

Übungsblatt 1 Statistische Thermodynamik

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_N dafür, dass von N Studierenden mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben? Berechnen Sie den Wert von P_N für $N = 10$. Bei welcher Mindestanzahl N_{min} übersteigt die Wahrscheinlichkeit den Wert $\frac{1}{2}$?
2. Statistische Ungenauigkeit beim Würfeln: Berechnen Sie mithilfe der Formel

$$\Delta n = \sqrt{pqN}$$

die relative Schwankung für das Würfeln einer Eins, wenn (a) in 1000 Würfeln 175 mal Eins fällt, (b) in 100000 Würfeln 17500 mal Eins fällt. Machen Sie eine Aussage darüber, ob der Würfel in (a) oder (b) manipuliert sein könnte. Hinweis: Setzen Sie für p die ideale Wahrscheinlichkeit, eine Eins zu würfeln, und für q die ideale Wahrscheinlichkeit, irgendeine andere Zahl zu erhalten.

3. Betrachten Sie das Werfen einer Münze. Bei jedem Wurf sei die Wahrscheinlichkeit, Kopf oder Zahl zu werfen, genau gleich. In einer Folge von N Würfeln sei W_{max} die Anzahl der Möglichkeiten, insgesamt $N/2$ mal Kopf und $N/2$ mal Zahl zu werfen. Demgegenüber sei W die Zahl der Möglichkeiten, unterschiedliche Anzahlen K von Kopf und Z von Zahl zu werfen.
(a) Zeigen Sie, dass für große Werte von N , K und Z gilt:

$$\ln \frac{W}{W_{max}} = -K \ln \frac{K}{N/2} - Z \ln \frac{Z}{N/2}.$$

(b) Relativ zur dominanten Konfiguration mit gleicher Anzahl Würfeln von Kopf und Zahl kann die Abweichung der anderen Konfigurationen durch den Index

$$\alpha \equiv \frac{K - Z}{N}$$

ausgedrückt werden. Dabei kann α Werte von -1 bis +1 annehmen, mit 0 als Wert für die dominante Konfiguration. Zeigen Sie, dass K und Z mithilfe des Indexes α ausgedrückt werden können als

$$K = \frac{N}{2}(1 + \alpha) \quad Z = \frac{N}{2}(1 - \alpha).$$

(c) Zeigen Sie durch Einsetzen der Formeln aus (b) in die Formel aus (a), dass für Konfigurationen, die nur gering von der dominanten Konfiguration abweichen, W mit W_{max} durch eine einfache Gaußfunktion gemäß

$$W(\alpha) = W_{max} e^{-N\alpha^2}$$

verbunden ist. Wie verändert sich die Form dieser Funktion für steigende Werte von N ?

4. Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}.$$

5. Eine aus fünf Molekülen bestehende Probe besitzt eine Gesamtenergie von 5ε . Jedes Molekül kann Zustände der Energie $n \cdot \varepsilon$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$ einnehmen. Geben Sie alle möglichen Makrozustände an, die mit der Gesamtenergie verträglich sind. Bestimmen Sie das statistische Gewicht der jeweiligen Makrozustände. Welcher Makrozustand ist am wahrscheinlichsten?
6. Ein Molekül besitzt einen nichtentarteten angeregten Schwingungszustand 540 cm^{-1} über dem Grundzustand. Bei welcher Temperatur liegen 10 % der Moleküle in diesem Zustand vor? Wie hoch ist der Anteil des angeregten Zustands bei Raumtemperatur (298,15 K)?