Aufgaben zum Brückenkurs Mathematik des Fachbereichs Physik der Freien Universität Berlin

Vorwort

Sie stehen am Beginn Ihres Studiums. Sie werden feststellen, dass an der Universität vieles anders ist als in der Schule. Gerade die ersten beiden Semester fallen oft schwer. Viele Studierende fühlen sich überfordert und brechen ihr Studium frustriert (und oft voreilig!) ab. Damit Ihnen dies nicht passiert, geben wir Ihnen verschiedene Hilfen. Eine davon ist dieser Brückenkurs.

Im Wesentlichen erfüllt der Brückenkurs zwei Funktionen:
1. Er wiederholt wichtige Inhalte der Schulmathematik, die bereits im ersten Semester gebraucht werden.
2. Er vermittelt Ihnen Einblicke, welche Anforderungen Ihr zukünftiges Studium an Sie stellen wird und gibt Ihnen Gelegenheit, Menschen und Örtlichkeiten der Freien Universität Berlin kennenzulernen.

Gerade wenn Sie zu den Schüler/inne/n gehören, denen die Schule relativ leicht fiel, werden Sie in den ersten Semestern einige ungewohnte Erfahrungen machen: Sie werden feststellen, dass Sie nicht alles sofort verstehen, und Sie werden Hausaufgaben bekommen, bei denen Sie nicht sofort wissen, wie diese zu lösen sind. Das kann im ersten Moment frustrierend sein. Es ist aber zu bewältigen! Wenn Sie diese Herausforderungen gemeistert haben, werden Sie stolz auf Ihre Leistung sein und merken, dass Sie eine Menge dabei gelernt haben. Das Gelernte geht dabei weit über die reinen Fachinhalte hinaus – hier geht es um allgemeine Problemlösestrategien, Literaturrecherche, Durchhaltevermögen, abstraktes Denken und nicht zuletzt Teamfähigkeit. Diese Kompetenzen kann man nur entwickeln, wenn man sich entsprechenden Herausforderungen stellt.

Es ist ähnlich wie beim Sport:
Wer sich nicht anstrengt und fleißig trainiert, wird niemals wirklich gut!

Ein zentraler Punkt im Studium ist die Arbeit mit geeigneter Fachliteratur.
Dieser Brückenkurs verwendet als Referenz das Buch

Merziger / Wirth: Repetitorium der Höheren Mathematik,
Binomi-Verlag 2010 (6. Auflage), Preis: ca. 20 Euro, ISBN-10: 3923923341.

.

Dieses Buch hat sich seit vielen Jahren bewährt und es ist sehr preiswert. Wenn Sie sich an den Gebrauch gewöhnt haben und es regelmäßig verwenden, um relevante mathematische Inhalte nachzuschlagen (Es ist ein Nachschlagewerk, kein Buch zum Durchlesen!), wird es Ihnen das Verstehen der Physik in den ersten Studiensemestern sehr erleichtern.

Zusätzlich gibt es zwei Skripte, welche Sie als ergänzende Lektüre verwenden können.
Sie finden diese unter
http://users.physik.fu-berlin.de/~vonoppen/teaching/br_ws2005/skript.pdf sowie
http://www.physik.fu-berlin.de/en/einrichtungen/ag/ag-eisert/teaching/BrueckenkursSkript10.pdf?1359121517 .
(Das erste Skript ist etwas kompakter, das zweite behandelt dafür auch einige Themen, die nicht zum schulischen Grundwissen gehören.)

Der zeitliche Ablauf des Brückenkurses gliedert sich wie folgt:

Zeit	**Inhalt**
10:15 bis 13 Uhr	Vorlesung, z.T. mit Begleitprogramm Ort: Großer Hörsaal der Arnimallee 14 (Physikgebäude)
13 bis 14 Uhr	Mittagspause
14 bis ca. 17 Uhr	Übungen in kleinen Gruppen

Für die einzelnen Wochentage sind folgende Inhalte geplant:

Tag / Aufgabenblock	**Mathematische Inhalte**
Tag 1: Aufgaben 1.1 bis 1.4	Grundwissen: Zahlenmengen, Brüche, Teilbarkeit, Äquivalenz-umformungen, Pascalsches Dreieck, Summenzeichen
Tag 2: Aufgaben 2.1 bis 2.3	Elementare Funktionen 1: ganzrationale Funktionen, Betragsfunktion, Trigonometrische Funktionen
Tag 3: Aufgaben 2.4 bis 2.6	Elementare Funktionen 2: Umkehrfunktionen, Exponential-funktion & Logarithmus, Potenzgesetze, gebrochenrationale Funktionen, Partialbruchzerlegung
Tag 4: Aufgaben 3.1 und 3.2	Differentialrechnung: Sekante und Tangente, Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel, Taylorpolynome
Tag 5	Feiertag
Tag 6: Aufgaben 3.3 bis 3.5	Integralrechnung 1: Unbestimmtes und bestimmtes Integral, Produkt- und Kettenregel der Integration (= Partielle Integration, Substitution)
Tag 7: Aufgaben 3.6 und 4.1	Integralrechnung 2: Integration durch Partialbruchzerlegung, Lineare Algebra: Lineare Gleichungssysteme
Tag 8: Aufgaben 4.2 bis 4.4	Vektorrechnung: Vektoren, Skalar- & Kreuzprodukt, Geraden und Ebenen im Raum
Tag 9: Aufgaben 5	Komplexe Zahlen: Grundrechenarten, Polarform, Eulerform
Tag 10	nach Bedarf

Die Zahl der angebotenen Aufgaben ist so groß, dass Sie in der gegebenen Zeit wahrscheinlich nicht alle bearbeiten werden. Wählen Sie, in Absprache mit Ihrem/r Übungsgruppenleiter/in, die Aufgaben aus, die am besten für Ihr Lernniveau geeignet sind! Wer sich „fit“ fühlt, sollte unbedingt die mit einem Stern *) versehenen, schwereren Aufgaben bearbeiten!

Der Fachbereich Physik wünscht Ihnen einen erfolgreichen Einstieg ins Studium!

Jörg Fandrich

Jörg Fandrich, Tel.: 838 56772, joerg.fandrich@fu-berlin.de

1. Grundwissen

Teilbarkeitsregeln, Brüche, Termumformungen, Äquivalenzumformungen:
Schulwissen, im REP nicht ausführlich erklärt– bei Bedarf Schulbücher konsultieren!

1.1 Bruchrechnung

Aufgabe Grundwissen 1)

Sei $M = \{2; 4; 8; 3; 9; 5\}$!
Welche Elemente von M sind Teiler der Zahl?

a) 128
b) 210
c) 84
d) 135
e) 231

Aufgabe Grundwissen 2) Zerlege in Primfaktoren!

a) 128
b) 210
c) 84
d) 135
e) 231

Aufgabe Grundwissen 3) Kürze!

a) $\frac{128}{84}$
b) $\frac{210}{135}$
c) $\frac{84}{210}$
d) $\frac{231}{210}$

Aufgabe Grundwissen 4) Berechne!

a) $\frac{7}{12} - \frac{7}{16}$
b) $\frac{5}{6} - \frac{4}{15}$
c) $\frac{11}{18} + \frac{7}{24}$
d) $\frac{25}{27} - \frac{11}{18}$
e) $\frac{21}{5} + \frac{9}{20}$
f) $\frac{25}{28} - \frac{11}{21}$

Aufgabe Grundwissen 5) Berechne!

a) $8\frac{7}{9}+3\frac{2}{27}$

b) $14\frac{4}{5}+4\frac{8}{15}$

c) $\frac{11}{18}+\frac{7}{24}$

d) $17\frac{1}{12}-8\frac{5}{6}$

Aufgabe Grundwissen 6) Berechne!

a) $\frac{17}{18}:\frac{11}{18}$

b) $\frac{4}{9}:\frac{5}{6}$

c) $\frac{5}{14}:\frac{9}{20}$

d) $\frac{3}{4}:1\frac{2}{3}$

e) $11\frac{5}{9}:9\frac{1}{9}$

f) $4\frac{1}{7}:1\frac{4}{7}$

g) $6:\frac{5}{7}$

h) $4\frac{3}{4}:5$

1.2 Äquivalenzumformungen

Aufgabe Äquivalenzumformungen 1)

