzahl der einfallenden Teilchen}}{\text{Querschnittsfläche} \times \text{Zeit}}.$$
(4.77)

Wir können nun angeben, wieviele Projektile pro Zeiteinheit mit Stoßparametern in einem kleinen Intervall [b, b + db] einfallen. Hierzu beachten wir, dass diese Stoßparameter einen Kreisring der Fläche $2\pi b db$ bilden, so dass die Anzahl der pro Zeiteinheit einfallenden Teilchen mit diesen Stoßparametern gegeben ist durch

$$\frac{\text{Anzahl der einfallenden Teilchen mit Stoßparameter in } [b, b+db]}{\text{Zeit}} = F 2\pi b \, db.$$
(4.78)

Teilchen mit diesen Stoßparametern werden in den Winkelbereich $d\theta$ um θ gestreut, wobei

$$\theta = \theta(v_{\infty}, b) \tag{4.79}$$

und

$$\theta + d\theta = \theta(v_{\infty}, b + db). \tag{4.80}$$

Mit Hilfe der Umkehrfunktion $b = b(v_{\infty}, \theta)$ gelten ebenso die Relationen

$$b = b(v_{\infty}, \theta) \tag{4.81}$$

sowie

$$b + db = b(v_{\infty}, \theta + d\theta). \tag{4.82}$$

Somit können wir folgern, dass die Anzahl der pro Zeiteinheit in das Winkelelement $[\theta, \theta + d\theta]$

³In der Quantenmechanik ist die Energie mit der deBroglie-Wellenlänge der einfallenden Teilchen verknüpft. Im diesem Sinne ist die Energie also mit der "Farbe" des Strahls verknüpft. Daher rührt diese optische Sprechweise.



Figure 4.8: Draufsicht in Strahlrichtung

gestreuten Teilchen durch

$$\frac{\text{Anzahl der in } [\theta, \theta + d\theta] \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}} = F 2\pi b db$$
$$= F 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta$$
(4.83)

gegeben ist. In diese Gleichung gehen auf der rechten Seite mit dem einfallenden Fluss und der Winkelauflösung $d\theta$ zwei Größen ein, die vom spezifischen Experiment abhängen. Die restlichen Faktoren charakterisieren den eigentlichen Streuprozess und haben die Dimension einer Fläche. Man nennt sie den *differentiellen Wirkungsquerschnitt*

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \tag{4.84}$$

Mithilfe des differentiellen Wirkungsquerschnitts erhalten wir

$$\frac{\text{Anzahl der in } [\theta, \theta + d\theta] \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}} = F \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta.$$
(4.85)

Hieraus folgt, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt mithilfe eines winkelauflösenden Detektors direkt gemessen werden kann, da der einfallende Fluss F sowie die Winkelauflösung $d\theta$ durch das Experiment vorgegeben sind.

Bisher haben wir einen um die Richtung des einfallenden Strahls rotationssymmetrischen Detektor betrachtet. üblicher ist es, Detektoren zu betrachten, die nur einen gewissen Raumwinkel $d\Omega$ abdecken. Analog zur Definition eines Winkels über das Bogenmaß ist der Raumwinkel über die zugehörige Fläche auf der Einheitskugel definiert, s. Abb. 4.9. Der maximale Raumwinkel ist demnach gleich 4π . Die durch $d\theta$ und $d\varphi$ auf der Einheitskugel mit r = 1 überdeckte Fläche lässt sich leicht mithilfe des bekannten Ausdrucks $d\mathbf{r} = dr\hat{\mathbf{e}}_r + rd\theta\hat{\mathbf{e}}_{\theta} + r\sin\theta d\varphi\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$ in Kugelkoordinaten herleiten. Denn die Fläche ist $d\Omega = |d\theta\hat{\mathbf{e}}_{\theta} \times \sin\theta d\varphi\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}|$, so dass

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$
.



Figure 4.9: Raumwinkel (IRREFÜHRENDE ABBILDUNG)



Figure 4.10: zu $d\theta$ gehöriger Raumwinkel

Natürlich erhalten wir wieder 4π , wenn wir diesen Ausdruck über alle Winkel $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ integrieren.

Ein um den einfallenden Strahl rotationssymmetrischer Detektor deckt alle Azimuthalwinkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ ab. Somit ist der zugehörige Raumwinkel gegeben durch

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta. \tag{4.87}$$

Dieses Ergebnis kann man sich auch leicht geometrisch überlegen, wie in Abb. 4.10 dargestellt.

Es ist nun üblich, den differentiellen Wirkungsquerschnitt auf den Raumwinkel $d\Omega$ zu beziehen. Mithilfe der Glg. (4.87) finden wir die übliche Definition

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$
(4.88)

des differentiellen Wirkungsquerschnitts. Auch diese Größe kann natürlich direkt mithilfe eines Streuexperiments bestimmt werden über

$$\frac{\text{Anzahl der in } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Zeit}} = F \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \tag{4.89}$$

wenn man den einfallenden Fluss und die Raumwinkelauflösung $d\Omega$ des Detektors kennt.

Nun können wir mithilfe von Glg. (4.72) den differentiellen Wirkungsquerschnitt (4.88) für die Rutherfordstreuung (eigentlich "Kepler"- Streuung) angeben und erhalten

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{GM}{2v_{\infty}^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$
(4.90)

Abschließend wollen wir auf zwei bemerkenswerte Tatsachen hinweisen: (i) Erstens ist aus Glg. (4.90) ersichtlich, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt nur vom Quadrat der Gravitationskonstanten abhängt. Da eine negative Gravitationskonstante effektiv eine abstoßende Gravitationskraft beschreiben würde, bedeutet dies, dass die Rutherford-Streuung nicht zwischen anziehender und



Figure 4.11: Detektor deckt nur Winkelbereich $d\varphi$ ab.

abstoßender Wechselwirkung unterscheidet. (ii) Während Planeten natürlich durch die klassische Mechanik beschrieben werden, ist dies für die Atomkerne des eigentlichen Rutherford-Experiments nicht der Fall. Vielmehr müsste dieses Problem quantenmechanisch beschrieben werden. Andererseits hat Rutherford das Experiment im Rahmen der klassischen Mechanik analysiert, da die Quantenmechanik damals noch nicht bekannt war. Es ist daher ein historischer Glücksfall, dass gerade für ein 1/r-Potential klassische Mechanik und Quantenmechanik das gleiche Ergebnis für den differentiellen Wirkungsquerschnitt liefern.



Bisher haben wir uns mit der Bewegung von einzelnen oder wenigen Punktteilchen beschäftigt. In diesem Kapitel wollen wir nun Körper betrachten, die eine endliche Ausdehnung besitzen. Wir werden uns auf sogenannte *starre Körper* beschränken, deren Form unveränderlich ist. (Formänderungen von ausgedehnten Körpern werden im Rahmen der Elastizitätstheorie behandelt, die über den Umfang dieser Vorlesung hinausgeht.) Theoretisch können wir starre Körper nun als ein System aus *N* starr verbundenen Teilchen modellieren. Die Kinematik und Dynamik von starren Körpern ist ein weites Feld, dass wir hier nur anreißen können, und häufig überraschend (z.B. Stehaufkreisel oder Keltisches Wackelholz) sowie mathematisch anspruchsvoll.

5.1 Modell des starren Körpers

Wir wollen zunächst den Begriff des starren Körpers genauer definieren. Ein starrer Körper ist ein System von N Massepunkten, die starr miteinander miteinander "verbunden" sind. Bezeichnen wir mit \mathbf{r}_i den Ort des *i*-ten Massepunkts, so gilt also, dass alle Abstände

$$r_{ij} = \left| \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \right| = \text{const.} \tag{5.1}$$

fest sind, d.h. starre Körper sind per definitionem *nicht* deformierbar. Der einfachste starre Körper besteht also zwei Punktmassen, die sich in einem festen Abstand voneinander befinden. Ein solcher starrer Körper heißt Rotor. Der nächsteinfache Körper besteht aus drei Massepunkten mit festen Abständen. Mit solchen Modellen kann man Moleküle näherungsweise beschreiben, sofern man von den internen Schwingungsfreiheitsgraden des Moleküls absieht.

Wir wollen nun zunächst bestimmen, wie viele Koordinaten benötigt werden, um die Lage eines starren Körpers vollständig zu bestimmen. Für einen Massepunkt im dreidimensionalen Raum brauchen wir drei Koordinaten. Man sagt, dass der Massepunkt drei Freiheitsgrade besitzt. Um die Anzahl der Freiheitsgrade eines starren Körpers zu bestimmen, bauen wir ihn nun Massepunkt für Massepunkt auf.

Um die Lage des ersten Massepunkts zu bestimmen, brauchen wir demnach drei Koordinaten. Die Lage des zweiten Massepunkts ist dann bereits eingeschränkt, da sein Abstand vom



Figure 5.1: Starrer Körper

ersten Massepunkt fest vorgegegen ist. Der zweite Massepunkt kann sich also nur noch auf einer Kugeloberfläche befinden und so benötigen wir nur zwei weitere Koordinaten, um seine Lage vollkommen festzulegen. Für den dritten Massepunkt liegen nun die Abstände von den ersten beiden Massepunkten fest. Er kann sich demnach nur noch auf der Schnittlinie der Kugeloberflächen um diese beiden Massepunkte befinden. Eine vollständige Angabe der Lage des dritten Massepunkte serfordert also nur noch eine Koordinate. Die Koordinaten aller weiteren Massepunkte sind dann bereits durch die drei Abstände von den ersten drei Massepunkten vollständig bestimmt. Aus dieser Überlegung können wir also schließen, dass ein starrer Körper im allgemeinen 6 = 3 + 2 + 1 Freiheitsgrade besitzt.

Diese sechs Freiheitsgrade setzen sich aus drei Freiheitsgraden der Translation und drei Freiheitsgraden der Rotation zusammen. So kann man die Lage eines starren Körpers vollständig beschreiben, indem man zunächst die drei Koordinaten eines ausgezeichneten Punktes – z.B. des Schwerpunkts – des starren Körpers angibt. Dies sind die drei Freiheitsgrade der Translation. Die drei Rotationsfreiheitsgrade bestehen nun darin, dass man den starren Körper aus einer verabredeten Nullorientierung in die momentane Lage rotiert. Hierzu muss man den starren Körper um eine durch den ausgezeichneten Punkt gehende Achse¹ um einen bestimmten Winkel drehen. Wir benötigen also zwei Koordinaten, um die Rotationsachse festzulegen sowie einen weiteren Drehwinkel, was zusammen den drei Freiheitsgraden der Rotation entspricht.

5.2 Schwerpunkt kontinuierlicher Masseverteilungen

In der Mechanik hat man es zumeist mit starren Körpern zu tun, deren Massenverteilung als kontinuierlich und nicht direkt als System von *N* Massepunkten betrachtet wird. Allerdings kann eine kontinuierliche Massenverteilung natürlich als Grenzfall eines Systems diskreter Massepunkte interpretiert werden. So können wir einen kontinuierlichen Körper immer näherungsweise in kleine Volumenelemente zerlegen und uns die Massen in einem geeignet definierten Mittelpunkt dieser Volumenelemente zusammengezogen denken, s. Abb. 5.2. Wir werden nun sehen, dass diese Betrachtungsweise auf natürliche Weise zum Konzept des Volumenintegrals führt.

Dazu betrachten wir den Schwerunkt eines starren Körpers. Für ein N-Teilchen-System hatten wir den Schwerpunkt über

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i} m_{i} \mathbf{r}_{i}}{\sum_{i} m_{i}}$$
(5.2)

als diskrete Summe definiert. Um nun den Schwerpunkt eines Körpers mit kontinuierlicher Masseverteilung zu berechnen, zelegen wir wie beschrieben den Körper in kleine, aber endliche Teilvolumina ΔV_i an den Orten \mathbf{r}_i . Jedem dieser Teilvolumina können wir eine Masse Δm_i zuordnen.

¹Wenn die Achse nicht durch den ausgezeichneten Punkt ginge, würden sich seine Koordinaten bei der Drehung ändern.


Figure 5.2: Zerlegung eines Körpers mit kontinuierlicher Masseverteilung

Auf diese Weise können wir den kontinuierlichen Körper näherungsweise als ein System von *N* Massepunkten beschreiben.

Wir können nun zunächst die Gesamtmasse des Körpers als Summe über die Teilmassen schreiben,

$$M \simeq \sum_{i} \Delta m_{i} = \sum_{i} \frac{\Delta m_{i}}{\Delta V_{i}} \Delta V_{i}.$$
(5.3)

Die Masse Δm_i des Volumens am Ort \mathbf{r}_i ist in erster Näherung proportional zum Volumen ΔV_i , so dass das Verhältnis von Masse zu Volumen im Limes $\Delta V_i \rightarrow 0$ gegen einen wohldefinierten Grenzwert strebt. Die so definierte Größe

$$\rho(\mathbf{r}_i) = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}.$$
(5.4)

bezeichnet man als Massendichte (oder einfach Dichte) des Körpers. Der Ausdruck für die Gesamtmasse wird dann zu

$$M \simeq \sum_{i} \rho(\mathbf{r}_{i}) \Delta V_{i}$$
(5.5)

und im Grenzübergang $\Delta V_i \rightarrow 0$ exakt. Hierbei soll der Grenzübergang so ausgeführt werden, dass die Anzahl der Volumenelemente *i* gleichzeitig gegen Unendlich geht, so dass die Geometrie und Dichteverteilung des starren Körpers immer genauer angenähert werden. Dieser Grenzübergang ist ganz analog zur Definition des gewöhnlichen Integrals einer Funktion f(x). Daher bezeichnet man es als Volumenintegral und schreibt

$$M = \int \mathrm{d}V \rho(\mathbf{r}). \tag{5.6}$$

Es sollte klar sein, dass man solche Integrale in allen Dimensionen definieren kann, d.h. dV muss nicht unbedingt ein dreidimensionales Volumenelement sein. Häufig schreibt man auch

$$M = \int d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \tag{5.7}$$

in drei Dimensionen oder allgemeiner $dV = d^d \mathbf{r}$ in *d* Dimensionen. Wir können den Körper mithilfe kleiner Quader der Seitenlängen dx, dy und dz ausfüllen. Das Volumenelement nimmt daher in kartesischen Koordinaten die Form

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\tag{5.8}$$



Figure 5.3: Körper mit $0 \le z \le L$ und dem in der Abbildung gezeigten Querschnitt paralle zur *xy*-Ebene mit Masseverteilung $\rho(x, y, z) = Ax \cdot y$. (Diese Verteilung ist völlig beliebig und hat keine besondere physikalische Bedeutung.)

an. Entsprechende Formeln für andere Koordinatensysteme werden wir weiter unten kennenlernen bzw. herleiten.

Analog können wir nun auch den Schwerpunkt des Körpers als Volumenintegral darstellen. Dazu gehen wir komponentenweise vor und folgen den gleichen Schritten wie für die Masse. Dies ergibt

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int dV \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}.$$
(5.9)

Zur Berechnung kann man jede Komponente des Schwerpunkts separat betrachten.

5.3 Berechnung von Volumenintegralen

Wir wollen nun die Berechnung von Volumenintegralen mit einem konkreten Beispiel illustrieren. Das Beispiel hat keine besondere physikalische Bedeutung.

• Wir betrachten das Integral

$$M = \int dx \, dy \, dz \, \rho(x, y, z), \qquad (5.10)$$

wobei die Form des Körpers sowie die Dichte $\rho(x, y, z)$ in Abb. 5.3 angegeben ist. Wir können nun die *x*-, *y*- und *z*-Integrale nacheinander berechnen,

$$M = A \int_0^L dz \int_0^L dy \int_0^{L-y} dx \, x \cdot y.$$
 (5.11)

Man beachte, dass wir zunächst für alle *y* und *z* entlang der *x*-Achse integrieren. Die Grenzen der *x*-Integration werden durch die Form des Körpers bestimmt. Nun berechnen wir

$$M = A \int_{0}^{L} dz \int_{0}^{L} dyy \int_{0}^{L-y} dxx$$

$$= A \int_{0}^{L} dz \int_{0}^{L} dyy \frac{1}{2} (L-y)^{2}$$

$$= A \int_{0}^{L} dz \int_{0}^{L} dyy \frac{1}{2} (L^{2} - 2Ly + y^{2})$$

$$= A \int_{0}^{L} dz \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}L^{2}y^{2} - \frac{2}{3}Ly^{3} + \frac{1}{4}y^{4} \right]_{0}^{L}$$

$$= AL \cdot \frac{L^{4}}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right]$$

$$= \frac{AL^{5}}{24}$$
(5.12)

Volumenintegrale lassen sich nicht nur in kartesischen Koordinaten, sondern auch in anderen Koordinatensystemen berechnen. Wir beginnen zunächst mit einem Flächenintegral mit dem Flächenelement $d^2 \mathbf{r} = dxdy$. In Polarkoordinaten betrachten wir Flächenelemente, die durch ein kleines Intervall dr von Radien und einen Winkelbereich d φ gebildet werden. Dies ist in Abb. 5.4 dargestellt. Das Flächenelement hat Seitenlängen dr und $r d\varphi$, so dass das Flächenelement in Polarkoordinaten die Form

$$d^2 \mathbf{r} = r dr d\varphi \tag{5.13}$$

annimmt. Als einfache Anwendung können wir dieses Flächenelement benutzen, um die Fläche eines Kreises mit Radius R zu berechnen und erhalten mit

$$F = \int_{|\mathbf{r}| < R} d^2 \mathbf{r} = \int_0^R r \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\pi = \pi R^2$$
(5.14)

das bekannte Resultat.

Mit dem Flächenelement in Polarkoordinaten folgt unmittelbar das Volumenelement

$$d^3 \mathbf{r} = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz \tag{5.15}$$

in Zylinderkoordinaten.

In Kugelkoordinaten hat das durch den Raumwinkel $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ und das Intervall d*r* von Radien aufgespannte Volumenelement die Grundfläche $r^2 d\Omega$ und die Höhe d*r*. Demnach wird das Volumenelement zu

$$d^{3}\mathbf{r} = r^{2} d\Omega dr = r^{2} \sin\theta dr d\theta d\phi$$
(5.16)

Dies können wir beispielsweise benutzen, um das Volumen einer Kugel mit Radius R zu berechnen, was auf das übliche Resultat

$$V = \int_{|\mathbf{r}| < R} d^3 \mathbf{r} = \int_0^R dr \, r^2 \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \cdot \left[-\cos\theta \right]_0^\pi \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3} R^3, \tag{5.17}$$

führt.

Schließlich wollen wir noch beliebige Koordinaten $\alpha, \beta, \gamma, ...$ betrachten. Diese sind (eindeutige) Funktionen der kartesischen Koordinaten x, y, ...,

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(x, y, \ldots) \\ \beta &= \beta(x, y, \ldots) \\ \vdots &\vdots \end{aligned}$$
 (5.18)



Figure 5.4: Flächenelement in Polarkoordinaten

Für Polarkoordinaten nehmen diese Relationen z.B. die Form $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ und $\varphi = \arctan(y/x)$ an. Die Umkehrungen sind dann

$$x = x(\alpha, \beta, ...)$$

$$y = y(\alpha, \beta, ...)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$
(5.19)

oder für Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$. Betrachten wir zunächst den Fall von zwei Dimensionen, so führen Änderungen von α und β um $d\alpha$ und $d\beta$ zu Änderungen von x und y um

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta} d\beta.$$
(5.20)

Nun können wir dx und dy zum Vektor d \mathbf{r} zusammenfassen und erhalten

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} d\beta = d\mathbf{r}_{\alpha} + d\mathbf{r}_{\beta}, \qquad (5.21)$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen d \mathbf{r}_{α} und d \mathbf{r}_{β} definiert. Die durch $d\alpha$ und $d\beta$ um (α, β) überstrichene Fläche wird demnach durch d \mathbf{r}_{α} und d \mathbf{r}_{β} aufgespannt und kann unter Benutzung der geometrischen Definition des Kreuzprodukts durch

$$d^{2}r = \left| d\mathbf{r}_{\alpha} \times d\mathbf{r}_{\beta} \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right| d\alpha d\beta$$
(5.22)

ausgedrückt werden. Schreiben wir den Betrag des Kreuzproduktes in Komponenten, so erhalten wir das Ergebnis

$$d^{2}\mathbf{r} = \left|\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right| d\alpha d\beta$$
(5.23)



Figure 5.5: Physikalisches Pendel mit fester Drehachse A.

