Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2017/2018 Blatt 10

Abgabetermin: Montag, 08.01.2018, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 10:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (2+4+4 Punkte)

Welche der Größen Energie, Impuls und Drehimpuls sind in den folgenden Problemen erhalten:

(a) freies Teilchen in drei Dimensionen (keine angreifende Kraft $\mathbf{F}$)

(b) Teilchen im Zentralkraftfeld

(c) harmonischer Oszillator (in einer Dimension).

Aufgabe 2: Vermischtes (3 + 3 + 4 Punkte)

(a) Geben Sie das Potential zum Kraftgesetz $F(x) = -Kx^3$ (K ist eine Konstante, x eine kartesische Koordinate) an.

(b) Geben Sie das Potential zum Kraftgesetz $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$ ($\mathbf{r}$ ist ein dreidimensionaler Ortsvektor mit Betrag r; α ist eine Konstante) an. *Bemerkung: Hier kann Ihnen vielleicht Aufgabe 3 helfen.*

(c) Erklären Sie die geometrische Bedeutung des Vektors $\nabla f(\mathbf{r})$ für eine Funktion $f(\mathbf{r})$. Was bedeutet die Richtung? Was bedeutet der Betrag des Vektors?

Aufgabe 3: Gradient in Zylinder- und Kugelkoordinaten (5+5 Punkte)

Wir haben den Gradienten zunächst in kartesischen Koordinaten eingeführt. Zeigen Sie, dass der Gradient die folgende Form in Zylinder- und Kugelkoordinaten annimmt:

(a) Zylinderkoordinaten: $\nabla f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z$

(b) Kugelkoordinaten: $\nabla f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi$

Hinweis: Benutzen Sie z.B. die Taylorreihe bis zu linearer Ordnung,

$$f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + d\mathbf{r} \cdot \nabla f(\mathbf{r}) + \ldots$$

sowie Ausdrücke für $d\mathbf{r}$ in Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten (analog zu unseren Überlegungen für Polarkoordinaten).

Aufgabe 4: Kepler-Problem und Energieerhaltung (2+3+2+3 Punkte)

Wir haben in der Vorlesung die Radialgleichung

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

mit Hilfe eines kleinen Tricks gelöst. Andererseits entspricht diese effektiv der Bewegungsgleichung eines eindimensionalen Problems mit der einzigen Koordinate r, wobei die rechte Seite der Gleichung proportional zu einer effektiven Kraft ist. Wir können dieses Problem also auch mit Hilfe des allgemeinen Lösungswegs für eindimensionale konservative Probleme lösen.

(a) Finden Sie einen Ausdruck für die zur effektiven Kraft gehörende potentielle Energie $V_{\text{eff}}(r)$.

(b) Finden Sie mit Hilfe der Energieerhaltung eine implizite Lösung für die Funktion $r = r(t)$. (Sie brauchen hier das auftretende Integral nicht zu lösen.)

(c) Schreiben Sie mit Hilfe der Drehimpulserhaltung die implizite Lösung für $r = r(t)$ in eine implizite Lösung für die Bahnkurve $r = r(\varphi)$ um.

(d) Berechnen Sie (nicht äquivalent zu: Nachschlagen) das in der impliziten Lösung für die Bahnkurve auftretende Integral und zeigen Sie auf diese Weise, dass die gesuchte Bahnkurve eine Ellipse ist.