Berechne die Unbekannte!

a) $(x-3)^2 = x^2 - 3\cdot(x+1)$
b) $(x+2)^2 - (x-4)^2 = 11x - 8$
c) $(z-4)^2 - (z+8)^2 + 23z + 45 = 0$
d) $(a-7)^2 + 9 = (a+3)^2 + 49$

1.3 Darstellung von Mengen im IR²

Aufgabe Menge 1)

Stelle die folgenden Teilmengen des IR² graphisch dar!

a) $A = \left\{ (x,y) \in \mathrm{IR}^2 \ \mid \ x\cdot y = 0 \right\}$
b) $B = \left\{ (x,y) \in \mathrm{IR}^2 \ \mid \ x = y^2 \right\}$
c) $C = \left\{ (x,y) \in \mathrm{IR}^2 \ \mid \ \frac{1}{4} \le x \le 4 \ \wedge \ 0 \le y \le \frac{1}{x} \right\}$
d) $D = \left\{ (x,y) \in \mathrm{IR}^2 \ \mid \ (x-x)^2 + (y-2)^2 \le 2 \right\}$
e) $E = \left\{ (x,y) \in \mathrm{IR}^2 \ \mid \ x^2 + y^2 = 4 \right\}$
f) $F = \left\{ (x,y) \in \mathrm{IR}^2 \ \mid \ x^2 + y^2 > 9 \right\}$

1.4 Summenzeichen

Aufgabe Summenzeichen 1)

Schreibe mit dem Summenzeichen!

a) $1 - 4 + 7 - 10 + 13 - 16 + 19 - 22 = \sum_{k=?}^{?} ?$
b) $\frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{6\cdot 8} + \frac{1}{7\cdot 9} + \frac{1}{8\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{11\cdot 13} = \sum_{k=?}^{?} ?$
c) $2^1 - 4^2 + 6^3 - \ldots + 14^7 - 16^8 = \sum_{k=?}^{?} ?$

Aufgabe Summenzeichen 2)

Vereinfache, soweit möglich!

a) $\sum_{n=2}^{100} \frac{n+1}{n-1} - \sum_{k=2}^{100} \frac{k+2}{k}$
b) $2\cdot\sum_{m=1}^{50} m + \sum_{r=1}^{50} (r^2+1)$
c) $\sum_{j=1}^{200} \frac{1}{j\cdot(j+2)} - \sum_{i=2}^{200} \frac{1}{(i^2-1)}$

2. Elementare Funktionen

Anm.: Anspruchsvollere Aufgaben sind mit einem Stern * versehen.

2.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Funktionen, Ganzrationale Funktionen: REP S. 24 bis 34 & S. 59 bis 65

Aufgaben: Polynome 1 = REP 3.7 und 3.4 (Das sind die Nummern der Aufgaben, NICHT der Kapitel!)

Aufgabe Polynome 1)

Bestimme alle reellen Nullstellen der Polynome und spalte die zugehörigen Linearfaktoren ab!

a) $f(x) = x^2 + x - 6$
b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
c) $f(x) = x^2 + x + 1$
d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$
e) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$
f) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Aufgabe Polynome 2)

Leite die Lösungsformel („p-q-Formel“) für quadratische Gleichungen der Gestalt $x^2 + px + q = 0$ her!

2.2 Betragsfunktion

Betrag: REP S. 47 bis 53

Aufgaben: Betrag 1 vergleiche REP 2.13 und 2.21; Betrag 2 = REP 2.14

Aufgabe Betrag 1)

Bestimme die Menge aller $x \in \mathrm{IR}$, so dass gilt…

a) $|x - 1| < 2$
b) $|x - 1| \geq 2$
c) $3 \cdot |x - 1| < 4$

Aufgabe Betrag 2*)

Bestimme die Menge aller $x \in \mathrm{IR}$, so dass gilt $|x + 2| \leq |x - 1|$!