Mithilfe dieser Formel können wir z.B. noch einmal das Flächenelement in Polarkoordinaten bestimmen. Hierzu benutzen wir $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$, so dass wir mit

$$d^{2}\mathbf{r} = [\cos\varphi(r\cos\varphi) - (-r\sin\varphi)\sin\varphi] dr d\varphi = r dr d\varphi$$
(5.24)

das bereits bekannte Ergebnis erhalten.

Analog können wir nun in drei Dimensionen mit Hilfe des Spatprodukts vorgehen. Somit erhalten wir den Ausdruck

$$d^{3}\mathbf{r} = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma}\right)\right| d\alpha d\beta d\gamma$$
(5.25)

für das Volumenelement in den allgemeinen Koordinaten α , β und γ .

~

~

Schließlich erwähnen wir noch, dass diese Ausdrücke mithilfe des Kreuz- bzw. Spatprodukts Spezialfälle einer allgemeinen Formel darstellen, der sogenannten Jacobi-Determinante

$$dx_1 dx_2 \dots dx_N = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial \alpha_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_N} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_N} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial \alpha_N} \end{vmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_N.$$
(5.26)

Zum Beweis dieser Determinantenformel wird auf die Mathematikvorlesungen verwiesen.

5.4 Das physikalische Pendel

Wir wollen nun die Bewegung eines starren Körpers betrachten, der sich im Schwerefeld der Erde um eine raumfeste Achse dreht, s. Abb. 5.5. Dies wird als physikalisches Pendel bezeichnet. Im Gegensatz zum bereits ausgiebig behandelten mathematischen Pendel muss hierbei die Verteilung der Masse im Raum berücksichtigt werden.

Die Bewegung des physikalischen Pendels kann mithilfe des Drehwinkels φ um diese Achse als einzigem Freiheitsgrad beschrieben werden. Wie bei allen eindimensionalen Systemen können wir die Bewegung des Pendels aus dem Energieerhaltungssatz ableiten. Wir betrachten zunächst die kinetische (Rotations-)Energie T des starren Körpers. Hierzu betrachten wir die Summe der kinetischen Energien der einzelnen Massepunkte,

$$T = \sum_{i} \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2. \tag{5.27}$$



Figure 5.6: Definition der Rotationsache beim physikalischen Pendel

Wir legen nun das Koordinatensystem derart, dass die feste Drehachse mit der z-Achse zusammenfällt, s. Abb. 5.6. Der *i*-te Massepunkt führt dann bei der Bewegung des starren Körpers eine Kreisbewegung mit Radius $\rho_i = [x_i^2 + y_i^2]^{1/2}$ und der Geschwindigkeit $v_i = \rho_i \dot{\phi}$ aus. Die Rotationsenergie wird daher zu

$$T = \sum_{i} \frac{m_{i}}{2} (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) \dot{\phi}^{2}$$

= $\frac{1}{2} J \dot{\phi}^{2}$. (5.28)

Hier haben wir das Trägheitsmoment

$$J = \sum_{i} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$
(5.29)

definiert. Aus dem Ausdruck für die Rotationsenergie folgt, dass für Rotationsbewegungen das Trägheitsmoment eine Rolle spielt, die analog zur Masse bei Translationsbewegungen ist.

Als kleinen Einschub bemerken wir, dass sich die Relation $v_i = \rho_i \dot{\phi}$ auch vektoriell schreiben lässt. Definieren wir einen Winkelgeschwindigkeitsvektor ω , dessen Betrag durch die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\phi}$ und dessen Richtung durch die Drehachse gegeben ist, so gilt

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i. \tag{5.30}$$

Diese Relation werden wir in späteren Abschnitten benötigen.

Nun betrachten wir die potentielle Energie $V(\varphi)$ des starren Körpers im Schwerefeld. Sie ist gleich der Summe der potentiellen Energien der einzelnen Massepunkten, und somit erhalten wir

$$V(\boldsymbol{\varphi}) = -\sum_{i} m_{i} \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{i} = -\mathbf{g} \cdot \sum_{i} m_{i} \mathbf{r}_{i} = -M \mathbf{g} \cdot \mathbf{R} = -M g R \cos \boldsymbol{\varphi}.$$
(5.31)



Figure 5.7: Physikalisches Pendel

Hier bezeichnet der Vektor **g** die Erdbeschleunigung. Im vorletzten Schritt haben wir die Definition des Schwerpunkts benutzt und im letzten Schritt die Definition des Drehwinkels wie in Abb. 5.7 dargestellt. Man beachte, dass *R* hier den Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse bezeichnet. Die potentielle Energie ist wie immer nur bis auf eine Konstante definiert, so dass wir alternativ

$$V(\boldsymbol{\varphi}) = m_{g}R(1 - \cos \boldsymbol{\varphi}) \tag{5.32}$$

schreiben können. Wir wollen im folgenden diesen Ausdruck verwenden. Beachte, dass sich die potentielle Energie so verhält, als sei die gesamte Masse im Schwerpunkt vereinigt.

Das Energieerhaltungsgesetz besagt nun für den starren Körper, dass

$$E = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + mgR(1 - \cos\varphi)$$
(5.33)

eine Konstante der Bewegung ist. Die Bewegung des physikalischen Pendels lässt sich auf dieser Basis wie üblich durch Trennung der Variablen lösen. Allerdings wollen wir dies hier nicht explizit durchführen. Vielmehr bemerken wir, dass die Energie E die gleiche Form annimmt, wie die Energie

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi)$$
(5.34)

eines mathematischen Pendels, sofern wir Größen geeignet miteinander identifizieren. Wir haben das Problem also zumindest im Prinzip bereits im Zusammenhang mit dem mathematischen Pendel gelöst und wollen diese Rechnung hier nicht noch einmal wiederholen. Beispielhaft für Konsequenzen aus dieser Äquivalenz wollen wir hier nur erwähnen, dass das physikalische Pendel bei kleinen Auslenkungen harmonische Schwingungen mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{MgR}{J}} \tag{5.35}$$

ausführt.

5.5 Trägheitsmomente und Steinerscher Satz

Im letzten Abschnitt haben wir das Trägheitsmoment eines starren Körpers eingeführt. Hier wollen wir nun das Trägheitsmoment für verschiedene Körper berechnen. Im Grenzfall einer

kontinuierlichen Massenverteilung geht der Ausdruck (5.29) in ein Volumenintegral über,

$$J = \int \mathrm{d}V \boldsymbol{\rho}(\mathbf{r})(x^2 + y^2),\tag{5.36}$$

wobei die Drehachse entlang der z-Achse liegt.

Wir beginnen mit dem Trägheitsmoment einer homogenen Kugel, deren Drehachse durch den Mittelpunkt – und damit durch den Schwerpunkt – gehen soll. Bezeichnen wir die Massendichte der Kugel mit ρ_0 , den Radius der Kugel mit R und die Masse der Kugel mit $M = (4\pi R^3/3)\rho_0$, so erhalten wir

$$J = \int dV \rho(\mathbf{r})(x^2 + y^2)$$

=
$$\int_0^R dr r^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho_0 r^2 \sin^2\theta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi).$$
 (5.37)

Hier haben wir das Volumenelement und den Integranden in Kugelkoordinaten ausgedrückt. Benutzen wir die Identität $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, so können wir das Integral leicht berechnen, indem wir $\zeta = \cos \theta$ als neue Integrationsvariable einführen,

$$J = \rho_0 \int_0^R dr r^4 \int_0^{\pi} d\theta \sin^3 \theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

= $2\pi \rho_0 \frac{R^5}{5} \int_{-1}^1 d\zeta (1 - \zeta^2)$
= $2\pi \rho_0 \frac{R^5}{5} \frac{4}{3}$
= $\frac{2}{5} M R^2$. (5.38)

Interessanterweise kann man dieses Resultat auch noch einfacher erhalten, indem man die Symmetrie einer Kugel ausnutzt. Aufgrund der Symmetrie gilt offensichtlich

$$\int dV \rho(\mathbf{r}) x^2 = \int dV \rho(\mathbf{r}) y^2 = \int dV \rho(\mathbf{r}) z^2$$
(5.39)

und somit

$$\int dV \,\rho(\mathbf{r})(x^2 + y^2) = \frac{2}{3} \int dV \,\rho(\mathbf{r})(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{2}{3} \int dV \,\rho(\mathbf{r})r^2.$$
(5.40)

Führen wir nun Kugelkoordinaten ein, so ist der Integrand unabhängig von den Winkeln und die Winkelintegrale geben schlicht den gesamten Raumwinkel 4π ,

$$J = \frac{2}{3} \int_0^R dr r^2 \int d\Omega \rho_0 r^2$$

= $\frac{2}{3} 4\pi \rho_0 \int_0^R dr r^4$, (5.41)

woraus unmittelbar wieder das bereits bekannte Resultat (5.38) folgt.

Als nächstes wollen wir einen homogenen Zylinder mit Radius *R*, Höhe *H* und Masse $M = \pi R^2 H \rho_0$ betrachten, der sich um seine Symmetrieachse dreht, s. Abb. 5.8. Berechnen wir das Volumenintegral in Zylinderkoordinanten mit der *z*-Achse entlang der Symmetrieachse, so erhalten



Figure 5.8: Zylinder

wir

$$J = \int dV \rho(\mathbf{r})(x^2 + y^2)$$

= $\rho_0 \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \rho^2$
= $\rho_0 2\pi H \cdot \frac{R^4}{4}$
= $\frac{1}{2}MR^2$. (5.42)

Man beachte, dass auch in diesem Fall die Drehachse durch den Schwerpunkt des Zylinders geht.

Nun wollen wir das Trägheitsmoment für den Fall untersuchen, dass die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt geht. Es stellt sich heraus, dass dieser Fall allgemein mithilfe des Steinerschen Satzes behandelt werden kann: Das Trägheitsmoment J bezüglich einer (beliebigen) Drehachse setzt sich additiv zusammen aus dem Trägheitsmoment J_S bezüglich der zu ihr parallelen Achse durch den Schwerpunkt sowie dem Trägheitsmoment der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse M bezüglich der Drehachse,

$$J = J_S + MS^2. \tag{5.43}$$

Hier bezeichnet S den Abstand der beiden Achsen.

Um den Steinerschen Satz zu beweisen, führen wir neben einem (gestrichenen) Koordinatensystem mit Ursprung im Schwerpunkt und *z*-Achse parallel zur Drehachse noch ein zweites (ungestrichenes) Koordinatensystem ein, dessen Koordinatenachsen parallel verlaufen mit der *z*-Achse entlang



Figure 5.9: Zum Beweis des Steinerschen Satzes (FALSCH, da Y und Z ACHSE VERTAUSCHT)

der Drehachse. Bezeichnen wir die Koordinaten des Schwerpunkts im ungestrichenen Koordinatensystem mit $\mathbf{R} = (R_x, R_y, 0)$, so gilt $x_i = \bar{x}_i + R_x$, $y_i = \bar{y}_i + R_y$ sowie $z_i = \bar{z}_i$. Nun erhalten wir für das Trägheitsmoment relativ zur (nicht durch den Schwerpunkt gehenden) Drehachse

$$J = \sum_{i} m_{i}(x_{i}^{2} + y_{i}^{2})$$

$$= \sum_{i} \left[(\bar{x}_{i} + R_{x})^{2} + (\bar{y}_{i} + R_{y})^{2} \right]$$

$$= \sum_{i} m_{i} (\bar{x}_{i}^{2} + \bar{y}_{i}^{2}) + \sum_{i} m_{i} (R_{x}^{2} + R_{y}^{2}) + 2\sum_{i} m_{i} (\bar{x}_{i}R_{x} + \bar{y}_{i}R_{y}).$$
(5.44)

Nun beachten wir, dass nach Definition des Schwerpunkts $\sum_i m_i \bar{x}_i = \sum_i m_i \bar{y}_i = 0$. Da nun der erste Term auf der rechten Seite gerade das Trägheitsmoment J_S bezüglich der parallelen Schwerpunktachse und der zweite Term das Drehmoment MS^2 der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse bzgl. der Drehachse ist, so finden wir tatsächlich den Steinerschen Satz.

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Steinerschen Satz ist, dass für einen Satz paralleler Drehachsen die Achse durch den Schwerpunkt das kleinste Trägheitsmoment liefert.

5.6 Bewegungsgleichungen

5.6.1 Schwerpunkt

Für das physikalische Pendel konnten wir die Bewegung mithilfe des Energieerhaltungssatzes berechnen. Dies war möglich, da wir es hier mit nur einem Freiheitsgrad zu tun hatten. Im allgemeinen hatten wir gesehen, dass starre Körper sechs Freiheitsgrade besitzen. Dementsprechend brauchen wir sechs Bewegungsgleichungen. Wir betrachten in diesem Kapitel einen starren Körper, der sich frei im Raum bewegt und keine festen Achsen (physikalisches Pendel) oder Punkte (Kreisel) hat.

Die Translationsbewegung des starren Körpers kann durch die Bewegung des Schwerpunkts beschrieben werden. Wir haben bereits in Kap. 3.5.2 gesehen, dass in einem *N*-Teilchen-System die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen nicht in der Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt **R** auftreten, sondern nur die äußeren Kräfte. Laut Glg. (3.99) bewegt sich der Schwerpunkt so, als ob die gesamte äußere Kraft im Schwerpunkt angreift,

$$M\mathbf{\hat{R}} = \mathbf{F}_{\text{tot}}.$$

Betrachten wir speziell einen starren Körper im homogenen Schwerefeld, so ist die äußere Kraft einfach $\mathbf{F}_{tot} = M\mathbf{g}$ und die Bewegungsgleichung nimmt die Form

 $M\ddot{\mathbf{R}} = M\mathbf{g} \tag{5.46}$

an. Diese Gleichung ist unabhängig von der Rotationsbewegung und beschreibt die Translationsbewegung des starren Körpers. Man beachte, dass sie drei Komponenten hat und somit die Bewegung der drei Translationsfreiheitsgrade vollständig beschreibt.

Wir brauchen nun noch drei Bewegungsgleichungen (oder eine vektorielle Bewegungsgleichung) für die Rotationsbewegung. Die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt haben wir aus der Betrachtung des Gesamtimpulses des starren Körpers gewonnen, s. Kap. 3.5.2. Für die Rotationsbewegung betrachten wir nun analog den Gesamtdrehimpuls.

5.6.2 Drehimpuls eines N-Körper Systems

Wir hatten bereits in Kapitel 3.5.1 die Zeitableitung des Drehimpulses für ein einzelnes Teilchen betrachtet,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M},\tag{5.47}$$

wobei $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ das durch eine angreifende Kraft verursachte Drehmoment bezeichnet. Hier wollen wir nun fragen, wie sich der Gesamtdrehimpuls

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_{i} = \sum_{i=1}^{N} m_{i} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{v}_{i}$$
(5.48)

eines *N*-Teilchen Systems zeitlich ändert. Auf die Teilchen wirken sowohl die inneren Kräfte aufgrund von paarweisen Wechselwirkungen \mathbf{F}_{ij} als auch äußere Kräfte $\mathbf{F}_i^{(a)}$, die daher rühren, dass sich das System in einem externen Kraftfeld (z.B. einem Schwerefeld) befindet. Dann ist die auf das *i*-te Teilchen wirkende Kraft durch

$$\mathbf{F}_{i} = \mathbf{F}_{i}^{(a)} + \sum_{j} \mathbf{F}_{ij}$$
(5.49)

gegeben, wobei \mathbf{F}_{ij} die vom *j*-ten auf das *i*-te Teilchen ausgeübte Kraft bezeichnet. Wir verabreden, dass $\mathbf{F}_{ii} = 0$, da die Teilchen keine Kräfte auf sich selbst ausüben können.

Wir betrachten nun die Zeitableitung des Gesamtdrehimpulses (5.48),

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i} m_{i} \dot{\mathbf{r}}_{i} \times \mathbf{v}_{i} + \sum_{i} m_{i} \mathbf{r}_{i} \times \dot{\mathbf{v}}_{i}.$$
(5.50)

Der erste Term auf der rechten Seite verschwindet, da $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$ und somit das Kreuzprodukt verschwindet. Den zweiten Term können wir mithilfe der Newtonschen Bewegungsgleichung für das *i*-te Teilchen

$$m\dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \sum_j \mathbf{F}_{ij}$$
(5.51)

umschreiben und erhalten somit

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \left(\mathbf{F}_{i}^{(a)} + \sum_{j} \mathbf{F}_{ij} \right).$$
(5.52)

Wir können nun zunächst zeigen, dass das durch die inneren Kräfte verursachte Drehmoment verschwindet. Hierzu formen wir den entsprechenden Term auf der rechten Seite um,

$$\sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \sum_{j} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{ij} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_{j} \times \mathbf{F}_{ji} \right).$$
(5.53)

Hier haben wir ausgenutzt, dass wir in der Doppelsumme über *i* und *j* die Benennung der Summationsindizes vertauchen können, ohne die Summe zu ändern. Nun beachten wir, dass nach dem dritten Newtonschen Gesetz $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Somit erhalten wir

$$\sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \sum_{j} \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{ij} - \mathbf{r}_{j} \times \mathbf{F}_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\mathbf{r}_{i} - \mathbf{r}_{j}) \times \mathbf{F}_{ij}.$$
(5.54)

Nach dem dritten Newtonschen Gesetz wirkt die Kraft \mathbf{F}_{ij} entlang der Verbindungslinie der beiden Teilchen, d.h. sie ist parallel zu ihrem Verbindungsvektor $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Somit erhalten wir tatsächlich, dass das durch die inneren Kräfte ausgeübte Drehmoment verschwindet,

$$\sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \sum_{j} \mathbf{F}_{ij} = 0.$$
(5.55)

Der Gesamtdrehimpuls ist also eine Erhaltungsgröße, wenn das am System angreifende, totale äußere Drehmoment

$$\mathbf{M}^{(a)} = \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{i}^{(a)}$$
(5.56)

verschwindet.

Besonders häufig hat man es mit dem Fall zu tun, dass die äußere Kraft die auf die Teilchen wirkende Gewichtskraft ist. Dann ist $\mathbf{F}_i^{(a)} = m_i \mathbf{g}$, wobei \mathbf{g} wieder die vektorielle Erdbeschleunigung bezeichnet, und wir erhalten für das äußere Drehmoment

$$\mathbf{M}^{(a)} = \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times m_{i} \mathbf{g} = \sum_{i} m_{i} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{g}.$$
(5.57)

Dies können wir nun mithilfe des Schwerpunkts

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i} m_{i} \mathbf{r}_{i}}{\sum_{i} m_{i}} \tag{5.58}$$

des N-Teilchen-Systems vereinfachen und erhalten

$$\mathbf{M}^{(\mathbf{a})} = \mathbf{R} \times M\mathbf{g}. \tag{5.59}$$

Das durch die Schwerkraft verursachte äußere Drehmoment wirkt also so, als ob die gesamte Masse im Schwerpunkt vereinigt wäre.

Wenden wir nun diese Ergebnisse auf starre Körper an, so erhalten wir eine weitere Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(a)}.$$
(5.60)

Wirkt auf den starren Körper nur die Schwerkraft, so wird hieraus

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{R} \times M\mathbf{g}.$$
(5.61)

Diese Gleichung hat im allgemeinen drei Komponenten. Zusammen mit der Bewegungsgleichung (5.45) für den Schwerpunkt haben wir also eine ausreichende Anzahl von Bewegungsgleichungen für die sechs Freiheitsgrade eines starren Körpers.