2.3 Trigonometrische Funktionen

Sinus, Cosinus, Tangens: REP F1, F2, F3, F4 & S. 75 bis 81
Trig. Fkt. 2 = siehe Vorlesung, 2b = REP 3.29, Trig. Fkt. 2c = REP 3.30

Aufgabe Bogenmaß 1)

a) Rechne um ins Bogenmaß! $\alpha = 90°$, $\alpha = 270°$, $\alpha = 281{,}4°$
b) Rechne um ins Gradmaß! $\varphi = \pi/6$, $\varphi = 1{,}2\pi$, $\varphi = 4{,}82$
c) Bestimme die Länge des Kreisbogens für r = 30 cm und $\varphi = \pi/4$.
d) Ein Kreisbogen habe die Länge b = 2 m und einen Radius von r = 0,8 m.
Wie groß sind die Winkel φ (im Bogenmaß) und α (im Gradmaß)?

Aufgabe Trig. Fkt. 1) (OHNE Taschenrechner! – vgl. Tabelle REP F1, Kurzfassung s.u.)

Für bestimmte, markante Winkel lassen sich Sinus- und Cosinuswerte exakt angeben.
a) Gib die Funktionswerte $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ für die folgenden Winkel exakt (ohne Rundung!) an: $\alpha = 90°$, $\alpha = 270°$
b) Gib die Funktionswerte $\sin\varphi$ und $\cos\alpha$ für die folgenden Winkel exakt (ohne Rundung!) an: $\varphi = \pi/6$, $\varphi = \frac{2}{3}\pi$
c) Für welchen Winkel φ ist $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ bzw. $-\frac{1}{2}$?

φ	0°	30°	45°	60°	90°
x	0	π/6	π/4	π/3	π/2
sin x	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
cos x	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Aufgabe Trig. Fkt. 2)

Eine Schwingung der Form A sin(ωt + φ) lässt sich in einen reinen Sinus- und einen reinen Cosinusanteil zerlegen:

$$A \sin(\omega t + \varphi) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)$$

A : Amplitude , ω : Kreisfrequenz / Winkelgeschwindigkeit , t : Zeit ,
φ : Anfangsphase , ωt + φ : Phase

a) Leite Gleichungen her, so dass man aus „A und φ“ die Größen „B und C“ berechnen kann und umgekehrt!

b) Zerlege $4\sin(2t + \frac{4}{3}\pi)$ in eine reine Cosinus- und eine reine Sinusschwingung!

c) Berechne Amplitude und Anfangsphase der Schwingung $3\cos(\pi \cdot t) - \sqrt{3}\sin(\pi \cdot t)$!

Aufgabe Trig. Fkt. 3)

Skizziere die Sinus-, Cosinus-, Tangensfunktion im Intervall -π bis +2π sowie ihre Umkehrfunktionen Arcussinus, Arcuscosinus und Arcustangens im Intervall -1 bis +3.
(Der prinzipielle Verlauf der Graphen muss erkennbar sein, Details sind unwichtig!)

Aufgabe Trig. Fkt. 4)

Skizziere den Funktionsgraphen der Funktion f mit $f(x) = 2\sin(x - \pi) + 1$, $ID_f = IR$!

Aufgabe Trig. Fkt. 5*)

Drücke sin(3x) durch sin(x) aus! (Tipp: Additionstheoreme!)

Aufgabe Trig. Fkt. 6*)

Beweise, dass $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$!

2.4 Exponentialfunktion und Logarithmus

Potenzgesetze, Exponential- und Logarithmusfunktion:
REP F2, F3, F4, S. 45 & S. 84 bis 87
Aufgaben: exp & ln 2 ähnlich wie REP 3.36, exp & ln 3 ähnlich wie REP 3.37

Aufgabe exp & ln 1)

a) Skizziere die Exponentialfunktionen $f(x) = e^x$ und $g(x) = 2^x$ im Intervall [-2, +2]!
b) Skizziere die Logarithmusfunktionen $f(x) = \ln x$ und $g(x) = \log_2 (x)$ im Intervall [-2, +8]!
c) Berechne 7^4 und $\log_7 (4)$!

Anmerkung:
Wie unter Physikern üblich, unterscheiden wir nicht zwischen Funktionswert f(x) und Funktion f.
Außerdem gehen wir stillschweigend davon aus, dass x aus dem Definitionsbereich der Funktion stammt.

Aufgabe exp & ln 2)

LT Juhura vom Raumschiff „Entensteiß“ hat vom Urlaub auf einer Raumstation einige „Fribbels“, niedliche kleine Fellkugeln, mitgebracht. Dummerweise vermehren sich Fribbels sehr schnell, die stündliche Wachstumsrate beträgt 10%. Schon nach kurzer Zeit sind 100 Fribbels an Bord und Käpt'n Körk wird die Sache langsam unheimlich (→ Startpunkt der Zeitmessung, N(0) = 100).

a) Wie viele Individuen N(t) sind nach t = 10 Stunden (bzw. 20 Stunden bzw. 100 Stunden) vorhanden? Schätze vorher!
b) Nach wie vielen Stunden t hat sich die Population verdoppelt (bzw. verzehnfacht)? Mache eine Probe!
c) Wenn jeder Fribbel 100g wiegt, welche Masse würde die Entensteiß nach 100 Stunden zusätzlich tragen müssen? Was würde in einem realen biologischen System bei einer so hohen Vermehrungsrate passieren?

Aufgabe exp & ln 3)

Die Halbwertszeit von Plutonium 239 ($^{239}_{94}\mathrm{Pu}$) beträgt ca. 24360 Jahre.
a) Wie groß ist die Zerfallskonstante λ ?
b) Wieviel ist von 1 kg der Substanz nach 100 Jahren (bzw. 1000 Jahren bzw. 10000 Jahren) noch vorhanden?
c) Wo ist die restliche Substanz „hin“?

Aufgabe exp & ln 4*)

Leite die Logarithmengesetze aus den Potenzgesetzen her!

a) $\log (x \cdot y) = \log x + \log y$
b) $\log (x^r) = r \cdot \log x$

2.5 Potenzgesetze

Potenzgesetze: REP S. 67 bis 74
PbZ 1 = REP 3.16, PbZ 2 = REP 3.20, PbZ 3 = REP 3.21, PbZ 4 = REP 3.24

Aufgabe Potenzgesetze 1)

Berechne!

a) $1^{\frac{1}{9}} = ...$

b) $32^{\frac{3}{5}} = ...$

c) $0{,}49^{-\frac{1}{2}} = ...$

d) $16^{0{,}75} = ...$

e) $(\frac{9}{49})^{\frac{3}{2}} = ...$

f) $(\frac{1}{121})^{-\frac{3}{2}} = ...$

Aufgabe Potenzgesetze 2)

Vereinfache!

a) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{4}} = ...$

b) $b^{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{b^4} = ...$

c) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[6]{125}} = ...$

2.6 Gebrochenrationale Funktionen

Partialbruchzerlegung: REP S. 67 bis 74
PbZ 1 = REP 3.16, PbZ 2 = REP 3.20, PbZ 3 = REP 3.21, PbZ 4 = REP 3.24

Aufgabe PbZ 1*)

Zerlege $\frac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)(x-3)(x+2)}$ in Partialbrüche!

Aufgabe PbZ 2*)

Zerlege $\frac{x+1}{x^2(x-1)}$ in Partialbrüche!

Aufgabe PbZ 3*)

Zerlege $\frac{x}{(x^2+x+1)(x+1)}$ in Partialbrüche!

Aufgabe PbZ 4*)

Zerlege $\frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ in Partialbrüche!

3. Differential- und Integralrechnung

Differentialrechnung: REP, S. 260 bis 269 und F4
Aufgaben: Diffr 1 vergleiche REP 12.7 & 12.8

Integralrechnung: REP, S. 285 bis 310 und F4

3.1 Differenzieren

Aufgabe Diffr 1)

Differenziere die folgenden Funktionen!

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4$

b) $f(x) = x \cdot \ln x$

c) $f(x) = 2\, x^2\, e^x \sin x$

d) $f(x) = \tan x$ (Tipp: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$)

e) $f(x) = (x^3 - 1)^{20}$

f) $f(x) = e^{\cos x}$

Aufgabe Diffr 1-1)

Differenziere die folgenden Funktionen!