Es ist häufig hilfreich, ein internes Koordinatensystem einzuführen, das seinen Ursprung im Schwerpunkt des *N*-Teilchen-Systems hat. Im allgemeinen ist dies natürlich kein Inertialsystem, da sich der Schwerpunkt beliebig bewegen kann. Wir bezeichnen nun die Koordinaten der Teilchen bzgl. des Schwerpunkts **R** mit gestrichenen Ortsvektoren \mathbf{r}'_i . Dann hängen diese mit den Ortsvektoren \mathbf{r}_i im Inertialsystem zusammen über (s. Abb. 5.10)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i. \tag{5.62}$$

Ebenso gilt dann für die Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}_i',\tag{5.63}$$

wobei $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ die Schwerpunktgeschwindigkeit bezeichnet. Aus der Definition des Schwerpunktes folgt

$$M\mathbf{R} = \sum_{i} m_i \left(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \right) = M\mathbf{R} + \sum_{i} m_i \mathbf{r}'_i$$
(5.64)



Figure 5.10: Zusammenhang zwischen raumfesten Koordinatensystem x, y, z und körperfesten Koordinatensystem x', y', z'.

und somit

$$\sum_{i} m_i \mathbf{r}'_i = 0 \tag{5.65}$$

sowie durch Zeitableitung

$$\sum_{i} m_i \mathbf{v}'_i = 0. \tag{5.66}$$

Dies können wir nun benutzen, um den Gesamtdrehimpuls als Summe von Schwerpunktsdrehimpuls und internem Drehimpuls zu schreiben. Hierzu betrachten wir

$$\mathbf{L} = \sum_{i} m_{i} \left(\mathbf{R} + \mathbf{r}_{i}^{\prime} \right) \times \left(\mathbf{V} + \mathbf{v}_{i}^{\prime} \right)$$

$$= \sum_{i} m_{i} \left(\mathbf{R} \times \mathbf{V} \right) + \sum_{i} m_{i} \mathbf{R} \times \mathbf{v}_{i}^{\prime} + \sum_{i} m_{i} \mathbf{r}_{i}^{\prime} \times \mathbf{V} + \sum_{i} m_{i} \mathbf{r}_{i}^{\prime} \times \mathbf{v}_{i}^{\prime}$$

$$= M \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \sum_{i} m_{i} \mathbf{v}_{i}^{\prime} + \sum_{i} m_{i} \mathbf{r}_{i}^{\prime} \times \mathbf{V} + \sum_{i} m_{i} \mathbf{r}_{i}^{\prime} \times \mathbf{v}_{i}^{\prime}$$

$$= \mathbf{L}_{\mathrm{SP}} + \mathbf{L}^{\prime}. \qquad (5.67)$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass in der vorletzten Zeile der zweite und der dritte Term aufgrund der Glg. (5.65) and (5.66) verschwinden. Ferner haben wir den Schwerpunktsdrehimpuls

$$\mathbf{L}_{\rm SP} = M\mathbf{R} \times \mathbf{V} \tag{5.68}$$

sowie den internen Drehimpuls

$$\mathbf{L}' = \sum_{i} m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \tag{5.69}$$

definiert. Der Schwerpunktsdrehimpuls bezeichnet den Drehimpuls der im Schwerpunt vereinigten Gesamtmasse bzgl. des Ursprungs des Inertialsystems und der interne Drehimpuls den Drehimpuls des *N*-Teilchen-Systems bzgl. seines Schwerpunkts. Für die zeitliche Änderung des Schwerpunktdrehimpulses erhalten wir

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{SP}} = M\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{V} + M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}^{(a)}.$$
(5.70)

Der Schwerpunktdrehimpuls ändert sich also so, als ob die totale äußere Kraft $\mathbf{F}^{(a)} = \sum_{i} \mathbf{F}_{i}^{(a)}$ im Schwerpunkt angreifen und somit ein Drehmoment $\mathbf{R} \times \mathbf{F}^{(a)}$ ausüben würde. Für die zeitliche Änderung des inneren Drehimpulses gilt

$$\dot{\mathbf{L}}' = \dot{\mathbf{L}} - \dot{\mathbf{L}}_{SP} = \sum_{i} (\mathbf{r}_{i} - \mathbf{R}) \times \mathbf{F}_{i}^{(a)} = \sum_{i} \mathbf{r}_{i}' \times \mathbf{F}_{i}^{(a)}.$$
(5.71)

Der innere Drehimpuls ändert sich also nach dem durch die externen Kräfte bezüglich des Schwerpunkts hervorgerufenen Drehmoments.

Wenden wir dies nun auf den Fall an, dass sich der starre Körper in einem Schwerefeld bewegt, so gilt $\sum_{i} r'_{i} \times \mathbf{F}_{i}^{(a)} = \sum_{i} r'_{i} \times m_{i} \mathbf{g} = \sum_{i} m_{i} r'_{i} \times \mathbf{g} = 0$. Hier haben wir im letzten Schritt Glg. (5.65) ausgenutzt. Die Bewegung des starren Körpers wird nun durch die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{P}} = M\mathbf{g} \tag{5.72}$$

sowie

$$\dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{0} \tag{5.73}$$

beschrieben. Die Gleichung (5.70) für den Schwerpunktsdrehimpuls kann auch direkt aus der Bewegungsgleichung (5.45) abgeleitet werden und enthält demnach keine neue Information.² Die erste Gleichung beschreibt die Translationsbewegung, die zweite die Rotationsbewegung starren Körpers. Beide Bewegungen sind voneinander unabhängig.

Auf den ersten Blick scheint Glg. (5.73) für die Rotationsbewegung trivial zu sein. Das ist aber nicht der Fall, und es ist immer noch eine nicht-triviale Aufgabe, die Bewegung des starren Körpers aus Glg. (5.73) zu bestimmen. Warum das so ist, können wir nach dem folgenden Abschnitt zumindest erahnen.

5.7 Trägheitstensor

Da im Schwerefeld Translations- und Rotationsbewegung voneinander unabängig sind, betrachten wir nun der Einfachheit halber einen starren Körper, dessen Schwerpunkt fest verankert ist. Dann brauchen wir nur die Rotationsbewegung zu betrachten. Wir brauchen dann auch keinen Unterschied zu machen zwischen ungestrichenem und gestrichenem Koordinatensystem, da wir den Koordinatenursprung einfach in den Schwerpunkt legen können. Im Folgenden werden wir daher die Striche weglassen, auch wenn die Größen relativ zum Schwerpunkt definiert sind.

Um die Bewegungsgleichung in einer sinnvollen Form zu schreiben, müssen wir einen Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers ableiten.³ Hierzu gehen wir von der Formel für den Gesamtdrehimpuls

$$\mathbf{L} = \sum_{i} m_{i} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{v}_{i} \tag{5.74}$$

²Dies folgt den gleichen Schritten, die in Kap. 3.5.1 im Rahmen der Mechanik für einen Massepunkt dargestellt sind.

³Um die Bewegungsgleichung eines Massepunkts aus $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}$ zu erhalten, benötigen wir den Zusammenhang $\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{v}}$ zwischen Impuls und Geschwindigkeit.

aus und ersetzen die Geschwindigkeiten v_i mithilfe von Glg. (5.30). Dies ergibt

$$\mathbf{L} = \sum_{i} m_{i} \mathbf{r}_{i} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i}).$$
(5.75)

Nun können wir das doppelte Kreuzprodukt vereinfachen, indem wir Glg. (1.10) anwenden. Dies gibt

$$\mathbf{L} = \sum_{i} m_{i} [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_{i} \cdot \mathbf{r}_{i}) - \mathbf{r}_{i}(\mathbf{r}_{i} \cdot \boldsymbol{\omega})].$$
(5.76)

Der Drehimpuls ist offenbar linear in der Winkelgeschwindigkeit ω . Um diesen linearen Zusammenhang besser herauszuarbeiten, schreiben wir Glg. (5.76) in Komponenten. Wir notieren die Vektorkomponenten *x*, *y*, *z* mit griechischen Buchstaben α , β etc., um sie vom Teilchenindex *i* zu unterscheiden. Wir erhalten

$$L_{\alpha} = \sum_{i} m_{i} [\omega_{\alpha} \sum_{\gamma} r_{i,\gamma} r_{i,\gamma} - r_{i,\alpha} \sum_{\beta} r_{i,\beta} \omega_{\beta}].$$
(5.77)

Wir benutzen nun die Identität

$$\omega_{\alpha} = \sum_{\beta} \delta_{\alpha\beta} \omega_{\beta}. \tag{5.78}$$

Hier bezeichnet $\delta_{\alpha\beta}$ das Kronecker-Symbol, das wir bereits in Kapitel 1.1 kennengelernt haben. Einsetzen in den Ausdruck für L gibt

$$L_{\alpha} = \sum_{i} m_{i} \sum_{\beta} \omega_{\beta} \left[\delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} r_{i,\gamma} r_{i,\gamma} - r_{i,\alpha} r_{i,\beta} \right]$$
$$= \sum_{\beta} \left\{ \sum_{i} m_{i} \left[\delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} r_{i,\gamma} r_{i,\gamma} - r_{i,\alpha} r_{i,\beta} \right] \right\} \omega_{\beta}.$$
(5.79)

Wir können nun die Summe über β als Matrixmultiplikation identifizieren. In der Tat können wir eine 3 × 3 Matrix

$$J_{\alpha\beta} = \sum_{i} m_{i} [\delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} r_{i,\gamma} r_{i,\gamma} - r_{i,\alpha} r_{i,\beta}]$$
(5.80)

definieren, die unabhängig von der Winkelgeschwindigkeit ist und den starren Körper charakterisiert. Diese Größe bezeichnet man als Trägheitstensor, eine Größe, die das Trägheitsmoment verallgemeinert auf starre Körper, die nicht um eine feste Drehachse rotieren.

Mit dem Trägheitstensor können wir den Drehimpuls nun in Matrixschreibweise ausdrücken als

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}. \tag{5.81}$$

Dieser Zusammenhang drückt aus, dass Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit linear zusammenhängen, aber nicht notwendigerweise parallel zueinander sind. Bisher waren uns nur skalare und vektorielle Größen begegnet. Dies ist die erste Größe, die Matrixcharakter hat. In der Physik bezeichnet man solche Größen als Tensoren. Es gibt viele solche tensorielle Größen in der Physik. So hat z.B. sogar das elektromagnetische Feld in der Relativitätstheorie Tensorcharakter. Wir werden dies hier nicht weiter vertiefen und nur noch einmal kurz im nächsten Kapitel auf die allgemeinen Symmetrieeigenschaften von Tensoren in der Physik zurückkommen. Um den engen Zusammenhang von Trägheitstensor und Trägheitsmoment zu sehen, ist es hilfreich, den Trägheitstensor explizit in Komponenten zu schreiben,

$$J = \begin{pmatrix} \sum_{i} m_{i}(y_{i}^{2} + z_{i}^{2}) & -\sum_{i} m_{i} x_{i} y_{i} & -\sum_{i} m_{i} x_{i} z_{i} \\ -\sum_{i} m_{i} y_{i} x_{i} & \sum_{i} m_{i} (x_{i}^{2} + z_{i}^{2}) & -\sum_{i} m_{i} y_{i} z_{i} \\ -\sum_{i} m_{i} z_{i} y_{i} & -\sum_{i} m_{i} z_{i} y_{i} & \sum_{i} m_{i} (y_{i}^{2} + z_{i}^{2}) \end{pmatrix}.$$
(5.82)

Wir sehen, dass die Diagonalelemente gerade gleich den Trägheitsmomenten um die entsprechenden Achsen sind, d.h. z.B. die Komponente J_{zz} ist gerade gleich dem Trägheitsmoment um die *z*-Achse.

Eine wichtige Eigenschaft des Trägheitstensors ist die Tatsache, dass er symmetrisch ist, d.h. es gilt $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha}$ oder in Matrixnotation $J = J^T$. Hier ist J^T die zu J transponierte Matrix. Es ist nun eine allgemeiner Satz der Linearen Algebra, dass man für symmetrische Matrizen immer ein Koordinatensystem finden kann, in dem sie diagonal werden. In unserem Fall heißt das konkret, dass es (mindestens) ein Koordinatensystem von x, y und z-Achsen gibt, in dem der Trägheitstensor diagonal wird, so dass nur seine Diagonalelemente J_{xx} , J_{yy} und J_{zz} von Null verschieden sind. Dieses Koordinatensystem heißt Hauptachsensystem des starren Körpers und die zugehörigen Koordinatenachsen Hauptachsen. Es ist häufig hilfreich, die Dynamik des starren Körpers in diesem Hauptachsensystem zu diskutieren. Diese Diskussion geht aber über diese Vorlesung hinaus.

Hier wollen wir nur noch zeigen, dass der Trägheitstensor auch in der Rotationsenergie des starren Körpers auftritt. Hierzu berechnen wir

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} \mathbf{v}_{i}^{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i})^{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} \left[\boldsymbol{\omega}^{2} \mathbf{r}_{i}^{2} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{i})^{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} \left[\sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^{2} \mathbf{r}_{i}^{2} - \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} r_{i\alpha} \sum_{\beta} \omega_{\beta} r_{i\beta} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta} \sum_{i} m_{i} \left[\mathbf{r}_{i}^{2} \delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha} r_{i\beta} \right].$$
(5.83)

Wir können also die Rotationsenergie als

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} J_{\alpha\beta} \,\omega_{\alpha} \,\omega_{\beta} \tag{5.84}$$

schreiben.



Teil III – Relativität

6 Spezielle Relativitätstheorie 127

- 6.1 Größen in der Physik
- 6.2 Inertialsysteme und Galilei-Transformationen
- 6.3 Postulate der speziellen Relativitätstheorie
- 6.4 Relativität der Gleichzeitigkeit
- 6.5 Zeitdilatation
- 6.6 Längenkontraktion
- 6.7 Die Lorentz-Transformationen
- 6.8 Relativistische Addition von Geschwindigkeiten
- 6.9 Der relativistische Dopplereffekt
- 6.10 Äquivalenz von Masse und Energie
- 6.11 Der Impuls in der Relativitätstheorie
- 6.12 Die kinetische Energie in der Relativitätstheorie
- 6.13 Relativistische Dynamik
- 6.14 Transformation von Impuls und Energie
- 6.15 Viererskalare, Vierervektoren und Vierertensoren

6. Spezielle Relativitätstheorie

In diesem Kapitel werden wir die Grundzüge der speziellen Relativitätstheorie behandeln. Die spezielle Relativitätstheorie ist ein schönes Beispiel für eine physikalische Theorie, deren Aussagen systematisch aus wenigen, experimentell begründeten Postulaten abgeleitet werden können.

6.1 Größen in der Physik

In der bisherigen Diskussion der Newtonschen Mechanik haben wir einige fundamentale Aspekte naiv oder gar nicht diskutiert. So haben wir gesehen, dass es verschiedene Arten von physikalischen Größen gibt – Skalare wie die Masse oder die Energie, Vektoren wie die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung, Tensoren wie den Trägheitstensor. Wir haben aber nicht genau definiert, wodurch sich diese verschiedenen Klassen von Größen wirklich auszeichnen. Dies wollen wir in diesem Abschnitt nachholen.

Nach der bisherigen Definition sind z.B. Skalare Größen, die durch eine Zahl (samt Einheit) charakterisiert werden. Vektoren sind Größen, die durch Betrag und Richtung spezifiziert werden. Wir hatten auch bereits gesehen, dass die Komponenten eines Vektors nicht absolut gegeben sind, sondern vom gewählten Koordinatensystem abhängen. Die physikalische Definition von Skalaren, Vektoren und Tensoren beruht genau auf diesem Verhalten unter Änderungen des Koordinatensystems.

Konkret betrachten wir Drehungen und Spiegelungen des Koordinatensystems. Dann können wir Skalare und Vektoren definieren, indem wir physikalische Größen nach ihrem Verhalten unter solchen Transformationen des Koordinatensystems klassifizieren:

- Eine physikalische Größe ist ein Skalar, wenn sie durch *eine* Zahl (und Einheit) festgelegt ist und *unabhängig* vom Koordinatensystem ist. Beispiele für Skalare sind die Energie oder die Masse. Kein Skalar ist aber beispielsweise die *x*-Komponente des Ortsvektors eines Teilchens. Diese wird zwar durch eine Zahl samt Einheit angegeben, hängt aber vom gewählten Koordinatensystem ab.
- Eine physikalische Größe ist ein Vektor, wenn sie durch ein Zahlentripel angegeben wird, das sich sich auf ein Koordinatensystem bezieht und sich bei Koordinatentransformationen (d.h. Drehungen und Spiegelungen) wie die Komponenten einer gerichteten Strecke trans-



Figure 6.1: Drehung des Koordinatensystems um einen Winkel α

formiert. Beispiele für Vektoren sind die Geschwindigkeit, die Beschleunigung, die Kraft oder elektrische und magnetische Felder. Natürlich sind *nicht* alle Zahlentripel Vektoren. So sind z.B. die drei täglichen Abfahrtszeiten (t_1, t_2, t_3) eines Zuges von *A* nach *B* kein Vektor, da sie sich nicht auf ein Koordinatensystem beziehen.

Wir wollen nun das Transformationsverhalten von Vektoren mathematisch etwas genauer beschreiben. Im Anschluss werden wir dann auch noch einmal auf Tensoren zurückkommen. Wir beginnen zunächst mit Drehungen des Koordinatensystems. Um die Diskussion nicht unnötig zu belasten, beschränken wir uns auf Drehungen in der xy-Ebene, d.h. um die z-Achse. Bei solchen Drehungen bleibt die z-Komponente der Vektoren unverändert, so dass wir im folgenden nur die x- und y-Komponenten der Vektoren anschreiben. (Alternativ können wir uns vorstellen, dass wir Vektoren und Drehungen in einer zweidimensionalen Welt betrachten.) Eine entsprechende Drehung des Koordinatensystems um einen Winkel α ist in Abb. 6.1 dargestellt. Betrachtet man nun den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}_x$ entlang der x-Richtung des ungestrichenen Koordinatensystems, so kann man seine Komponenten im gestrichenen Koordinatensystem leicht bestimmen. So ist seine Komponente entlang von $\hat{\mathbf{e}}'_x$, d.h. der x-Richtung des gestrichenen Koordinatensystems, cos α und entlang von $\hat{\mathbf{e}}'_y$ entsprechend – sin α . Somit erhalten wir die Identität

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \cos\alpha \hat{\mathbf{e}}_x' - \sin\alpha \hat{\mathbf{e}}_y'. \tag{6.1}$$

Ebenso erhalten wir für den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}_{v}$ den Ausdruck

$$\hat{\mathbf{e}}_{y} = \sin \alpha \hat{\mathbf{e}}_{x}' + \cos \alpha \hat{\mathbf{e}}_{y}'. \tag{6.2}$$

Mit diesen Relationen können wir nun bestimmen, wie die Komponenten eines beliebigen Vektors **a** beim Übergang zwischen den beiden Koordinatensystemen transformieren. Hierzu drücken wir den Vektor **a** zunächst mithilfe seiner Koordinaten a_x und a_y im ungestrichenen Koordinatensystem aus,

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{\hat{e}}_x + a_y \mathbf{\hat{e}}_y, \tag{6.3}$$

und setzen die Glg. (6.1) und (6.2) ein. Wir erhalten

$$\mathbf{a} = a_x(\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}'_x - \sin\alpha\hat{\mathbf{e}}'_y) + a_y(\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}'_x + \cos\alpha\hat{\mathbf{e}}'_y) = (a_x\cos\alpha + a_y\sin\alpha)\hat{\mathbf{e}}'_x + (-a_x\sin\alpha + a_y\cos\alpha)\hat{\mathbf{e}}'_y.$$
(6.4)

Vergleichen wir dies mit der Darstellung des Vektors mithilfe seiner Koordinaten a'_x und a'_y im gestrichenen Koordinatensystem,

$$\mathbf{a} = a'_x \mathbf{\hat{e}}'_x + a'_y \mathbf{\hat{e}}'_y, \tag{6.5}$$

so erhalten wir als Zusammenhang der Vektorkomponenten bei Drehungen des Koordinatensystems die Relationen

$$\begin{aligned} a'_{x} &= a_{x} \cos \alpha + a_{y} \sin \alpha \\ a'_{y} &= -a_{x} \sin \alpha + a_{y} \cos \alpha. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Diese Gleichungen geben an, wie sich die Komponenten eines Vektors ändern, wenn das Koordinatensystem um einen Winkel α in der *xy*-Ebene gedreht wird.

Wir können den Zusammenhang zwischen den Darstellungen des Vektors in beiden Koordinatensystemen auch in Matrixschreibweise ausdrücken. Hierzu schreiben wir Glg. (6.7) als

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}.$$
(6.7)

Auf der linken Seite steht der Vektor **a** als Spaltenvektor im gestrichenen Koordinatensystem. Rechts steht das Produkt der sogenannten Drehmatrix

$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$
(6.8)

und der Komponentendarstellung des Vektors **a** im ungestrichenen Koordinatensystem. Mithilfe der Drehmatrix können wir schließlich das Transformationsverhalten von Vektoren unter Drehungen des Koordinatensystems zu

$$\begin{pmatrix} a'_{x} \\ a'_{y} \end{pmatrix} = D(\alpha) \begin{pmatrix} a_{x} \\ a_{y} \end{pmatrix}.$$
(6.9)

zusammenfassen.