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2$

b) $g(x) = (x^2 + 4x + 5) \cdot (5 - 4x)$

c) $h(x) = (-4x + x^2)^6$

d) $k(x) = \frac{5x}{3x+4}$ $(x \neq -\frac{4}{3})$

e) $l(x) = \sqrt{1-2x^2}$ $(\ |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\ )$

f) $m(x) = \frac{x}{\sqrt{2+x}}$ $(x \geq -2)$

g) $n(x) = 3^x$

h) $o(x) = x^x$

i) $p(x) = \ln(\ f(x)\ )$ $(\ f(x) > 0\ )$

Aufgabe Diffr 2)

Bilde die erste zeitliche Ableitung der Funktion $x(t) = A \sin \varphi$, wenn…

a) A = konst. , φ = konst.
b) A = A(t) , φ = konst.
c) A = konst. , $\varphi = \varphi(t)$
d) A = A(t) , $\varphi = \varphi(t)$

Aufgabe Diffr 3)

Ein Körper schwinge an einem Federpendel. Sein Ort s als Funktion der Zeit t werde durch folgende Gleichung beschrieben: $s(t) = s_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$.
Hierbei sind s_0 die (konstante) Amplitude, φ_0 die (konstante) Anfangsphase, ω die (konstante) Kreisfrequenz (= Winkelgeschwindigkeit) und t die Zeit (= die Variable).

Bilde die ersten beiden Ableitungen von s und deute sie physikalisch!
Welche Einheiten haben die auftretenden Größen?

Aufgabe Diffr 4*)

a) Leite die Quotientenregel aus der Produkt- und der Kettenregel her!
b) Leite die Ableitungsregel für a^x aus der Ableitungsregel für e^x her!
(Tipp: Drücke a^x durch e^x aus!)
c) Leite die Ableitungsregel für $\log_a x$ her! (Tipp: $\log_a x$ ist die Umkehrfunktion von a^x !)

3.2 Taylorpolynom und Taylorreihe

Taylorpolynom und –reihe: REP, S. 354 bis 359
Aufgaben: Sinus-Taylorreihe siehe REP F3, Taylorpolynom 2 = REP 14.40

Aufgabe Taylorpolynom 1)

Dies sind die Abenteuer des Raumschiffs Entensteiß, das mit seiner 400 Mann[1] starken Besatzung 2 Jahre unterwegs ist, um neues Leben und neue Zivilisationen zu entdecken.

Wir schreiben das Jahr 2200. Die Entensteiß steht unter starkem Beschuss durch einen Bird-of-Prey der Klingolaner.

(WUMMS! Die ganze Brücke wackelt, die Personen fliegen hin und her. Irgendjemand flucht über die fehlenden Sicherheitsgurte.)

Käpt'n Körk: „Mr. Spotz, Schadensbericht!"
Mr. Spotz: „Schwere Schäden auf allen Decks. Auch der Hauptcomputer ist getroffen."
LT Juhura (panisch): „WIR WERDEN ALLE STERBEN!"
Körk (ruhig): „Sieht so aus. Doch halt! Erinnern Sie sich noch an den Kurs ‚Klingolaner bekämpfen für Anfänger'? War es nicht so, dass die Scanner der Klingolaner für reine Sinus-Kurven unempfänglich sind? Wenn wir eine exakte Sinus-Kurve fliegen, werden wir für die Klingolaner praktisch unsichtbar. Spotz, setzen Sie als Kurs eine Sinus-Kurve!"
Spotz: „Schlechte Nachrichten, Sir: Beim letzten Treffer sind die Trigonometrischen Chips des Hauptcomputers durchgebrannt."
Juhura: „WIR WERDEN ALLE STERBEN!"
Spotz: „Vielleicht nicht. Ich sehe gerade, dass die Ganzrationalen Chips noch arbeiten. Wir könnten die Sinus-Kurve durch ihr Taylorpolynom ersetzen."
Körk: „Ist das denn ausreichend genau?"
Spotz: „Wenn wir ein Polynom hinreichend hoher Ordnung nehmen, müsste es gehen. Ein Taylor-Polynom unendlicher Ordnung, auch Taylor-Reihe genannt, wäre von der Sinus-Funktion nicht zu unterscheiden."
Körk: „Plotten Sie, Spotz! Plotten Sie, als ging's um ihr Leben!"