Führen wir zwei Drehungen des Koordinatensytems um die z-Achse hintereinander aus, eine erste Drehung um den Winkel α und anschließend eine zweite um den Winkel β , so gilt

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = D(\alpha) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$
(6.10)

und

$$\begin{pmatrix} a_x''\\a_y'' \end{pmatrix} = D(\beta) \begin{pmatrix} a_x'\\a_y' \end{pmatrix}.$$
 (6.11)

Setzen wir diese Gleichungen ineinander ein, so erhalten wir einen Zusammenhang zwischen dem doppeltgestrichenen und dem ungestrichenen Koordinatensystem,

$$\begin{pmatrix} a''_x \\ a''_y \end{pmatrix} = D(\beta)D(\alpha) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}.$$
(6.12)

Hintereinanderausführen von Drehungen spiegelt sich also in Matrixmultiplikationen der entsprechenden Drehmatrizen wieder. Anstatt die zwei Drehungen hintereinander auszuführen, hätten wir alternativ auch gleich eine Drehung um die Summe der Winkel, d.h. um den Winkel $\alpha + \beta$ ausführen können. Dies liefert den Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} a_x''\\a_y'' \end{pmatrix} = D(\alpha + \beta) \begin{pmatrix} a_x\\a_y \end{pmatrix}.$$
(6.13)

Durch Vergleich der Gleichungen (6.12) und (6.13) erhalten wir die Identität

$$D(\alpha + \beta) = D(\beta)D(\alpha) \tag{6.14}$$

Rechnet man die Matrixmultiplikation auf der rechten Seite dieser Gleichung explizit aus, so erhalten wir Zusammenhänge zwischen $\cos(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha + \beta)$ auf der einen Seite und $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \beta$ und $\sin \beta$ auf der anderen. Dies sind natürlich gerade die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus.

Mathematisch bilden die Drehungen also eine sogenannte Gruppe. Denn sie erfüllen die folgenden fundamentalen Eigenschaften einer Gruppe:

- Das Hintereinanderausführen zweier Drehungen ist wieder eine Drehung. Alternativ: Die Matrixmultiplikation zweier Drehmatrizen ist wieder eine Drehmatrix.
- Die Matrixmultiplikation ist assoziativ, d.h. $D(\alpha)[D(\beta)D(\gamma)] = [D(\alpha)D(\beta)]D(\gamma)$.
- Multipliziert man eine beliebige Drehmatrix mit der Drehmatrix für den Winkel $\alpha = 0$, so bleibt diese Drehmatrix unverändert. Die Drehmatrix um den Winkel $\alpha = 0$

$$D(\boldsymbol{\alpha}=0) = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(6.15)

wird als neutrales Element der Gruppe bezeichnet. Natürlich bleiben unter Drehungen um $\alpha = 0$ auch Vektoren unverändert.

• Zu jeder Drehmatrix $D(\alpha)$ gibt es eine inverse Drehmatrix $[D(\alpha)]^{-1} = D(-\alpha)$, so dass

$$D(\alpha)D(-\alpha) = \mathbf{1}.\tag{6.16}$$

In zwei Dimensionen gilt außerdem, dass das Hintereinanderausführen zweier Drehungen von der Reihenfolge der Drehungen unabhängig ist, $D(\alpha)D(\beta) = D(\beta)D(\alpha) = D(\alpha + \beta)$. Eine solche kommutative Gruppe heißt auch Abelsche Gruppe. Drehungen in drei oder mehr Dimensionen sind nicht kommutativ. (Versuchen Sie es z.B. mit einem Buch, das Sie um zueinander orthogonale Achsen drehen.)

Die Gruppe der Drehungen in zwei Dimensionen bezeichnet man mit SO(2), die spezielle orthogonale Gruppe in zwei Dimensionen. Dieser Name beruht darauf, dass für alle Elemente dieser Gruppe die Spalten (ebenso wie die Zeilen) der Matrizen als Vektoren orthogonal aufeinander stehen. Denn betrachten wir die zu $D(\alpha)$ inverse Matrix genauer, so fällt auf, dass

$$D(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = D^{T}(\alpha).$$
(6.17)

Hier bezeichnet $D^T(\alpha)$ die zu $D(\alpha)$ transponierte Matrix. Für die Drehmatrizen D gilt also

$$DD^T = D^T D = \mathbf{1}.\tag{6.18}$$

Schreiben wir diese Relationen in Komponenten, so ist dies gerade die Aussage über die Orthonormalität der Spalten und Zeilen,

$$\sum_{k} D_{ik} D_{jk} = \sum_{k} D_{ki} D_{kj} = \delta_{ij}.$$
(6.19)

Die Orthogonalität der Zeilen und Spalten folgt für $i \neq j$. Die Relation mit i = j zeigt, dass die Zeilen und Spalten der Drehmatrix Einheitsvektoren sind.

Die Relation $D^{-1}(\alpha) = D^T(\alpha)$ ist tatsächlich eine allgemeine Eigenschaft von Drehungen. Denn Drehungen des Koordinatensystems lassen die Länge von sowie die Winkel zwischen Vektoren unverändert – oder, wie man sagt, invariant. Hieraus folgt, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren bei Drehungen des Koordinatensystems invariant bleibt. Es muss also

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i} a'_{i} b'_{i} = \sum_{i} a_{i} b_{i}$$
(6.20)

gelten. Die Summen laufen hier von i = 1 bis zur Dimension des Raumes, in dem die Vektoren leben. Wir lassen hier die Dimension offen, da wir es mit einer allgemeinen Eigenschaft von Drehungen zu tun haben, die nicht an eine bestimmte Dimension gebunden ist. Es gibt nun einen linearen Zusammenhang zwischen den Koordinaten in den beiden Koordinatensystemen,

$$a_i' = \sum_j D_{jk} a_k \tag{6.21}$$

und ebenso für b. Somit gilt

$$\sum_{i} a'_{i}b'_{i} = \sum_{i} \sum_{j} D_{ij}a_{j} \sum_{k} D_{ik}b_{k}$$
$$= \sum_{j} \sum_{k} a_{j}b_{k} \sum_{i} D_{ij}D_{ik}.$$
(6.22)

Nach Glg. (6.20) muss dieses nun gleich

$$\sum_{i} a_{i}b_{i} = \sum_{j} \sum_{k} a_{j}b_{k}\delta_{jk}$$
(6.23)

sein. Hier haben wir neben der Identität $b_j = \sum_k b_k \delta_{jk}$ ausgenutzt, dass wir Summationsindizes frei umbenennen können. Da die Vektoren **a** und **b** beliebig sind, können wir durch Vergleich der Glgn. (6.22) und (6.23) folgern, dass

$$\sum_{i} D_{ij} D_{ik} = \delta_{jk} \tag{6.24}$$

bzw.

$$DD^T = \mathbf{1} \tag{6.25}$$

Damit haben wir gezeigt, dass Glg. (6.19) tatsächlich Drehungen ganz allgemein charakterisiert.

Eine wichtige Schlussfolgerung aus diesen Überlegungen ist, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren und damit insbesondere auch die Länge eines Vektors ein Skalar ist. Ein physikalisches Beispiel für einen Skalar, der als Produkt zweier Vektoren definiert ist, ist die kinetische Energie $E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$.

Bisher haben wir nur Drehungen des Koordinatensystems betrachtet. Nun bleiben Winkel und Längen von Vektoren nicht nur unter Drehungen, sondern auch unter Spiegelungen des Koordinatensystems invariant. Die Relation (6.25) gilt also nicht nur für Drehungen des Koordinatensystems, sondern auch für Spiegelungen, und somit allgemein für Kombinationen von Drehungen und Spiegelungen. Wir wollen daher nun auch solche Spiegelungen des Koordinatensystems am Ursprung untersuchen. Unter einer solchen Spiegelung bleiben Skalare wir die kinetische Energie invariant,

$$s \to s.$$
 (6.26)

Andererseits ändern alle Koordinaten eines Vektors ihr Vorzeichen, so dass

$$\mathbf{a} \to -\mathbf{a}$$
. (6.27)

Dies ist konsistent mit der Tatsache, dass Skalarprodukte von Vektoren Skalare bilden,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \to (-\mathbf{a}) \cdot (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \tag{6.28}$$

Andererseits können wir aber zwei Vektoren auch über das Kreuzprodukt einen neuen Vektor zuordnen. Betrachtet man nun das Verhalten eines solchen Kreuzprodukts unter Spiegelungen des Koordinatensystems, so finden wir eine Überraschung,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \to (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \tag{6.29}$$

Kreuzprodukte transformieren also unter Spiegelungen gar nicht wie Vektoren, da sie ihr Vorzeichen nicht ändern. Sie unterscheiden sich also in ihrem Verhalten unter Spiegelungen des Koordinatensystems wesentlich von eigentlichen Vektoren. Man gibt daher solchen Größen, die sich unter Drehungen wie Vektoren, aber unter Spiegelungen wie Skalare verhalten, eine eigene Bezeichnung und nennt sie Pseudovektoren. Beispiele für Pseudovektoren sind uns bereits verschiedentlich begegnet. So sind insbesondere der Drehimpuls und das Drehmoment als Kreuzprodukt von Vektoren definiert und somit Pseudovektoren.

Wir können nun aus einem Pseudovektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ und einem (regulären) Vektor \mathbf{c} über das Skalarprodukt einen Skalar bilden. Dies ist gerade das Spatprodukt aus den Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} . Unter Spiegelungen verhält es sich nun wie

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \to -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \tag{6.30}$$

d.h. das Spatprodukt dreier Vektoren ändert anders als gewöhnliche Skalare unter Spiegelungen des Koordinatensystems sein Vorzeichen. Da es sich andererseits unter Drehungen wie ein Skalar verhält, nennt man solche Größen Pseudoskalare.

Wir wollen schließlich noch auf Tensoren zurückkommen, für die wir am Ende des letzten Kapitels mit dem Trägheitstensor ein Beispiel kennengelernt hatten. Um ihr Verhalten unter Koordinatentransformationen zu untersuchen, gehen wir vom Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit aus,

$$L_i = \sum_j J_{ij} \omega_j \tag{6.31}$$

bzw.

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}. \tag{6.32}$$

Betrachten wir nun eine Drehung des Koordinatensystems, so geht dies über in

$$\mathbf{L}' = J'\boldsymbol{\omega}'. \tag{6.33}$$

Für die Vektoren kennen wir bereits ihr Verhalten unter Drehungen, nämlich $\mathbf{L}' = D\mathbf{L}$ sowie $\omega' = D\omega$. Setzen wir diese Relation in die letzte Gleichung ein, so finden wir

$$D\mathbf{L} = J' D\boldsymbol{\omega}. \tag{6.34}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit der zu D inversen Matrix D^T , so erhalten wir

$$\mathbf{L} = D^T J' D \boldsymbol{\omega}. \tag{6.35}$$



Figure 6.2: Gestrichenes Koordinatensystem, das sich mit der Geschwindigkeit V relativ zum ungestrichenen Koordinatensystem bewegt.

Vergleichen wir nun mit Glg. (6.32), so können wir das Transformationsverhalten von Tensoren unter Drehungen ablesen,

$$J = D^T J' D \text{ und } J' = D J D^T.$$
(6.36)

Schreiben wir dies schließlich in Komponenten, so wird dies zu

$$J_{ij} \to J'_{ij} = \sum_{kl} D_{ik} D_{jl} J_{kl}.$$
 (6.37)

Jeder Tensorindex transformiert also gerade wie ein Vektorindex.

6.2 Inertialsysteme und Galilei-Transformationen

Bisher haben wir nur Transformationen betrachtet, bei denen das Koordinatensystem gedreht oder gespiegelt wurde. Nun können wir aber auch Koordinatensysteme betrachten, die sich relativ zueinander bewegen. Man spricht in diesem Fall genauer von Bezugssystemen. Eine besondere Rolle spielen Inertialsysteme. In Inertialsystemen bleiben Körper in Ruhe oder im Zustand gleichförmiger Bewegung, wenn auf sie keine Kraft wirkt. Die Existenz eines solchen Inertialsystems wird in gewisser Weise durch das erste Newtonsche Gesetz postuliert. Natürlich kann man Inertialsysteme tatsächlich immer nur näherungsweise realisieren. Ob ein Bezugssystem ein Inertialsystem ist, wird immer auch von der Fragestellung abhängen. So ist ein Labor auf der Erde in vielen Fällen in guter Näherung ein Intertialsystem. Macht man allerdings genauere Experimente, so wird man feststellen, dass in diesem Bezugssystem aufgrund der Erddrehung auch Scheinkräfte wie die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft wirken. Diese Kräfte kann man beispielsweise mit einem Foucault-Pendel nachweisen.

Ist nun aber ein Bezugssystem ein Inertialsystem, so gibt es unendlich viele andere Inertialsysteme. Denn jedes Bezugssystem, das sich relativ zum ersten Bezugssystem mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist auch ein Inertialsystem. Denn in ihm gelten die Newtonschen Gesetze in der gleichen Form. Dies ist offensichtlich für das erste Newtonsche Gesetz. Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, dass auch die Bewegungsgleichung in allen Inertialsystemen die gleiche Form $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ annimmt. Diese Tatsache, dass die Gesetze der Mechanik in jedem Inertialsystem die gleiche Form annehmen, ist eine ganz zentrale und wichtige Einsicht.

Wir wollen nun zunächst ableiten, wie die Koordinaten und die Zeit eines Ereignisses transformieren, wenn man von einem Inertialsystem in ein anderes übergeht. Wir betrachten der Einfachheit halber zwei Inertialsysteme, die sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit $\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{e}}_x$ in positiver x-Richtung bewegen. Die Ursprünge der beiden Bezugssysteme sollen zum Zeitpunkt t = t' = 0 zusammenfallen, wobei sich das gestrichene Bezugssystem relativ zum Ungestrichenen mit der Geschwindigkeit V in x-Richtung bewegt. Wie man leicht aus Abb. 6.2 abliest, haben diese Transformationen die Form

$$t = t'$$

$$x = x' + Vt'$$

$$y = y'$$

$$z = z'.$$
(6.38)

Diese Transformationen heißen Galilei-Transformationen. Wir wollen nun zeigen, dass die Newtonschen Gesetze – und insbesondere das zweite Newtonsche Gesetz – unter diesen Transformationen invariant sind, d.h., dass sie in allen Inertialsystemen die gleiche Form annehmen. Man spricht davon, dass die Newtonsche Mechanik Galilei-invariant ist.

Betrachten wir zunächst ein Teilchen, das sich im gestrichenen Inertialsystem gleichförmig in x-Richtung mit der Geschwindigkeit v' bewegt. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt es sich für einen Beobachter im ungestrichenen Inertialsystem? Wir können diese Frage nun leicht mit Hilfe der Galilei-Transformationen beantworten. Da die Bewegung gleichförmig ist, betrachten wir einfach die Positionen des Teilchens x_1 und x_2 zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 . Die Geschwindigkeit vdes Teilchens im ungestrichenen Inertialsystem ist dann

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.\tag{6.39}$$

Transformieren wir nun mithilfe der Galilei-Transformationen die Koordinaten und Zeiten in das gestrichene Inertialsystem, so erhalten wir

$$v = \frac{(x'_2 + Vt'_2) - (x'_1 + Vt'_1)}{t'_2 - t'_1} = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} + V.$$
(6.40)

Identifizieren wir schließlich den Bruch auf der rechten Seite als die Geschwindigkeit im gestrichenen Inertialsystem, so finden wir

$$v = v' + V.$$
 (6.41)

Dies ist das Gesetz für die Addition von Geschwindigkeiten.

Wir wollen nun nachrechnen, wie sich Beschleunigungen transformieren. Hierzu betrachten wir eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Wir berechnen wieder die Beschleunigung im ungestrichenen Inertialsystem und nutzen die Galilei-Transformationen und die Addition der Geschwindigkeit,

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(v_2' + V) - (v_1' + V)}{t_2' - t_1'} = \frac{v_2' - v_1'}{t_2' - t_1'}.$$
(6.42)

Identifizieren wir wieder den Ausdruck auf der rechten Seite als die Beschleunigung im gestrichenen Inertialsystem, so erhalten wir

$$a = a'. \tag{6.43}$$

Wir sehen also, dass die Beschleunigung in allen Inertialsystemen den gleichen Wert annimmt.

Schließlich stellen wir noch fest, dass die fundamentalen Kräfte wie die Gravitationskraft oder die Coulomb-Kraft nur vom Abstand der Teilchen zu einem Zeitpunkt abhängen. Auch diese Abstände sind unabhängig vom Inertialsystem. Betrachten wir den Abstand zweier Teilchen im ungestrichenen Inertialsystem und drücken ihn mithilfe der Galilei-Transformationen in den gestrichenen Größen aus, so erhalten wir

$$x_2 - x_1 = (x'_2 + Vt'_2) - (x'_1 + Vt'_1).$$
(6.44)



Figure 6.3: Stoß zweier Teilchen

Wird der Abstand zu einem Zeitpunkt gemessen, d.h. $t'_1 = t'_2$, so finden wir

$$x_2 - x_1 = x_2' - x_1', (6.45)$$

d.h. der Abstand ist unabhängig vom Inertialsystem.¹ Damit folgt auch, dass die Kraft unabhängig vom Inertialsystem ist,

$$F = F'. \tag{6.46}$$

Da also sowohl die Kraft als auch die Beschleunigung unabhängig vom Inertialsystem sind, finden wir also tatsächlich, dass das zweite Newtonsche Gesetz

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{6.47}$$

in allen Inertialsystemen die gleiche Form annimmt.

Damit können wir das Galileische Relativitätsprinzip formulieren: Die grundlegenden Gesetze der Physik nehmen in allen Inertialsystemen die gleiche Form an.

Dies ist eine recht starke Aussage. So kann man im Rahmen einer weitergehenden Formulierung der klassischen Mechanik zeigen, dass allein die Galilei-Invarianz erfordert, dass die kinetische Energie die Form $T = m\mathbf{v}^2/2$ annehmen muss. Hier wollen wir noch für einen Stoß zweier Teilchen zeigen, dass aus der Galilei-Invarianz und dem Energieerhaltungssatz zwingend die Impulserhaltung folgt. Sobald wir also annehmen, dass die Newtonsche Mechanik Galilei-invariant ist, sind Energieund Impulserhaltung keine unabhängigen Gesetze mehr. Betrachten wir den Stoß zweier Teilchen, bei dem sich die Geschwindigkeiten von \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 zu \mathbf{w}_1 und \mathbf{w}_2 ändern (s. Abb. 6.3), so hat das System vor und nach dem Stoß die gleiche Energie,

$$\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\mathbf{w}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{w}_2^2.$$
(6.48)

In einem relativ zu diesem Inertialsystem mit der Geschwindigkeit V bewegten (gestrichenen) Inertialsystem haben die Teilchen die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}$ und $\mathbf{w}' = \mathbf{w} + \mathbf{V}$. In diesem Inertialsystem muss die Energieerhaltung natürlich auch gelten,

$$\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^{\prime 2} + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^{\prime 2} = \frac{1}{2}m_1\mathbf{w}_1^{\prime 2} + \frac{1}{2}m_2\mathbf{w}_2^{\prime 2}.$$
(6.49)

In dieser Gleichung drücken wir nun die gestrichenen durch die ungestrichenen Geschwindigkeiten aus. Nutzen wir aus, dass die Energieerhaltung auch im ungestrichenen Inertialsystem gilt, und kürzen wir Terme, die auf beiden Seiten auftreten, so erhalten wir

$$m_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} + m_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{V} = m_1 \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{V} + m_2 \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{V}.$$
(6.50)

¹Natürlich gilt das nicht, wenn man den Abstand von zwei nicht gleichzeitigen Ereignissen misst. Sitzen sie im Flugzeug in Sitz 35D und fliegen konstant mit 900km/h, so befinden sie sich nach zwei Stunden im Bezugssystem des Flugzeugs immer noch am gleichen Ort, haben sich also nicht bewegt. Im Bezugssystem der Erde haben sie aber 1800km zurückgelegt. Die Aussage, dass zwei Ereignisse am gleichen Ort stattfinden, ist also nur dann unabhängig vom Bezugssystem, wenn die Ereignisse zum selben Zeitpunkt stattfinden.



Figure 6.4: Schematische Darstellung der Ergebnisse eines Experiments von Bertozzi (1964): Die kinetische Energie und Geschwindigkeit von Elektronen werden unabhängig gemessen. Die kinetische Energie geht gegen Unendlich, wenn die Elektronengeschwindigkeit gegen die Lichtgeschwindigkeit geht. Dies unterscheidet sich offensichtlich eklatant von dem nicht-relativistischen Ausdruck $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ für die kinetische Energie.

Schließlich klammern wir die Relativgeschwindigkeit V der beiden Inertialsysteme aus,

$$(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{V} = (m_1\mathbf{w}_1 + m_2\mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{V}.$$
(6.51)

Da dies laut Galileischem Relativitätsprinzip für alle V gelten muss, können wir

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{w}_1 + m_2 \mathbf{w}_2 \tag{6.52}$$

folgern, was gerade die Impulserhaltung ist.

Diese Ableitung des Impulssatzes ist in einem gewissen Sinne allgemeiner als unsere bisherige. Da sie nicht auf dem 3. Newtonschen Gesetz beruht, gilt sie auch für Kräfte wie z.B. die Lorentz-Kraft des Magnetfeldes, auf die das 3. Newtonsche Gesetz nicht angewendet werden kann.

Schließlich wollen wir noch untersuchen, wie sich elektrische und magnetische Felder unter Galilei-Transformationen transformieren. Hierzu schreiben wir die auf eine Ladung wirkende Kraft in zwei relativ zueinander mit V bewegten Inertialsystemen,

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F}' = e\mathbf{E}' + e\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'.$$
 (6.53)

Vergleichen wir diese Ausdrücke und nutzen wir die Galilei-Tranformationen $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ sowie $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ (Geschwindigkeitsaddition), so schließen wir auf die Transformationsgleichungen

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \tag{6.54}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}. \tag{6.55}$$

Wir sehen also, dass sich auch elektrische und magnetische Felder beim Übergang von einem in ein anderes Inertialsystem ändern.

6.3 Postulate der speziellen Relativitätstheorie

Eine zentrale Annahme der Newtonschen Mechanik ist die Möglichkeit instantaner Fernwirkung. Befindet sich ein Körper mit der Masse m_1 am Ort \mathbf{r}_1 , so übt er instantan die Gravitationskraft

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}$$
(6.56)

auf einen zweiten Körper der Masse m_2 am Ort \mathbf{r}_2 aus. Nun legen allerdings Experimente nahe, dass es eine maximale Geschwindigkeit gibt, die Lichgeschwindigkeit c. Ein "modernes" Experiment² misst z.B. gleichzeitig die kinetische Energie und die Geschwindigkeit des Elektrons. Da die Elektronen in einem elektrischen Feld beschleunigt werden, lässt sich ihre kinetische Energie leicht aus der Energieerhaltung bestimmen. Parallel wird die Geschwindigkeit mithilfe der Flugzeit für eine feste Strecke gemessen. Das Ergebnis des Messung ist schematisch in Abb. 6.4 dargestellt. Es zeigt sich, dass die kinetische Energie nur bei kleinen Geschwindigkeiten näherungsweise wie $T = (1/2)mv^2$ von der Geschwindigkeit v abhängt. Wird die Geschwindigkeit vergleichbar mit der Lichtgeschindigkeit, so ist die kinetische Energie größer als der durch diese Formel gegebene Wert und geht offenbar gegen Unendlich (divergiert), je mehr sich die Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit nähert.

Die Existenz einer solchen Maximalgeschwindigkeit steht natürlich in eklatantem Widerspruch zur Newtonschen Mechanik. So ist sie in keiner Weise konsistent mit dem Gesetz der Geschwindigkeitsaddition beim Übergang zwischen zwei Inertialsystemen. Denn ist die Maximalgeschwindigkeit in einem Inertialsystem gegeben durch *c*, so entspräche sie in einem relativ dazu bewegten Inertialsystem nach dem Galileischen Relativitätsprinzip einer ganz anderen Geschwindigkeit. Eine Maximalgeschwindigkeit, die verschiedene Werte in verschiedenen Inertialsystemen annimmt, ist aber keine Maximalgeschwindigkeit.

Einstein hat nun seine spezielle Relativitätstheorie auf zwei einfachen Postulaten aufgebaut:

1. Postulat: Die Gesetze der Physik nehmen in allen Inertialsystemen die gleiche Form an. Kein Inertialsystem ist bevorzugt.

2. Postulat: Die Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum) nimmt in allen Inertialsystemen denselben Wert $c = 299792458 \frac{m}{s} \text{ an.}^3$

Das 1. Postulat ist eine Erweiterung des Galileischen Relativitätsprinzips von der Mechanik auf die gesamte Physik. Historisch hat nämlich die Elektrodynamik eine wichtige Rolle in der Entwicklung der Relativitätstheorie gespielt. Es war bekannt, dass die Elektrodynamik nicht mit den Galilei-Transformationen kompatibel war. Außerdem folgte aus der Elektrodynamik, dass sich Licht im Vakuum nur mit der Geschwindigkeit *c* bewegen kann. Um die Galilei-Transformationen und die traditionelle Vorstellung von Raum und Zeit zu retten, musste man also annehmen, dass es für die Elektrodynamik ein spezielles Bezugssystem gibt. Da sich alle bekannten Wellenarten (z.B. Schallwellen oder Wasserwellen) in einem Medium ausbreiten, schien die Annahme nicht unvernünftig, dass sich auch Licht in einem Medium, dem sogenannten Äther, ausbreiten würde.⁴ Dieser Äther würde dann das in der Elektrodynamik ausgezeichnete Bezugssystem darstellen. Einstein machte nun stattdessen in seinem 2. Postulat die radikale Annahme, dass es kein solches ausgezeichnetes Bezugssytem gebe und dass stattdessen die Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen den gleichen Wert annehmen muss. Dies steht aber im eklatanten Widerspruch zum Galileischen Relativitätsprinzip, insbesondere der Addition von Geschwindigkeiten. Damit musste er notwendigerweise von den überlieferten Vorstellungen von Raum und Zeit abweichen!

Ein moderner Test des 2. Postulats ist in Abb. 6.5 dargestellt.⁵ Hierbei wird in Beschleunigern ein hochenergetischer Pionenstrahl hergestellt, der sich mit fast Lichtgeschwindigkeit

²siehe: W. Bertozzi, American Journal of Physics **32**, 551 (1964).

³Der Wert der Lichtgeschwindigkeit ist inzwischen eine festgelegte Größe. Die Längeneinheit ist demnach nur noch eine von der Definition der Zeiteinheit abgeleitete Einheit.

⁴Dem Äther mussten allerdings erstaunliche Eigenschaften zugeschrieben werden. So durfte er einerseits der Materie keinen signifikanten Widerstand entgegensetzen, denn sonst würden z.B. Planeten auf ihrer Bahn abgebremst. Andererseits sollte er sich wie ein Festkörper verhalten. Denn nur Festkörper haben eine Schersteifigkeit, die transversale Wellen möglich macht. Dem Äther musste eine solche Schersteifigkeit zugeschrieben werden, da es sich bei elektromagnetische Wellen um transversale Wellen handelt, bei denen die elektrischen und magnetischen Felder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen.

⁵ T. Alväger et al., Test of the second postulate of special relativity in the GeV region, Physics Letters 12, 260 (1964).



Figure 6.5: "moderner" Test des 2. Postulats: CERN 1964



Figure 6.6: Zur Zeitbestimmung von Ereignissen: Beide Ereignisse geschehen um 9^{00} Uhr, aber das Licht vom Luftballon erreicht den Beobachter nach dem Licht von der Explosion

 $(\nu \simeq 0.99975c)$ bewegt. Pionen zerfallen spontan in zwei hochenergetische Photonen (γ -Quanten), $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Nach dem Pionenzerfall wird nun die Geschwindigkeit der γ -Quanten gemessen. Das Experiment ergibt, dass sich die γ -Quanten wieder mit der Lichtgeschwindigkeit bewegen, obwohl sich die Quelle selbst mit fast Lichtgeschwindigkeit bewegt.

Wir wollen im folgenden die Konsequenzen der Einsteinschen Postulate für die Beschreibung von Ereignissen in verschiedenen Inertialsystemen ableiten. Ein Ereignis ist etwas, das für einen Beobachter an einem bestimmten Ort und zu einer bestimmten Zeit geschieht, wie z.B. das Aussenden eines Lichtblitzes durch eine Glühbirne, die Kollision zweier Teilchen oder eine Explosion. Das Ereignis kann von verschiedenen Beobachtern gesehen werden und existiert natürlich unabhängig vom Bezugssystem.

Wenn man Ort und Zeit eines Ereignisses angeben möchte, so kann dies durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts erschwert werden. In Abb. 6.6 sind zwei Ereignisse dargestellt, die sich in unterschiedlicher Entfernung von einem Beobachter abspielen. Möchten wir die Zeitpunkte bestimmen, zu denen sich die Ereignisse abgespielt haben, so müssen wir natürlich die unterschiedlichen Laufzeiten des Lichts vom Ort des Ereignisses zum Beobachter herausrechnen.

Um Koordinaten und Zeiten systematisch bestimmen zu können, stellen wir uns vor, dass mit jedem Inertialsystem ein Netz von Koordinatenlinien verknüpft ist, s. Abb. 6.7. Der Ort eines Ereignissen kann dann bestimmt werden, indem man einfach die nächstliegenden Koordinaten abliest. (Z.B. können wir uns der Einfachheit halber vorstellen, dass an jedem Kreuzungspunkt des Koordinatennetzes ein Helfer platziert ist.) Außersem sei jeder Kreuzungspunkt dieses Koordinaten-



Figure 6.7: Konstruktion zur Messung von Orten und Zeiten in unterschiedlichen Inertialsystemen. An jedem Kreuzungspunkt im Koordinatennetz ist auch noch eine Uhr angebracht.



Figure 6.8: Gedankenexperiment zur Relativität der Gleichzeitigkeit.

netzes mit einer eigenen Uhr ausgestattet. Dann kann auch der Zeitpunkt an der nächstliegenden Uhr abgelesen werden.

Diese Konstruktion macht zwar das Ablesen von Ort und Zeit eines Ereignisses leicht, aber man benötigt viele veschiedene Uhren. Daher ist es erforderlich, genau anzugeben, wie diese Uhren synchronisiert werden! Im Prinzip kann man folgendermaßen vorgehen. Wir bringen zunächst die Uhren an ihren Platz. Anschliessend schicken wir dann zum Zeitpunkt t = 0 vom Ursprung des Bezugssystems aus ein Lichtsignal an alle Uhren. Die Uhren werden auf die Zeit t = r/c gestellt, wenn das Lichtsignal bei ihnen eingestroffen ist. Hier bezeichnet r den Abstand der Uhr vom Ursprung des Koordinatensystems, so dass dieses Verfahren die Laufzeit des Lichts berücksichtigt. Die scheinbare Alternative, die Uhren erst an einem Ort zu synchronisieren und dann an ihre Plätze zu bringen, ist problematisch, da wir nicht wissen, was mit bewegten Uhren passiert. Denn wir wissen ja bereits, dass wir unsere Vorstellungen von Raum und Zeit ändern müssen.

6.4 Relativität der Gleichzeitigkeit

Wir hatten bereits im Rahmen unserer Diskussion der Galilei-Transformationen bemerkt, dass die Aussage, das zwei Ereignisse am gleichen Ort stattfinden, nur dann sinnvoll ist, wenn sie auf ein Inertialsystem bezogen wird. Andererseits hat die Aussage, dass zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden, allgemeine Gültigkeit, d.h. sie gilt unabhängig vom Inertialsystem. Nun werden wir sehen, dass die Einsteinschen Postulate erzwingen, dass auch das Konzept der Gleichzeitigkeit relativ ist, d.h. dass eine solche Aussage immer auf ein Inertialsystem bezogen werden muss. Hierzu betrachten wir zwei Ereignisse, die für einen Beobachter gleichzeitig stattfinden. Betrachtet man diese Ereignisse aus der Warte eines relativ dazu bewegten Beobachters, so finden wir, dass die Ereignisse im allgemeinen nicht mehr gleichzeitig stattfinden.

Wir werden diese zentrale Konsequenz der Einsteinschen Postulate mithilfe eines Gedankenexperiments ableiten. Olga und Otto sollen in zwei Raumschiffen im Weltraum fliegen, wobei sich Otto relativ zu Olga mit der Geschwindigkeit v bewegt. (Umgekehrt bedeutet dies natürlich, dass sich Olga relativ zu Otto mit der Geschwindigkeit -v bewegt.) Olga macht in ihrem Raumschiff ein Experiment, s. Abb. 6.8: Sie sendet zu einem Zeitpunkt zwei Lichtsignale in Richtung der Lichtdetektoren *D*1 und *D*2 aus. Da beide Detektoren den gleichen Abstand von Olga haben, beobachtet Olga, dass beide Lichtsignale die Detektoren zur gleichen Zeit erreichen.

Otto beobachtet dieses Experiment von seinem Raumschiff aus. Für ihn bewegt sich Detektor *D*1 auf die Lichtquelle zu, während sich Detektor *D*2 von der Lichtquelle wegbewegt. Somit muss das Licht zu Detektor *D*1 einen kürzeren Weg zurücklegen als zu Detektor *D*2. Da auch für Otto beide Lichtsignale die gleiche Geschwindigkeit haben, erreicht das Licht den Detektor *D*1 zuerst.

Die Lichtsignale treffen für Otto also nicht gleichzeitig bei den Detektoren ein.

Wir müssen daher schließen, dass Gleichzeitigkeit kein absolutes Konzept ist, sondern ein relatives, das vom Bewegungszustand des Beobachters abhängt! Gleichzeitigkeit ist nur dann absolut, wenn die Ereignisse zur gleichen Zeit am gleichen Ort geschehen. Dies ist in dem beschriebenen Experiment insofern wichtig, dass auch für Otto beide Lichtsignale zur selben Zeit ausgesendet werden.

Die Relativität der Gleichzeitigkeit ist eine Konsequenz der Endlichkeit und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Um dies genauer zu sehen, ist es hilfreich, dasselbe Gedankenexperiment in einer Galileischen Welt zu diskutieren. Für Olga treffen dann die beiden Lichtstrahlen zum Zeitpunkt $t_1 = t_2 = L/c$ ein, wobei *L* den Abstand zwischen Olga und den Detektoren bezeichnet. Für Otto stellt sich der Sachverhalt folgendermaßen dar. Das Lichtsignal braucht die Zeit t_1 von Olga zum Detektor *D*1. In dieser Zeit hat sich der Detektor bereits um die Strecke vt_1 auf das Licht zubewegt. Außerdem bewegt sich das Licht zum Detektor *D*1 mit der Geschwindigkeit c - v, da sich die Quelle ja mit der Geschwindigkeit -v bewegt. Der Zeitpunkt t_1 , zu dem das Lichtsignal beim Detektor *D*1 eintrifft, wird also durch

$$(c - v)t_1 = L - vt_1 \tag{6.57}$$

bestimmt. Die Diskussion für den Detektor *D*2 läuft analog. Das Lichtsignal braucht die Zeit t_2 von Olga zum Detektor *D*2. In dieser Zeit hat sich der Detektor bereits um die Strecke vt_2 vom Licht wegbewegt. Außerdem bewegt sich das Licht zum Detektor *D*2 mit der Geschwindigkeit c + v, da sich nun Quelle und Licht in die gleiche Richtung bewegen. Der Zeitpunkt t_2 wird also durch

$$(c+v)t_2 = L + vt_1 (6.58)$$

bestimmt. Aus diesen Gleichungen folgt wiederum $t_1 = t_2 = L/c$. Wenn wir das Experiment also im Rahmen der Galilei-Transformationen beschreiben, so ist die Zeit – und damit auch die Gleichzeitigkeit – absolut. Natürlich ist der entscheidende Unterschied zur relativistischen Beschreibung die Annahme, dass sich für Otto das Licht zu den beiden Detektoren mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegt.

6.5 Zeitdilatation

Nun wollen wir die Zeit noch etwas genauer untersuchen und die Länge von Zeitintervallen in verschiedenen Inertialsystemen miteinander vergleichen. Hierzu führt nun Otto ein Experiment in einem Zug aus, der mit der Geschwindigkeit *v* relativ zum Bahnsteig fährt. Olga beobachtet das Experiment vom Bahnsteig aus.



Figure 6.9: Gedankenexperiment zur Zeitdilatation: Ottos Experiment aus seiner Warte.



Figure 6.10: Gedankenexperiment zur Zeitdilatation: Ottos Experiment aus Olgas Sicht.

Otto sendet im Zug ein Lichtsignal senkrecht nach oben aus und misst, wieviel Zeit vergeht, bis der Lichtstrahl von der Decke reflektiert wurde und wieder am Ausgangspunkt angekommen ist. Dies ist in Abb. 6.9 illustriert. Das Licht legt bei diesem Versuch die Strecke 2*D* zurück und benötigt für diese Strecke die Zeit

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c}.\tag{6.59}$$

Olga misst nun dasselbe Zeitintervall vom Bahnsteig aus. Da sich der Zug bewegt, geschehen das Absenden des Lichtsignals, die Reflektion des Signals von der Decke sowie die Detektion an verschiedenen Orten entlang des Bahnsteigs. Sie sieht also das Experiment so, wie in Abb. 6.10 dargestellt. Für Olga muss das Licht demnach eine längere Strecke 2L zurücklegen. Wir bezeichnent die Zeit, die das Licht für Olga braucht, um diese Strecke zurückzulegen, mit Δt . Die Länge L kann leicht bestimmt werden, indem wir den Satz des Pythagoras verwenden,

$$L^{2} = (\frac{1}{2}v\Delta t)^{2} + D^{2}.$$
(6.60)

Da sich das Licht auch für Olga mit der Geschwindigkeit *c* bewegt, gilt $L = (1/2)c\Delta t$. Ausserdem können wir *D* durch die Länge des Zeitintervalls für Otto ausdrücken, $D = (1/2)c\Delta t_0$. Setzen wir dies in die Glg. (6.60) ein, so erhalten wir

$$(\frac{1}{2}c\Delta t)^2 = (\frac{1}{2}v\Delta t)^2 + (\frac{1}{2}c\Delta t_0)^2.$$
(6.61)

Diese Gleichung können wir nun nach Δt auflösen und erhalten

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
(6.62)

Wir finden also, dass Olga ein längeres Zeitintervall misst als Otto. Der Unterschied wird umso stärker, je größer die Relativgeschwindigkeit v ist. Dieses Phänomen, dass Zeitintervalle in verschiedenen Inertialsystemen unterschiedlich lang sind, nennt man Zeitdilatation.

Es ist ein zentraler Punkt, dass in diesem Gedankenexperiment ein wichtiger Unterschied zwischen den beiden Inertialsystemen besteht. Otto kann nämlich das Zeitintervall zwischen den beiden Ereignissen (Senden und Detektieren des Lichtsignals) mit einer einzigen Uhr messen, da in seinem Bezugssystem die beiden Ereignisse am selben Ort stattfinden. Man sagt, dass Otto die sogenannte Eigenzeit Δt_0 misst, die sich immer dadurch auszeichnet, dass sie sich mit einer Uhr messen lässt. Für Olga hingegen finden die beiden Ereignisse an verschiedenen Orten statt, so dass sie zwei synchronisierte Uhren zur Messung des Zeitintervalls benötigt. Unsere Überlegungen ergeben also, dass Messungen eines Zeitintervalls in einem beliebigen Inertialsystem immer einen größeren Wert geben als die Eigenzeit.

Die Zeitdilatation ist experimentell vielfach bestätigt. So kann man sie mikroskopisch mithilfe zerfallender Elementarteilchen nachweisen oder makroskopisch mit Atomuhren in Flugzeugen. Mikroskopische Tests machen sich häufig zunutze, dass viele Elementarteilchen nur eine kleine Lebensdauer haben. Die fundamentale Lebensdauer der Elementarteilchen wird im Ruhesystem des Teilchens angegeben. Bewegt sich nun das Elementarteilchen im Laborsystem mit hoher Geschwindigkeit, so kann die Lebensdauer des Teilchens aufgrund der Zeitdilatation sehr viel größer werden. So trifft zum Beipiel permanent hochenergetische kosmische Strahlung aus dem Weltraum auf die Erde. Diese Strahlung erzeugt in den oberen Schichten der Atmosphäre durch Kollisionen mit der Luft verschiedene instabile Elementarteilchen, die sich mit hoher Geschwindigkeit bewegen. Um zu bestimmen, wie tief diese Teilchen in die Atmosphäre eindringen können, muss die Zeitdilatation berücksichtigt werden.