(Spotz plottet den Kurs, die Entensteiß wird gerettet und Juhura beruhigt sich wieder. Welchen Kurs hat Spotz geplottet? Also: Wie lautet das Taylorpolynom fünften Grades? Wie lautet die Taylorreihe?)

Aufgabe Taylorpolynom 2*)

Berechne das Taylorpolynom 3. Grades bei $x_0 = 0$ für $g(x) = e^x \cdot \sin x$!

[1] Zusätzlich sind noch 400 Frauen dabei, die Gesamtbesatzung der Entensteiß beträgt also 800 Personen.

3.3 Integrale zusammenfassen

Aufgabe Int 1)

Berechne unter Verwendung der Rechenregeln für bestimmte Integrale den folgenden Term!

$$\int_{-1}^{3}(\frac{2}{7}x^3+x^2+\frac{3}{x})dx+\int_{3}^{5}(\frac{2}{7}x^3+x^2+\frac{3}{x})dx+\int_{-1}^{2}(-\frac{2}{7}x^3+2x^2-\frac{3}{x})dx+\int_{2}^{5}(-\frac{2}{7}x^3+2x^2-\frac{3}{x})dx+\int_{5}^{5}(999x^{27})dx$$

(Anm.: Bei richtiger Anwendung der Regeln vereinfachen sich die Integrale enorm.)

3.4 Partielle Integration

Aufgaben: part Int 1b = REP 13.41, part Int 1c = REP 13.14, part Int 2b = REP 13.42

Aufgabe part Int 1)

Bestimme die folgenden Integrale!

a) $\int 2x^2 \cdot \ln x \, dx$

b) $\int_0^1 x \cdot e^x dx$

c) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x \, dx$ (Tipp: $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ und $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$)

d) $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$ (Tipp: Das Integral „reproduziert“ sich! $a = b - a \Leftrightarrow 2a = b \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}b$)

Aufgabe part Int 2*)

Bestimme die folgenden Integrale!

a) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

b) $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x \, dx$

Anm.:
Bei allen Integralen setzen wir stillschweigend voraus, dass x aus dem Definitionsbereich der auftretenden Funktionen stammt.

3.5 Integration durch Substitution

Aufgaben: Subst. 1a = REP 13.5, Subst. 1b = REP 13.6

Aufgabe Subst 1)

Bestimme die folgenden Integrale!

a) $\int (2-3x)^4 dx$

b) $\int 3x^2 \cdot e^{x^3} dx$

c) $\int x \cdot e^{x^2} dx$

d) $\int_1^{10} x \cdot e^{x^2} dx$

e) $\int \tan x \; dx$ (Tipp: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$)

f) $\int (2-\sin^2 x) \cdot \cos x \; dx$

g) $\int_0^{\pi} (2-\sin^2 x) \cdot \cos x \; dx$

Aufgabe Subst 2*)

Bestimme das Integral $\int \arcsin x \; dx$ und mache eine Probe!

(Tipp: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) !

3.6 Integration mittels Partialbruchzerlegung*

Aufgaben: Int-PbZ 1 = REP 13.19

Aufgabe Int-PbZ 1*)

Berechne das unbestimmte Integral $\int \frac{x^3 - x^2 - 7x + 11}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} dx$!

Aufgabe Int-PbZ 2*)

Berechne das unbestimmte Integral $\int \frac{2x^3 - 2x^2 - 4x + 13}{x^2 + x - 2} dx$!

4. Lineare Algebra & Vektorrechnung

4.1 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme: REP, S. 244 bis 259

Aufg. LGS 1)

Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme!

a) $\begin{array}{rl} \text{I)} & 2x+3y-z=1 \\ \text{II)} & x+3y+z=2 \\ \text{III)} & -2x-2y+4z=4 \end{array}$

b) $\begin{array}{rl} \text{I)} & x+y-2z=1 \\ \text{II)} & x-2y+z=1 \\ \text{III)} & -2x+y+z=1 \end{array}$

c) $\begin{array}{rl} \text{I)} & x-z=5 \\ \text{II)} & x+y=3 \\ \text{III)} & 2x+y-z=8 \end{array}$

Aufg. LGS 2*)

Löse das LGS zuerst allgemein!