Eine berühmte Konsequenz der Zeitdilatation ist das Zwillingsparadoxon. Einer der Zwillinge begibt sich per Raumschiff mit hoher Geschwindigkeit auf eine Rundreise durch den Weltraum. Im einfachsten Fall bewegt er sich zunächst mit konstanter Geschwindigkeit von der Erde fort, anschließend kehrt er mit demselben Geschwindigkeitsbetrag wieder zurück. Aufgrund der Zeitdilatation wird am Ende der Reise der reisende Zwilling jünger sein als der auf der Erde verbleibende Zwilling. Denn die Zeitdauer des ersten Teils der Reise, bei der sich die Zwillinge voneinander entfernen, ist für den reisenden Zwilling eine Eigenzeit. Somit misst nach der Zeitdilatation der reisende Zwilling während der Exkursion letzlich um einen Faktor $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ weniger altert.

Das Zwillingsparadoxon ist nicht im eigentlichen Sinne ein Paradoxon, sondern eine Konsequenz der speziellen Relativitätstheorie. Die Symmetrie zwischen den beiden Zwillingen wird dadurch aufgehoben, dass der reisende Zwilling notwendigerweise eine beschleunigte Bewegung ausführen muss.

6.6 Längenkontraktion

Nun messen Olga und Otto auch noch die Länge des Bahnsteigs, auf dem Olga steht und an dem Otto mit der Geschwindigkeit v vorbeifährt. Olga ist relativ zum Bahnsteig in Ruhe. Sie kann die Länge mit einem Maßstab messen, man sagt, sie misst seine Eigenlänge L_0 . Olga kann die Länge des Bahnsteigs auch bestimmen, indem sie die Zeit Δt misst, in der Otto am Bahnsteig vorbeifährt. Die Länge des Bahnsteigs ist dann

$$L_0 = v\Delta t. \tag{6.63}$$

Das Zeitintervall Δt ist keine Eigenzeit, da die Ereignisse (Otto am Anfang des Bahnsteigs und Otto am Ende des Bahnsteigs) an zwei verschiedenen Orten stattfinden. Diese Zeitmessung erfordert demnach zwei synchronisierte Uhren. Für Otto bewegt sich der Bahnsteig mit der Geschwindigkeit -v. Er misst das Zeitintervall Δt_0 , in dem sich der Bahnsteig an ihm vorbeibewegt. Er kann beide Ereignisse mit einer Uhr messen, d.h. Δt_0 ist eine Eigenzeit. Otto misst also die Länge des Bahnsteigs zu

$$L = v\Delta t_0. \tag{6.64}$$

Wir finden somit, dass

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t}.$$
(6.65)

Damit haben wir das Verhältnis der Längen auf ein Verhältnis von Zeitintervallen zurückgeführt, das wir bereits im vorigen Abschnitt bestimmt hatten. Wir erhalten das Ergebnis

$$L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}L_0}.$$
(6.66)



Figure 6.11: Zwei Inertialsysteme: S' bewegt sich relativ zu S mit Geschwindigkeit. v

Die von Otto gemessene Länge ist also kleiner als die von Olga bestimmte Eigenlänge des Bahnsteigs. Allgemein gilt also, dass Messungen einer Länge in einem beliebigen Bezugssystem immer einen kleineren Wert ergeben als die Eigenlänge. Dieses Phänomen nennt man Längenkonstraktion.

6.7 Die Lorentz-Transformationen

Die Relativität der Gleichzeitigkeit, die Zeitdilatation und die Längenkontraktion sind unverträglich mit den Galilei-Transformationen. Wir müssen also neue Transformationsgleichungen ableiten, die die Galilei-Transformationen ersetzen und mit den Postulaten der Relativitätstheorie verträglich sind.

Hierzu betrachten wir zwei Bezugssysteme S' und S, wobei sich S' relativ zu S mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegen soll. Die beiden Inertialsysteme haben zum Zeitpunkt t = 0 den gleichen Ursprung. Zu diesem Zeitpunkt sendet eine Lichtquelle am Ursprung einen Lichtblitz aus, der sich kugelförmig in alle Richtungen ausbreitet. Da sich das Licht in alle Richtungen und in allen Inertialsystemen mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, beschreiben die Orte, an denen das Licht nach einer gewissen Zeit befindet, in beiden Inertialsystemen eine Kugeloberfläche. Zum Zeitpunkt t in S bzw. t' in S' ist der Radius dieser Kugel ct bzw. ct'. Im Inertialsystem S müssen die Koordinaten also die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \tag{6.67}$$

erfüllen. Die Koordinaten im Inertialsystem S' müssen die entsprechende Gleichung

$$x^{\prime 2} + y^{\prime 2} + z^{\prime 2} = c^2 t^{\prime 2} \tag{6.68}$$

erfüllen. Natürlich ist die Lichtgeschwindigkeit c in beiden Bezugssystemen gleich.

Wir machen nun einen Ansatz für die Form der Transformationsgleichungen. Hierbei nehmen wir an, dass die Transformationen weiterhin linear sind und sich die Koordinaten senkrecht zur Relativgeschwindigkeit nicht ändern. Dann können wir

$$x' = \alpha x + \varepsilon t \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \delta x + \eta t \tag{6.69}$$

schreiben, wobei wir die von der Relativgeschwindigkeit abhängigen Koeffizienten α , ε , δ und η bestimmen müssen. Hierzu beachten wir zunächst, dass sich der Ursprung von S' mit v relativ zu S bewegt. Setzen wir also x' = 0, so muss

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{6.70}$$

gelten. Ebenso bewegt sich der Ursprung von *S* relativ zu *S'* mit der Geschwindigkeit -v. Daher muss für x = 0

$$\frac{dx'}{dt'} = -v \tag{6.71}$$

gelten. Diese Relationen führen auf Relationen zwischen den Koeffizienten. So folgt aus x' = 0, dass $\alpha x = -\varepsilon t$ und somit

$$x = -\frac{\varepsilon}{\alpha}t.$$
(6.72)

x bewegt sich also mit der Geschwindigkeit ε/α , so dass wir die Relation

$$v = -\frac{\varepsilon}{\alpha} \tag{6.73}$$

erhalten. Ebenso folgen aus x = 0 die Relationen $x' = \varepsilon t$ und $t' = \eta t$, so dass

$$x' = \frac{\varepsilon}{\eta} t'. \tag{6.74}$$

x' bewegt sich also mit der Geschwindigkeit ε/η , so dass wir

$$v = -\frac{\varepsilon}{\eta} \tag{6.75}$$

folgern müssen. Vergleichen wir die Glgn. (6.73) und (6.75), so erhalten wir insbesondere die Relation

$$\alpha = \eta, \tag{6.76}$$

womit Glg. (6.69) nur noch drei unbekannte Koeffizienten enthält.

Nun setzen wir die Relationen (6.69) mit $\alpha = \eta$ in die Gleichung (6.68) für das Licht im Inertialsystem S' ein. Dies ergibt

$$(\alpha x + \varepsilon t)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (\delta x + \alpha t)^2.$$
(6.77)

Durch Ausmultiplizieren und Umordnen erhalten wir

$$(\alpha^{2} - c^{2}\delta^{2})x^{2} + y^{2} + z^{2} + (2\alpha\varepsilon - 2c^{2}\delta\alpha)xt = c^{2}t^{2}\left(\alpha^{2} - \frac{\varepsilon^{2}}{c^{2}}\right).$$
(6.78)

Vergleichen wir diese Relation mit Glg. (6.67), so finden wir die Relationen

$$2\alpha\varepsilon - 2c^2\delta\alpha = 0\tag{6.79}$$

$$\alpha^2 - c^2 \delta^2 = 1 \tag{6.80}$$

$$\alpha^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} = 1 \tag{6.81}$$

zwischen den Koeffizienten.

Zunächst eliminieren wir ε aus Glg. (6.81) mithilfe von $\varepsilon = -v\alpha$ [s. Glg. (6.73)]. Dann können wir nach α auflösen und erhalten

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}}.$$
(6.82)

Aus Glg. (6.73) folgt dann auch

$$\varepsilon = -\frac{\nu}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}}.\tag{6.83}$$
z'

Setzen wir nun α und ε in Glg. (6.79) ein, so erhalten wir

$$\delta = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
(6.84)

Schließlich können wir prüfen, dass diese Koeffizienten Glg. (6.80) automatisch erfüllen.

Wir haben damit die Lorentz-Transformationen vom ungestrichenen in das gestrichene Inertialsystem abgeleitet,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{2}}}$$
(6.85)

$$y' = y \tag{6.86}$$

$$z = z \tag{6.87}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
(6.88)

Diese Transformationsgleichungen sind der Kern der Relativitätstheorie und ersetzen die Galilei-Transformationen. Man sieht unmittelbar, dass die Lorentz-Transformationen für kleine Relativgeschwindigkeiten $v \ll c$ in die Galilei-Transformationen übergehen.

Wir können auch leicht die Umkehrung der Lorentz-Transformationen angeben, bei denen wir die ungestrichenen durch die gestrichenen Größen angeben. Wir können natürlich im Prinzip die Lorentz-Transformationen nach den ungestrichenen Koordinaten auflösen. Allerdings kann man die Tranformationen sofort hinschreiben, wenn man bemerkt, dass sich *S* relativ zu *S'* mit der Geschwindigkeit -v bewegt. Daraus folgen unmittelbar die Relationen

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.89}$$

$$y = y'$$
(6.90)

 $z = z'$
(6.91)

$$z = z$$
(6.91)
$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$
(6.92)

die sich aus den ersten Gleichungen durch Vertauschen von gestrichenen und ungestrichenen Koordinaten und durch Vorzeichenwechsel der Relativgeschwindigkeit ergeben.

Nun wollen wir kurz zeigen, wie die Relativität der Gleichzeitigkeit, die Zeitdilatation und die Längenkontraktion direkt aus den Lorentz-Transformationen folgen. Wir beginnen mit der Relativität der Gleichzeitigkeit. Wir betrachten zwei Ereignisse, die im ungestrichenen Inertialsystem zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 stattfinden. Nach der Umkehr der Lorentz-Transformationen gelten dann die Zusammenhänge

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
(6.93)

Das zugehörige Zeitintervall $\Delta t = t_1 - t_2$ erfüllt

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
(6.94)

Nehmen wir nun an, dass die Ereignisse in S' gleichzeitig sind, d.h. $\Delta t' = 0$, so finden wir

$$\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta x'.$$
(6.95)

Hieraus folgt, dass die Ereignisse in *S* nur dann gleichzeitig sind, wenn sie in *S'* nicht nur zur gleichen Zeit, sondern auch am gleichen Ort stattfinden, $\Delta x' = 0$. Finden die Ereignisse nicht am gleichen Ort statt, so sind sie für einen Beobachter in *S* nicht gleichzeitig. Zusätzlich zu unserer vorherigen Diskussion der Relativität der Gleichzeitigkeit geben die Lorentz-Transformationen also auch eine Formel dafür, wie weit die beiden Ereignisse in einem anderen Inertialsystem zeitlich auseinander liegen.

Gehen wir nun zur Zeitdilatation über. Hierzu betrachten wir zwei Ereignisse, die in S' am selben Ort stattfinden, $\Delta x' = 0$. Dann gilt aufgrund der Lorentz-Transformationen

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\tag{6.96}$$

Beachten wir nun, dass $\Delta t'$ eine Eigenzeit ist, da dieses Zeitintervall mit einer Uhr gemessen werden kann, reproduzieren wir mit

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\tag{6.97}$$

genau den Ausdruck für die Zeitdilatation.

Schließlich folgt aus der Lorentz-Transformation für eine Länge (z.B. des Bahnsteigs) in S'

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.98}$$

Der Bahnsteig ruhe in S' (so dass $\Delta x' = L_0$) und bewege sich in S. Dann können wir Δx nur dann mit $\Delta x = L$ identifizieren, wenn die Endpunkte simultan gemessen werden, d.h. wenn $\Delta t = 0$. Damit erhalten wir mit

$$L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}L_0}$$
(6.99)

genau die Längenkontraktion.

6.8 Relativistische Addition von Geschwindigkeiten

Nun wollen wir mit der relativistischen Addition von Geschwindigkeiten eine weitere Konsequenz der Lorentz-Transformationen ableiten. Wir betrachten wieder zwei Inertialsysteme, wobei sich S' relativ zu S mit v in x-Richtung bewegt. Ein Teilchen soll sich in S' mit der (konstanten) Geschwindigkeit $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ bewegen. Wie groß ist seine Geschwindigkeit im Inertialsystem S? Wir haben schon mehrfach darauf hingewiesen, dass die Addition der Geschwindigkeiten, die aus den Galilei-Transformationen folgt, nicht mit den Einsteinschen Postulaten kompatibel sein kann.

Um herauszufinden, wie sich Geschwindigkeiten in der relativistischen Mechanik addieren, gehen wir von den Lorentz-Transformationen aus. Wir betrachten die Orte des Teilchens zu zwei

aufeinanderfolgenden Zeiten. Dann gelten für die Orts- und Zeitintervalle die aus den Lorentz-Transformationen folgenden Relationen

$$\Delta x = \gamma (\Delta x' + v \Delta t') \quad \Delta y = \Delta y' \quad \Delta z = \Delta z'$$

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right)$$
(6.100)

Hier haben wir

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.101}$$

definiert, eine in der Relativitätstheorie häufig benutzte Konvention. Aus den räumlichen und zeitlichen Intervallen können wir nun die Geschwindigkeit \mathbf{u} im Inertialsystem *S* berechnen. So ist z.B.

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$
(6.102)

Entsprechende Gleichungen gelten für die anderen Geschwindigkeitskomponenten u_y und u_z . Mit Hilfe von Glg. (6.100) finden wir also

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}.$$
(6.103)

Klammern wir aus Zähler und Nenner jeweils $\Delta t'$ aus und identifizieren wir $u'_x = \Delta x' / \Delta t'$, so erhalten wir

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}.$$
(6.104)

Die entsprechenden Rechnungen für u_y und u_z liefern

$$u_{y} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^{2}} \Delta x'\right)} = \frac{u'_{y}}{1 + \frac{v}{c^{2}} u'_{x}} \sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}$$
$$u_{z} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\Delta z'}{\gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^{2}} \Delta x'\right)} = \frac{u'_{z}}{1 + \frac{v}{c^{2}} u'_{x}} \sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}.$$
(6.105)

Zusammenfassend erhalten wir also für die relativistische Geschwindigkeitsaddition die Gleichungen

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \tag{6.106}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
(6.107)

$$u_z = \frac{u'_z}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$
(6.108)

Im Gegensatz zu der Galileischen Geschwindigkeitsaddition ändern sich im allgemeinen die Geschwindigkeitskomponenten in *y*- und *z*-Richtung, auch wenn sich die Inertialsysteme nur in *x*-Richtung relativ zueinander bewegen. Dies ist eine Konsequenz der Zeitdilatation! Denn auch wenn sich die Längen in *y*- und *z*-Richtung nicht ändern, so ändert sich doch das zugehörige Zeitintervall beim Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes.



Figure 6.12: Winkeländerung der Geschwindigkeit

Wir können auch sicherstellen, dass die Galileische Geschwindigkeitsaddition einen Spezialfall der relativistischen Formeln darstellt. In der Tat reduzieren sich die relativistischen Formeln auf die Galileische Geschwindigkeitsaddition, wenn sowohl die Relativgeschwindigkeit v als auch die Geschwindigkeit des Teilchens $|\mathbf{u}'|$ klein sind im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c.

Wir wollen nun einige Beispiele diskutieren. Zunächst betrachten wir ein Teilchen (z.B. ein Photon), das sich in S' mit Lichtgeschwindigkeit in x-Richtung bewegt, d.h. $u'_x = c$, $u'_y = u'_z = 0$. Berechnen wir nun die Geschwindigkeit in S mithilfe von Glg. (6.106)-(6.108), so erhalten wir

$$u_x = \frac{c+v}{1+\frac{vc}{c^2}} = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c}} = c\frac{c+v}{c+v} = c$$
(6.109)

und $u_y = u_z = 0$. Wir sehen also, dass sich das Teilchen im Einklang mit dem 2. Postulat weiterhin mit Lichtgeschwindigkeit bewegt.

Als nächstes betrachten wir ein Teilchen, dass sich mit Lichtgeschwindigkeit in die y'-Richtung bewegt, d.h. $u'_y = c$ und $u'_x = u'_z = 0$. Nun ergibt die relativistische Geschwindigkeitsaddition

$$u_{x} = v$$

$$u_{y} = c\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}$$

$$u_{z} = 0.$$
(6.110)

Insbesondere folgt daraus, dass auch in S der Betrag der Geschwindigkeit

$$u = \sqrt{v^2 + c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = c.$$
(6.111)

wieder gleich der Lichtgeschwindigkeit ist.

Wir wollen schließlich die Winkeländerung der Geschwindigkeit beim Übergang zwischen Inertialsystemen diskutieren. Wir betrachten dazu ein Teilchen, dass sich in S' unter einem Winkel θ' zur positiven x-Achse in the xy-Ebene und mit dem Geschwindigkeitsbetrag u' bewegt, s. Abb. 6.12. Geht man nun zum Inertialsystem S über, so ändert sich der Winkel. Dies geschieht natürlich auch nach den Galilei-Transformationen in der Newtonschen Mechanik, nach denen wir das Resultat

$$\tan \theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{u'_y}{u'_x + v} = \frac{u' \sin \theta'}{u' \cos \theta' + v}$$
(6.112)

erhalten. Wir wollen nun die relativistische Verallgemeinerung dieses Resultats untersuchen. Hierzu berechnen wir mithilfe der relativistischen Geschwindigkeitsaddition

$$\tan \theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{u'_y}{u'_x + v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
(6.113)



Figure 6.13: Hertzscher Dipol

und somit

$$\tan \theta = \frac{u'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin\theta'}}{u'\cos\theta' + v}.$$
(6.114)

Dies unterscheidet sich vom nichtrelativistischen Resultat durch den Wurzelfaktor.

Dieses Resultat macht man sich bei der Synchrotron-Strahlung zunutze. Synchrotron-Strahlung sind elektromagnetische Wellen, die in Speicherringen erzeugt und in großem Stil zur Untersuchung z.B. von Festkörpern und biologischen Materialien benutzt wird. In Berlin gibt es mit dem BESSY in Adlershof eine von etwa 30 Anlagen weltweit, die derartige Strahlung erzeugen. Die Synchrotron-Strahlung beruht darauf, dass beschleunigte Ladungen elektromagnetische Wellen abstrahlen. Zur Erzeugung der Synchrotronstrahlung werden Elektronen in sogenannten Speicherringen fast auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt. Da die Elektronen bei ihrer Kreisbewegung um den Speicherring (aufgrund der Richtungsänderung) beschleunigt werden, strahlen sie elektromagnetische Wellen ab. Es stellt sich heraus, dass die Strahlung im Ruhesystem der Elektronen die Form eines Herzschen Dipols hat, s. Abb. 6.13, d.h. die Strahlung ist vornehmlich senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen in *y*-Richtung gerichtet. Wenn wir das Ruhesystem der Elektronen mit *S'* identifizieren, so ist also $\theta' \simeq \pi/2$ und u' = c. Da die Elektronen sich mit fast Lichtgeschwindigkeit bewegen, ist die Relativgeschwindigkeit in *x*-Richtung $v \simeq c$. Somit erhalten wir durch Einsetzen in Glg. (6.114)

$$\theta \approx \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \simeq 0 \tag{6.115}$$

d.h. im Laborsystem ist die gesamte Strahlung stark in Vorwärtsrichtung gebündelt. Der Winkel θ und damit die Bündelung wird umso stärker, je mehr sich die Elektronengeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit nähert. Mit der Bündelung steigt aber auch die Intensität des Lichts! Synchrotron-Strahlung zeichnet sich daher durch eine starke Fokussierung und hohe Brillianz aus. Ein weiterer Vorteil der Synchrotronstrahlung, der sich nicht aus diesen Betrachtungen erschließt, ist das breite Spektrum bis in den Röntgen-Bereich.

6.9 Der relativistische Dopplereffekt

Den Doppler-Effekt⁶ kennen sie aus dem Alltag. Fährt ein Auto vorbei, so klingt es bei der Annäherung höher als beim Entfernen. Um die Änderung der Schallfrequenz zu verstehen, betrachten wir eine sich bewegende Schallquelle und einen ruhenden Beobachter (jeweils relativ zur Luft, in der sich der Schall ausbreitet). Die Schallquelle bewege sich direkt auf den Beobachter zu bzw. von

⁶benannt nach Christian Doppler (1803-1853)



Figure 6.14: Zwei Intertialsysteme zur Ableitung des Dopplereffekts: Die Ursprünge der beiden Inertialsysteme soll zum Zeitpunkt t = t' = 0 zusammenfallen, d.h. x = x' = 0 für t = t' = 0.

ihm weg. Die Quelle habe die Frequenz f und sendet somit zwei aufeinanderfolgende Wellenberge mit dem zeitlichen Abstand $\Delta t = 1/f$ aus. Wird der erste Wellenberg zur Zeit t_1 ausgesendet, so folgt der nächste Wellenberg zur Zeit $t_2 = t_1 + \Delta t$. Der erste Wellenberg erreicht den Beobachter zur Zeit $t'_1 = t_1 + L/c$, wobei L die Entfernung von Sender und Beobachter zum Zeitpunkt des Aussendens ist und c die Schallgeschwindigkeit. Bis zum Aussenden des zweiten Wellenbergs hat sich die Quelle bereits um $|v\Delta t|$ weiterbewegt, so dass dieser den Beobachter zum Zeitpunkt $t'_2 = t_2 + (L + v\Delta t)/c$ erreicht.⁷ Der Beobachter nimmt also die Frequenz

$$f' = \frac{1}{t'_2 - t'_1} = \frac{1}{\Delta t + (v/c)\Delta t} = f\frac{1}{1 + v/c}$$
(6.116)

wahr. Für kleine Relativgeschwindigkeiten erhalten wir somit

$$f' = f\left(1 - \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2} + \dots\right)$$
(6.117)

Wir wollen nun den analogen Effekt für Licht diskutieren und Quellen betrachten, deren Geschwindigkeit vergleichbar mit der Lichtgeschwindigkeit sein kann. Betrachte hierzu die beiden Inertialsysteme S und S', deren Ursprünge zum Zeitpunkt t = t' = 0 zusammenfallen. In S werden bei x = 0 zu den Zeiten t = 0 und $t = \tau$ zwei aufeinanderfolgende Wellenberge des Lichts der Frequenz $f = 1/\tau$ ausgesendet. Diese werden in S' von einem Beobachter bei x' = 0 verfolgt. Der erste Lichtpuls wird vom Beobachter in S' am Ort x' = 0 zur Zeit t' = 0 registriert. Nach den Lorentz-Transformationen wird der zweite Lichtpuls in S' am Ort

$$x' = \frac{-v\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
(6.118)

und zur Zeit

$$t' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}}$$
(6.119)

ausgesendet. Anschließend braucht der Lichtpuls dann

$$\Delta t' = \frac{|x'|}{c} = \frac{\frac{v}{c}\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\tag{6.120}$$

⁷Wenn sich Quelle und Beobachter aufeinander zubewegen, nehmen wir v < 0, wenn sie sich voneinander entfernen, entspricht dies v > 0. Mit dieser Verabredung gelten die Formeln hier in beiden Situationen.



Figure 6.15: Transversaler Dopplereffekt

um den Beobachter bei x' = 0 zu erreichen. Somit wird der zweite Lichtimpuls vom Beobachter zum Zeitpunkt

$$t' + \Delta t' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \tau \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$
(6.121)

empfangen. Die vom Beobachter in S' gemessene Frequenz f' ist $f' = 1/(t' + \Delta t')$ und somit

$$f' = f \sqrt{\frac{1 - \frac{\nu}{c}}{1 + \frac{\nu}{c}}} \tag{6.122}$$

Dieser Effekt wird als longitudinaler relativistischer Dopplereffekt bezeichnet. Longitudinal bezieht sich hier darauf, dass die Ausbreitungsrichtung des Lichts und die Relativgeschwindigkeit von Quelle und Beobachter parallel sind.

Wir können unser Resultat nun für kleine Relativgeschwindigkeiten nähern. Für $\frac{\nu}{c} \ll 1$ erhalten wir

$$f' \simeq f\left(1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots\right).$$
(6.123)

Die führende Korrektur entspricht dem gewöhnlichen Doppler-Effekt. Der quadratische Term weicht aber vom nichtrelativistischen Resultat ab!

In der Relativitätstheorie gibt es auch einen transversalen Dopplereffekt, bei dem die Relativgeschwindigkeit von Quelle und Beobachter senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichts ist. In diesem Fall entfallen die Laufzeitunterschiede, aber die Effekte der Zeitdilatation bleiben bestehen. Konkret erscheinen die durch die Quelle ausgesendeten Signale für den Beobachter in S'zeitdilatiert, d.h.

$$f' = f\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$
(6.124)

Für kleine Relativgeschwindigkeiten finden wir in diesem Fall

$$f' \simeq f\left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + ...\right).$$
 (6.125)

Dieser transversale Dopplereffekt ist rein relativistisch und hat keine klassische Entsprechung.

Wir werden in nächsten Abschnitt sehen, dass der relativistische Doppler-Effekt eine zentrale Rolle bei der Ableitung der Äquivalenz von Masse und Energie spielt.



Figure 6.16: Dopplereffekt: Die Frequenz eines Lichtquants ändert sich je nach Bezugssystemen. Nach der Lichtquantenhypothese ändert sich damit auch seine Energie.

6.10 Äquivalenz von Masse und Energie

Wir wollen nun die wohl berühmteste Formel der Physik ableiten, nämlich

$$E = mc^2. ag{6.126}$$

Wir können uns hierzu sehr direkt an das von Einstein im Jahr 1905 publizierte Argument halten. Allerdings werden wir eine Formel mit Hilfe der (auch von Einstein im Jahr 1905 aufgestellten) Lichtquantenhypothese in Kombination mit dem relativistischen Doppler-Effekt ableiten, die Einstein aus der Elektrodynamik erhalten hat. Nach diesem Kapitel können Sie Einsteins (erstaunlich kurze) Orginalarbeit⁸ problemlos nachvollziehen.

Wir beginnen das Argument mit der Quantenhypothese des Lichts: Licht der Frequenz f besteht aus Photonen mit Energie $\varepsilon = hf$, wobei $h \approx 6 \cdot 10^{34} Js$ das berühmte Plancksche Wirkungsquantum ist. Die Idee der Lichtquanten oder Photonen wurde von Einstein in seiner Arbeit zum photoelektrischen Effekt eingeführt und mit dem Nobelpreis gewürdigt. Betrachten wir nun ein Lichtquant in den zwei Bezugssystemen S und S', so ändert sich seine Frequenz aufgrund des relativistischen Doppler-Effekts,

$$f' = f_{\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}}.$$
(6.127)

Nach der Lichtquantenhypothese müssen wir dann auch schließen, dass sich seine Energie entsprechend ändert,

$$\varepsilon' = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$
(6.128)

Diese Gleichung hat Einstein wie erwähnt nicht aus der Lichtquantenhypothese, sondern aus der Elektrodynamik abgleitet.⁹

Man betrachte nun einen im Inertialsystem *S* ruhenden Körper *K*, der zwei gleiche Lichtquanten in entgegengesetzte Richtungen (entlang der *x*-Achse) aussendet, s. Abb. 6.17. Da beide Lichtquanten identisch sind, ändert sich der Impuls des Körpers nicht und der Körper bleibt nach dem Aussenden der Lichtquanten weiter in Ruhe. Bezeichnen wir die Energie des Körpers im Inertialsystem *S* mit E_0 vor und mit E_1 nach dem Aussenden der Lichtquanten und die Energie der Lichtquanten mit $\frac{1}{2}\Delta\varepsilon$, so gilt nach der Energieerhaltung

$$E_0 = E_1 + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon.$$
(6.129)

⁸ A. Einstein, Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?, Ann. Physik 323, 639-643 (1905).

⁹Streng genommen gibt Einstein in seiner Publikation eine etwas allgemeinere Formel an, bei der die Relativgeschwindigkeit der Inertialsysteme und die Ausbreitungsrichtung des Lichts nicht parallel zueinander sind. Das macht aber für das gegebene Argument keinen wesentlichen Unterschied.



Figure 6.17: Gedankenexperiment zur Ableitung von $E = mc^2$: Ein Körper K sendet zwei Lichtquanten in entgegengesetzte Richtungen aus.

Die Energieerhaltung muss aber auch im Inertialsystem S' gelten, wo sie die Form

$$E_{0}' = E_{1}' + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon \left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon \left(\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}\right)^{\frac{1}{2}} = E_{1}' + \frac{\Delta\varepsilon}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}}$$
(6.130)

annimmt. Hier haben wir benutzt, dass die Frequenzen der Lichtquanten in *S* Doppler verschoben sind, wobei sich ein Lichtquant parallel und das andere antiparallel zur Relativigeschwindigkeit *v* der Inertialsysteme bewegt.

Ziehen wir die beiden letzten Gleichungen voneinander ab, so erhalten wir

$$E'_{0} - E_{0} = E'_{1} - E_{1} + \Delta \varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}} - 1 \right].$$
(6.131)

Nun können wir die Energiedifferenzen $E'_0 - E_0$ und $E'_1 - E_1$, also die Differenz der Energien des Körpers in den Inertialsystemen S' und S, als die kinetische Energie des Körpers in S' identifizieren. Denn in der Differenz wird die Gesamtenergie des Körpers in Ruhe (im Inertialsystem S) abgezogen von der Gesamtenergie des Körpers im Inertialsystem S', in dem er sich mit Geschwindigkeit v bewegt. Genauer ist $E'_0 - E_0$ die kinetische Energie vor der Lichtemission, $E'_1 - E_1$ die kinetische Energie nach der Lichtemission. Somit können wir die letzte Gleichung auch als

$$E'_{\rm kin,0} - E'_{\rm kin,1} = \Delta \varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right]$$
(6.132)

schreiben.

Auf den ersten Blick scheint uns dieses Resultat nicht wirklich zu helfen, denn wir kennen ja noch keinen Ausdruck für die kinetische Energie in der Relativitätstheorie. Allerdings gilt die Gleichung für alle Relativgeschwindigkeiten v der beiden Inertialsysteme und damit insbesondere auch für kleine $v \ll c$, für die sich die kinetische Energie in der führenden Ordnung in v/c durch das Newtonsche Resultat $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ nähern lässt. Somit können wir für kleine v

$$E'_{\rm kin,0} = \frac{1}{2}m_0v^2 \qquad E'_{\rm kin,1} = \frac{1}{2}m_1v^2 \tag{6.133}$$

schreiben. Hier haben wir vorsichtshalber verschiedene Massen des Körpers vor und nach dem Aussenden des Lichts angenommen.

Setzen wir dies nun in Glg. (6.133) ein und nähern wir auch die rechte Seite konsistent bis zur quadratischen Ordnung in v/c, so erhalten wir

$$\frac{1}{2}[m_0 - m_1]v^2 = \Delta \varepsilon \frac{v^2}{2c^2}.$$
(6.134)

Hier ist es wichtig zu verstehen, dass diese Gleichung exakt ist, obwohl wir beide Seiten genähert haben! Wir können beide Seiten der Gleichung als Taylor-Reihen in v/c schreiben. Die Gleichheit der beiden Seiten erfordert dann aber, dass *alle* Koeffizienten der Taylor-Reihen identisch

sind. Somit sind notwendigerweise auch die Koeffizienten der Ordnung $(v/c)^2$, die wir in dieser Gleichung angeschrieben haben, identisch. Insbesondere bedeutet dies auch, dass wir einen Widerspruch erhalten hätten, wenn wir die Masse des Körpers vor und nach der Lichtaussendung als gleich angenommen hätten. Denn dann würde die linke Seite verschwinden, die rechte aber nicht.

Wir finden also aus Glg. (6.134) einen Zusammenhang zwischen der mit der Lichtemission verbundenen Massenänderung $\Delta m = m_0 - m_1$ und der Energieänderung $\Delta \varepsilon$ des Körpers durch das Aussenden der beiden Photonen,

$$\Delta m = \frac{\Delta \varepsilon}{c^2}.\tag{6.135}$$

Die Änderung des Energieinhalts von *K* führt also zu einer Änderung der Ruhemasse. Offensichtlich spielt die in dem Argument gemachte Annahme, dass es sich um Strahlungsenergie handelt, keine wesentliche Rolle. Somit finden wir einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Energie- und Massenänderung,

$$\Delta \varepsilon = \Delta m c^2. \tag{6.136}$$

Wenn wir noch annehmen, dass die Energie eines ruhenden Körpers gegen Null geht, wenn seine Masse gegen Null strebt, so erhalten wir schließlich die Formel

 $E = mc^2. ag{6.137}$

Schon in seiner Originalarbeit erwähnt Einstein, dass diese Vorhersage unter Umständen bei radioaktiven Zerfällen getestet werden kann, bei denen viel Energie frei wird.

Die Äquivalenz von Masse und Energie verschmilzt die beiden Erhaltungssätze von Masse und von Energie zu einem einzigen Erhaltungssatz. Im folgenden wollen wir die relativistischen Versionen der Erhaltungsgrößen Impuls und Energie genauer untersuchen.

6.11 Der Impuls in der Relativitätstheorie

T 7

Wir beginnen mit dem Impuls. Wir erwarten oder hoffen, dass der Impuls in der relativistischen Mechanik weiterhin eine Erhaltungsgröße ist. Wir wollen nun zunächst zeigen, dass dann die bisherige Definition des Impulses $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ in der Relativitätstheorie keine geeignete Definition darstellt.

Hierzu betrachten wir den Stoß von zwei gleichen Massen im Schwerpunktsystem *S* wie in Abb. 6.18 dargestellt. Das Inertialsystem *S'* bewegt sich relativ zu *S* mit $\mathbf{V} = v_x \hat{\mathbf{x}}$, wobei v_x die *x*-Komponente der Geschwindigkeit von Teilchen 2 in *S* vor dem Stoß ist. Teilchen 2 bewegt sich also in *S'* in *y*-Richtung, $v'_x = 0$. Um alle Geschwindigkeitskomponenten der beiden Teilchen vor und nach dem Stoß im Inertialsystemen *S'* zu bestimmen, benutzen wir die relativistischen Geschwindigkeitstransformation und erhalten

$$v'_{x}(1) = \frac{-v_{x} - V}{1 + \frac{v_{x}V}{c^{2}}} = \frac{-2v_{x}}{1 + \frac{v_{x}}{c^{2}}}$$

$$v'_{y}(1) = \frac{\mp v_{y}}{1 + \frac{v_{x}V}{c^{2}}} \sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}} = \frac{v_{y}}{1 + \frac{v_{x}^{2}}{c^{2}}} \sqrt{1 - \frac{v_{x}^{2}}{c^{2}}}$$

$$v'_{x}(2) = \frac{v_{x} - V}{1 - \frac{v_{x}V}{c^{2}}} = 0$$

$$v'_{y}(2) = \frac{\pm v_{y}}{1 - \frac{v_{x}V}{c^{2}}} \sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}} = \frac{\pm v_{y}}{1 - \frac{v_{x}^{2}}{c^{2}}} \sqrt{1 - \frac{v_{x}^{2}}{c^{2}}} = \frac{\pm v_{y}}{\sqrt{1 - \frac{v_{x}^{2}}{c^{2}}}}.$$
(6.138)



Figure 6.18: Impuls in der Relativitätstheorie: Stoß zweier Massen

Hier entspricht das obere bzw. untere Vorzeichen der Geschwindigkeit vor bzw. nach dem Stoß. Wir beobachten nun, dass

$$\Delta[mv'_{y}(2)] = \frac{-2mv_{y}}{\sqrt{1 - \frac{v_{x}^{2}}{c^{2}}}}$$
(6.139)

für Teilchen 2 und

$$\Delta\left[mv_{y}'(1)\right] = \frac{2mv_{y}}{1 + \frac{v_{x}^{2}}{c^{2}}}\sqrt{1 - \frac{v_{x}^{2}}{c^{2}}},$$
(6.140)

für Teilchen 1. Durch Vergleich sehen wir unmittelbar, dass der "konventionelle Impuls" in der Relativitätstheorie *nicht* erhalten bleibt!

Analysieren wir den Grund für die Nichterhaltung des Impulses, so sehen wir, dass in $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ der Zähler Δy in allen Bezugssystemen (mit Relativgeschwindigkeit in *x*-Richtung) gleich bleibt, Δt sich aber wegen der Zeitdilatation ändert.

Um dies zu korrigieren, definieren wir den Impuls mit Hilfe der vom Teilchen gesehenen Eigenzeit Δt_0 , die von einem mit dem Teilchen mitbewegten Beobachter gemessen wird. Gilt dann die Impulserhaltung in einem Inertialsystem, so gilt sie in allen Inertialsystemen. Da ein Zeitintervall *dt* im Inertialsystem mit dem Eigenzeitintervall *dt*₀ des sich mit Geschwindigkeit **v** bewegenden Teilchens wegen der Zeitdilatation über

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.141}$$

zusammenhängt, finden wir die relativistische Definition

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt_0} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
(6.142)

des Impulses. Hier ist

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{6.143}$$

die Geschwindigkeit des Teilchens im Inertialsystem.

Dieser Ausdruck für den Impuls kann auch so interpretiert werden, dass die Masse geschwindigkeitsabhängig wird,

$$\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v},\tag{6.144}$$

mit

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
(6.145)

Diese geschwindigkeitsabhängige Masse divergiert für $v \rightarrow c$, konsistent mit der Tatsache, dass c eine Grenzgeschwindigkeit ist.

6.12 Die kinetische Energie in der Relativitätstheorie

In der Newtonschen Mechanik konnten wir aus der Newtonschen Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ einen Ausdruck für die kinetische Energie ableiten. Diese Rechnung wollen wir nun in die Relativitätstheorie übertragen. Wir gehen aus von der Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichung,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
(6.146)

und berechnen die von der Kraft geleistete Arbeit. Wenn wir der Einfachheit halber annehmen, dass $\mathbf{F} \parallel \hat{\mathbf{x}}$, müssen wir

$$W = \int dxF = \int dx\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
(6.147)

berechnen. Hierzu parametrisieren wir die Trajektorie mithilfe der Zeit, x = x(t) und gehen mit dx = dt(dx/dt) zu einem Integral über die Zeit über,

$$W = \int dt \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
(6.148)

Mittels partieller Integration finden wir nun

$$W = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \int dt \, \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \, \frac{dv}{dt}.$$
(6.149)

Hier integrieren wir in den Integrationsgrenzen v(0) = 0 und v(t) = v, da die kinetische Energie der zur Erhöhung der Geschwindigkeit von 0 auf v notwendigen Arbeit gleicht. Das Integral kann nun mithilfe von dt(dv/dt) = dv als Integral über die Geschwindigkeit geschrieben werden,

$$W = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \int dv \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
(6.150)

Im nächsten Schritt schreiben wir das Integral wegen $dv^2 = 2vdv$ als Integral über v^2 und führen es aus,

$$W = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m}{2} \int dv^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1\right]$$
(6.151)

Damit erhalten wir schließlich

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \tag{6.152}$$

für die geleistete Arbeit und

$$E_{\rm kin} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \tag{6.153}$$

für die kinetische Energie in der Relativitätstheorie.

Wir können diese Rechnung auf Konsistenz prüfen, indem wir den nicht-relativistischen Grenzfall $v \ll c$ betrachten. In diesem Limes erhalten wir mit

$$E_{\rm kin} \to mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) - mc^2 = \frac{m}{2}v^2$$
 (6.154)

das erwartete Resultat.

Schließlich können wir die Ruheenergie mc^2 und die kinetische Energie E_{kin} zusammen betrachten und erhalten den Energieinhalt

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m(v)c^2$$
(6.155)

eines Körpers, der sich mit der Geschwindigkeit v bewegt.

6.13 Relativistische Dynamik

Nun sind wir soweit, dass wir die Bewegung eines relativistischen Teilchens in elektrischen und magnetischen Feldern beschreiben können.

6.13.1 Geladenes Teilchen im konstanten elektrischen Feld

Wir beginnen mit einem geladenen Teilchen in einem räumlich konstanten elektrischen Feld \mathscr{E} . Auf das Teilchen wirkt also eine konstante Kraft $\mathbf{F} = q\mathscr{E}$, wobei q die Ladung des Teilchens beschreibt. Beschränken wir uns auf die Bewegung in Feldrichtung, so müssen wir die Bewegungsgleichung

 $\dot{p} = q\mathcal{E} \tag{6.156}$

lösen. Als Anfangsbedingung nehmen wir an, dass das Teilchen zum Zeitpunkt t = 0 in Ruhe ist, v(0) = 0. Schreiben wir den relativistischen Impuls explizit, so wollen wir

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = q\mathscr{E}$$
(6.157)

lösen. Integrieren wir beide Seiten über die Zeit im Intervall [0,t], so erhalten wir

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\bigg|_{v(0)=0}^{v(t)=v} = q\mathscr{E}t$$
(6.158)

und somit

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = q \mathscr{E}t.$$
(6.159)

Um dies nach der Geschwindigkeit aufzulösen, quadrieren wir die Gleichung und sortieren um,

$$m^{2}v^{2} = (q\mathscr{E}t)^{2} \left(1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}\right)$$
(6.160)

bzw.

$$v^2 \left[1 + \left(\frac{q\mathscr{E}t}{mc}\right)^2 \right] = \left(\frac{q\mathscr{E}t}{m}\right)^2. \tag{6.161}$$

Daraus erhalten wir schließlich

$$v = \frac{\frac{q\mathscr{E}t}{m}}{\sqrt{1 + \left(\frac{q\mathscr{E}t}{mc}\right)^2}}.$$
(6.162)

Dieses Ergebnis sollte mit dem nicht-relativistischen Resultat v = qEt/m verglichen werden.

Um das Ergebnis bessser zu verstehen, betrachten wir zunächst kleine Zeiten $q \mathscr{E}t/m \ll c$. In diesem Limes erhalten wir

$$v \simeq \frac{q\mathscr{E}t}{m} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{q\mathscr{E}t}{mc} \right)^2 + \dots \right].$$
(6.163)

Der erste Term in der eckigen Klammer gibt das nicht-relativistische Resultat, der zweite Term ist eine relativistische Korrektur. In der Tat erwarten wir, dass das Teilchen anfangs langsam ist und sich somit in guter Näherung nach der Newtonschen Mechanik bewegt.

Im Gegensatz dazu finden wir für große Zeiten $q \mathscr{E} t / m \gg c$, dass

$$v \approx c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{q \mathscr{E} t} \right)^2 + \dots \right]$$
(6.164)

Die Geschwindigkeit des Teilchens nähert sich also asymptotisch der Lichtgeschwindigkeit c, bleibt aber wie erwartet zu allen Zeiten unterhalb von c. Die Lösung für v(t) und diese Näherungen für kleine und große Zeiten sind in Abb. 6.19 graphisch dargestellt.

Wir können auch die Energie des Teilchens als Funktion der Zeit berechnen,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \frac{q\mathscr{E}t}{mv} = \frac{q\mathscr{E}ct}{v/c}$$
$$\longrightarrow \begin{cases} mc^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{q\mathscr{E}t}{m}\right)^2 + \dots & \frac{q\mathscr{E}t}{m} \ll c\\ q\mathscr{E}ct & \frac{q\mathscr{E}t}{m} \gg c \end{cases}$$
(6.165)



Figure 6.19: Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit für die relativistische Bewegung in einem konstanten Kraftfeld.

Das Ergebnis für große Zeiten zeigt, dass sogar dann, wenn die Teilchengeschwindigkeit schon fast *c* beträgt und sich praktisch nicht mehr ändert, die Energie weiter linear in der Zeit wächst!

Der relativistische Impuls als Funktion der Zeit ändert sich nach

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = q \mathscr{E}t.$$
 (6.166)

Der Impuls ändert sich also auch linear in der Zeit, selbst wenn die Geschwindigkeit bereits praktisch konstant ist.

6.13.2 Geladenes Teilchen im Magnetfeld

Als zweites Beispiel einer relativistischen Bewegung betrachten wir die Bewegung in einem homogenen Magnetfeld. Die Bewegungsgleichung hat die Form

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{6.167}$$

an. Um diese Gleichung zu lösen betrachten wir zunächst, dass

$$\frac{dp^2}{dt} = 2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 2\mathbf{p} \cdot (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$
(6.168)

da **v** || **p**. Der Betrag der Geschwindigkeit und des Impulses bleiben also zeitlich unverändert, und damit auch $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Die Bewegungsgleichung kann also als

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$
(6.169)

geschrieben werden. In dieser Form kann die Gleichung jetzt wie im nicht-relativistischen Fall gelöst werden. Nur hängt jetzt die Zyklotronfrequenz vom Betrag der Geschwindigkeit ab,

$$\omega_c = \frac{qB}{m(v)},\tag{6.170}$$

wobei $m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ die bewegte Masse ist. Ebenso können wir den Zyklotronradius der Kreisbewegung zu

$$R_{c} = \frac{m(v)v}{eB} = \frac{mv}{eB} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}} > \frac{mv}{eB}$$
(6.171)

bestimmen.

6.14 Transformation von Impuls und Energie

Bisher wissen wir nur, wie sich Ort und Zeit beim Übergang zwischen zwei Inertialsystemen transformieren. Dies wird durch die Lorentz-Transformationen angegeben. Allerdings hängen auch andere Größen vom Inertialsystem ab, insbesondere der Impuls

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.172}$$

und die Energie

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$
(6.173)

In der nicht-relativistischen Mechanik hängen kinetische Energie und Impuls eines Teilchens über $E = p^2/2m$ zusammen. Wir wollen nun zunächst die analoge relativistische "Dispersion" ableiten. Dazu berechnen wir

$$p^{2}c^{2} = \frac{m^{2}v^{2}c^{2}}{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}} = \frac{m^{2}c^{4}}{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}} \frac{v^{2}}{c^{2}} = \frac{m^{2}c^{4}}{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}} - \frac{m^{2}c^{4}}{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}} \left(1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}\right) = E^{2} - m^{2}c^{4}$$
(6.174)

und erhalten damit

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. ag{6.175}$$

Für $v \ll c$ reduziert sich dies in der Tat

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots$$
(6.176)

auf das nicht-relativistische Resultat (mit der Ruheenergie mc^2 als additiver Konstante).

Da m^2c^4 unabhängig vom Bezugssystem ist, folgt aus der relativistischen Dispersion, dass auch die Kombination

$$E^2 - p^2 c^2 (6.177)$$

unabhängig vom Inertialsystem ist. Man sagt, dass $E^2 - p^2 c^2$ eine Lorentz-Invariante ist.

Wie transformieren nun \mathbf{p} und E unter Transformation des Bezugssystems? Um diese Frage zu beantworten, schreiben wir

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt_0} \tag{6.178}$$

und

$$E = mc^2 \frac{dt}{dt_0}.$$
(6.179)

Den relativistischen Impuls hatten wir auf diese Weise mithilfe der Eigenzeit t_0 definiert, die Gleichung für die Energie folgt aus dem Zusammenhang zwischen (infinitesimalen) Intervallen der Zeit t im Inertialsystem und der Eigenzeit t_0 , $dt = dt_0/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, der einfach aus der Zeitdilatation folgt. Da nun aber die Eigenzeit t_0 unabhängig vom Beobachter ist, transformieren Impuls und Energie wie Ortsvektor und Zeit. Inklusive der Faktoren von c sind die direkten Analogien

$$\mathbf{p} \longleftrightarrow \mathbf{r}$$
 (6.180)

und

$$E \longleftrightarrow c^2 t. \tag{6.181}$$

Die Transformationsformeln für Energie und Impuls erhalten wir also einfach durch entsprechende Ersetzungen in den Lorentz-Transformationen,

$$p'_{x} = \frac{p_{x} - \frac{v}{c^{2}}E}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}}$$

$$p'_{y} = p_{y}$$

$$p'_{z} = p_{z}$$

$$E' = \frac{E - vp_{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}}.$$
(6.182)

Ebenso wie sich Zeit und Ort gemeinsam transformieren, transformieren also auch Energie und Impuls. Wir wollen im nächsten Abschnitt zeigen, dass man daher Zeit und Ort bzw. Energie und Impuls als Komponenten einer vektoriellen Größe auffassen kann. Ebenso wie die Komponenten eines gewöhnlichen Vektors bei Drehungen des Koordinatensystems gemeinsam transformieren, tranformieren Zeit und Ort bzw. Energie und Impuls gmeinsam bei Transformationen zwischen Inertialsystemen (Lorentz-Transformationen). Wir werden sogar sehen, das Lorentz-Transformationen auch formal eine große Ähnlichkeit mit Drehungen eines Koordinatensystems haben.

6.15 Viererskalare, Vierervektoren und Vierertensoren

Um dies genauer zu verstehen, nutzen wir zunächst die Analogie $E \leftrightarrow c^2 t$ und $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{r}$ in die entgegengesetzte Richtung aus. Aus der Tatsache, dass $E^2 - p^2 c^2$ eine Lorentz-Invariante ist, folgt, dass ebenso $c^4 t^2 - \mathbf{r}^2 c^2$ bzw.

$$c^2 t^2 - \mathbf{r}^2$$
 (6.183)

unabhängig vom Bezugssystem ist. Diese Beobachtung können wir für eine alternative Herleitung der Lorentz Transformationen nutzen: Lorentz-Transformationen sind Transformationen, die die "Länge" $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ invariant lassen. Man vergleiche dies mit Drehungen des Koordinatensystems, bei denen die gewöhnliche kartesische Länge $x^2 + y^2 + z^2$ invariant bleibt.

In der nicht-relativistischen Mechanik hatten wir das Verhalten unter Drehungen benutzt, zum Skalare, Vektoren und Tensoren zu definieren. Die Analogie zwischen Lorentz-Tranformationen und Drehungen erlaubt es uns nun, eine relativistische Verallgemeinerung von Skalaren, Tensoren und Tensoren einzuführen:

- Lorentz-Skalare: Dies sind Größen, die unter Lorentz-Tranformationen invariant bleiben. Als Beispiele haben wir bereits die Ruhemasse oder die Lichtgeschwindigkeit kennengelernt.
- Vierervektoren: Dies sind Größen, die sich unter Lorentz-Transformationen wie Zeit und Ort transformieren. Man kann dann Zeit und Ort als die Komponenten eines *vier*-komponentigen Vektors definieren. Diese Komponenten schreibt man meist als x^μ, wobei man

$$x^{0} = ct, x^{1} = x, x^{2} = y, x^{3} = z$$
 (6.184)

definiert. Man beachte, dass die zeitliche Komponente mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit der Dimension nach in eine Länge umgewandelt wurde und somit alle Komponenten die gleiche Dimension haben. Ein solcher Vierervektor hat die Länge

$$(x^{0})^{2} - (x^{1})^{2} - (x^{2})^{2} - (x^{3})^{2}.$$
(6.185)

Diese Länge ist Lorentz-invariant und damit ein Lorentz-Skalar. Wie bei gewöhnlichen Vektoren kann man also auch aus Vierervektoren über die Länge einen Skalar bilden.

Neben dem Vierervektor x^{μ} kennen wir mit dem Viererimpuls bereits einen weiteren Vierervektor p^{μ} mit den Komponenten

$$p^{0} = \frac{E}{c}, p^{1} = p_{x}, p^{2} = p_{y}, p^{3} = p_{z}.$$
 (6.186)

Auch hier haben wieder wegen der Lichtgeschwindigkeitsfaktoren alle Komponenten die gleiche Dimension. Auch aus diesem Vierervektor können wir mit Hilfe der Länge einen Lorentz-Skalar bilden, nämlich

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2.$$
 (6.187)

Man kann sich, zum Beispiel explizit mithilfe der Lorentz-Transformationen, davon überzeugen, dass auch Skalarprodukte von zwei Vierervektoren Lorentz-Skalare sind. Ein Beispiel wäre das Skalarprodukt von x^{μ} und p^{μ} , d.h. $p^0x^0 - p^1x^1 - p^2x^2 - p^3x^3$.

Um die "Länge" $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ des Vierervektors x^{μ} bequemer schreiben zu können, führt man zwei Sorten von Vektorkomponenten ein. Die Komponenten

$$x^{\mu} = (ct, \mathbf{r}),\tag{6.188}$$

die wir bisher benutzt haben, werden als *kontravariante* Komponenten bezeichnet. Diese werden immer mit einem hochgestellten Index geschrieben. Zusätzlich führt man nun auch *kovariante* Vierervektoren ein, dessen Komponenten x_{μ} mit einem gewöhnlichen Index geschrieben werden und dessen räumliche Komponenten ($\mu = 1, 2, 3$) sich von den kontravarianten Komponenten um ein Vorzeichen unterscheiden,

$$x_{\mu} = (ct, -\mathbf{r}). \tag{6.189}$$

Mit diesen Definitionen können wir die Lorentz-invariante Länge des Vierervektors x^{μ} schreiben als

$$x_{\mu}x^{\mu}$$
. (6.190)

Hier haben wir die Einsteinsche Summenkonvention benutzt, nach der über doppelt auftretende Indizes automatisch summiert wird. Dieser Ausdruck steht also für $x_{\mu}x^{\mu} = x_0x^0 + x_1x^1 + x_2x^2 + x_3x^3$. In dieser Schreibweise erhalten wir also aus $\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$ die Gleichung

$$p_{\mu}p^{\mu} = m^2 c^2 \tag{6.191}$$

und aus $c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = 0$ für den Lichtkegel

$$x_{\mu}x^{\mu} = 0 \tag{6.192}$$

• Vierertensoren: Schließlich transformieren Vierertensoren wie das Produkt zweier Vierervektoren,

$$x^{\mu}x^{\nu}$$
. (6.193)

Hier wollen wir als Beispiel nur den elektromagnetischen Feldtensor $F^{\mu\nu}$ erwähnen, dessen Komponenten durch das elektrische und magnetische Feld gegeben sind,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$
(6.194)

Die Invarianz der Länge $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ kann als Ausgangspunkt einer alternativen Ableitung der Lorenz-Transformationen benutzt werden, die die Analogie zu Drehungen eines Koordinatensystems explizit macht und damit die Analogie zwischen Skalaren, Vektoren und Tensoren bzgl. Drehungen des Koordinatensystems und Viererskalaren, Vierervektoren und Vierertensoren bzgl. Lorentz-Transformationen. Für gewöhnliche Drehungen des Koordinatensystems waren wir davon ausgegangen, dass Winkel und kartesische Längen invariant bleiben. Hieraus konnten wir folgern, dass Vektoren wie $\mathbf{x}' = D\mathbf{x}$ transformieren, wobei *D* eine Drehmatrix mit der Eigenschaft $DD^T = D^T D = \mathbf{1}$ ist. In zwei Dimensionen nimmt *D* insbesondere die Gestalt

$$D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$
(6.195)

an.

Wir können nun auf analoge Weise versuchen, die Lorentz-Transformationen aus der Invarianz der Viererlänge $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ abzuleiten. Sie unterscheidet sich von der gewöhnlichen kartesischen Länge dadurch, dass die verschiedenen Komponenten mit unterschiedlichen Vorzeichen eingehen. Insbesondere bedeutet dies auch, dass die Viererlänge nicht notwendigerweise positiv ist! Speziell betrachten wir eine Lorentztransformation für Relativgeschwindigkeit in *x*-Richtung. Dann bleiben die Koordinaten x^2 und x^3 bei der Transformation unverändert, und wir können uns auf die Invarianz von $(x^0)^2 - (x^1)^2$ konzentrieren.

Wir wollen nun zeigen, dass $(x^0)^2 - (x^1)^2$ invariant bleibt unter der Transformation

$$\begin{pmatrix} (x^0)'\\ (x^1)' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} (x^0)\\ (x^1) \end{pmatrix}$$
(6.196)

mit

$$L = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix}.$$
 (6.197)

Diese Transformationsmatrix hat offenbare Ähnlichkeiten mit einer Drehmatrix.

In der Tat können wir dieses Resultat mit einem kleinen Trick aus der Drehmatrix ableiten.¹⁰ Hierzu führen wir die neuen Koordinaten $\tilde{x}^0 = ix^0$ und $\tilde{x}^1 = x^1$ ein (und entsprechend im gestrichenen System). Wir multiplizieren also die Zeitkomponente mit *i*, die räumliche Komponenten aber nicht. Aus der Invarianz von $(x^0)^2 - (x^1)^2$ wird in den neuen Koordinaten die Konstanz von $-(\tilde{x}^0)^2 - (\tilde{x}^1)^2$ oder äquivalent $(\tilde{x}^0)^2 + (\tilde{x}^1)^2$. Dies ist aber einfach die gewöhnliche Länge und wir wissen bereits, dass diese unter den Drehmatrizen *D* invariant bleibt. Somit gilt

$$\begin{pmatrix} (\tilde{x}^0)'\\ (\tilde{x}^1)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tilde{\alpha} & \sin\tilde{\alpha}\\ -\sin\tilde{\alpha} & \cos\tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}^0\\ \tilde{x}^1 \end{pmatrix}.$$
(6.198)

Schreiben wir dies in den ursprünglichen physikalischen Koordinaten, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} i(x^0)'\\ (x^1)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tilde{\alpha} & \sin\tilde{\alpha}\\ -\sin\tilde{\alpha} & \cos\tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix^0\\ x^1 \end{pmatrix}.$$
(6.199)

Wir können diese Gleichung von links mit

$$\left(\begin{array}{cc} -i & 0\\ 0 & 1 \end{array}\right) \tag{6.200}$$

¹⁰Natürlich lässt sich dies auch einfach explizit nachprüfen. Dazu gehen wir von $(x^0)' = x^0 \cosh \alpha + x^1 \sinh \alpha$ und $(x^1)' = x^0 \sinh \alpha + x^1 \cosh \alpha$ aus und berechnen $[(x^0)']^2 - [(x^1)']^2$. Hierzu müssen wir nur die Identität $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$ beachten.

multiplizieren und erhalten

$$\begin{pmatrix} (x^0)'\\ (x^1)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\alpha} & \sin \tilde{\alpha}\\ -\sin \tilde{\alpha} & \cos \tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0\\ x^1 \end{pmatrix}.$$
 (6.201)

Mutiplizieren wir die Matrizen aus, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} (x^0)'\\ (x^1)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tilde{\alpha} & -i\sin\tilde{\alpha}\\ -i\sin\tilde{\alpha} & \cos\tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0\\ x^1 \end{pmatrix}.$$
(6.202)

Die Vektorkomponenten müssen natürlich reell sein, da sie physikalischen Zeiten und Orten entsprechen. Dies ist der Fall, wenn wir $\tilde{\alpha} = i\alpha$ wählen. Benutzen wir nun die Identitäten

$$\cos\tilde{\alpha} = \cos(i\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i(i\alpha)} + e^{-i(i\alpha)}) = \cosh\alpha$$
(6.203)

und

$$-i\sin\tilde{\alpha} = -i\sin(i\alpha) = \frac{-i}{2i}(e^{i(i\alpha)} - e^{-i(i\alpha)}) = \sinh\alpha,$$
(6.204)

so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} (x^0)'\\ (x^1)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha\\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0\\ x^1 \end{pmatrix}$$
(6.205)

wie bereits vorweggenommen.

Um schließlich den Zusammenhang mit den Lorentz-Transformationen zu erhalten, müssen wir noch die Verbindung zwischen α und der Relativgeschwindigkeit v der Inertialsysteme herstellen. Hierzu beachten wir, dass sich der Ursprung des gestrichenen Systems [und damit insbesondere der Punkt $(x^1)'$] im ungestrichenen System mit der Geschwindigkeit v bewegt. Da $(x^1)' = 0 = x^0 \sinh \alpha + x^1 \cosh \alpha$, müssen wir also fordern, dass $v = x/t = c(x^1/x^0) = -c \tanh \alpha$ und erhalten so

$$\tan \alpha = -\frac{v}{c}, \ \cosh \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \ \sinh \alpha = -\frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$
(6.206)

Setzen wir dies in die Lorentz-Matrix L ein, so erhalten wir wieder die bekannten Lorentz-Transformationen

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - (\nu/c)^2}} & \frac{-\nu/c}{\sqrt{1 - (\nu/c)^2}} \\ \frac{-\nu/c}{\sqrt{1 - (\nu/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - (\nu/c)^2}} \end{pmatrix}.$$
(6.207)