Bestimme dann mindestens drei spezielle Lösungen und mache mit diesen eine Probe!

$$\begin{array}{rl} \text{I)} & x_1+x_2-5x_3-3x_4=0 \\ \text{II)} & -x_1+2x_3+4x_4=0 \\ \text{III)} & -2x_1+x_2+x_3+9x_4=0 \\ \text{IV)} & x_1-x_2+x_3-5x_4=0 \end{array}$$

<u>Anm.:</u> Die Lösungsmenge enthält mehrere Parameter.

Aufg. LGS 3)

Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme!

a) $\begin{array}{rl} \text{I)} & 2x+2y-2z=-2 \\ \text{II)} & -3x+y=6 \\ \text{III)} & x+4y+2z=-8 \end{array}$

b) $\begin{array}{rl} \text{I)} & x-3y-5z=26 \\ \text{II)} & 2x-2y+z=12 \\ \text{III)} & -3x+5y-6z=2 \end{array}$

c) $\begin{array}{rl} \text{I)} & 3x+y-2z=3 \\ \text{II)} & 24x+10y-13z=25 \\ \text{III)} & -6x-4y+z=-7 \end{array}$

4.2 Skalarprodukt

Skalarprodukt: REP, S. 127 bis 132

Aufgabe SP 1)

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$!

Aufgabe SP 2)

Bestimme durch „scharfes Hinsehen" je zwei linear unabhängige Vektoren, die senkrecht sind zu…

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Anm.: Zwei Vektoren heißen „linear unabhängig", wenn der eine Vektor kein Vielfaches des anderen ist.

Aufgabe SP 3)

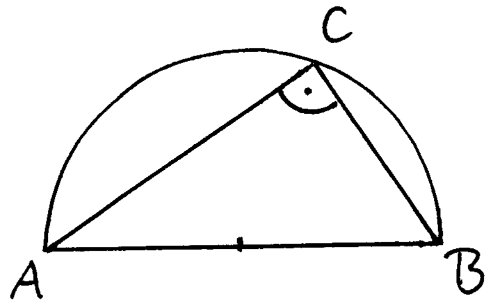
Eine Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \mathrm{N}$ wirke auf einen Körper der Masse m = 100 kg,

während dieser sich geradlinig längs der Wegstrecke $\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{m}$ bewegt.

a) Berechne die verrichtete Arbeit! Deute das Ergebnis physikalisch!
b) Angenommen, die Kraft wäre doppelt so groß (also gleiche Richtung, doppelter Betrag). Wie ändert sich in diesem Fall die Arbeit?
c) Angenommen, die Masse des Körpers wäre doppelt so groß. Wie ändert sich die Arbeit?
d) Berechne die vektorielle Komponente der Kraft längs des Wegs und ihren Betrag!

Aufgabe SP 4*)
Beweise den Satz des Thales!

Satz des Thales:
Liegt der Punkt C eines Dreiecks ABC auf einem Halbkreis über der Strecke AB, dann hat das Dreieck bei C immer einen rechten Winkel.



4.3 Kreuzprodukt (= Vektorprodukt)

Kreuzprodukt (Vektorprodukt): REP, S. 133 bis 135

Aufgabe KP 1)

Berechne, wenn möglich, a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\6\\-4\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}2\\5\\-8\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-10\\1\\0\\7\end{pmatrix}$!

Aufgabe KP 2)

Bestimme einen Vektor, der sowohl zu $\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ als auch zu $\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$ senkrecht ist!

Verwende zur Berechnung eines solchen Vektors…
a) … das Kreuzprodukt!
b) … nur das Skalarprodukt und NICHT das Kreuzprodukt!

Aufgabe KP 3)

Beweise, dass $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$ senkrecht ist zu $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$!

Aufgabe KP 4)

Eine im Punkt R mit dem Ortsvektor $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\mathrm{m}$ angreifende Kraft $\vec{F}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\mathrm{N}$ wirke auf einen Körper.

a) Berechne das auf den Körper wirkende Drehmoment (bezogen auf den Ursprung)!
b) Berechne den Betrag des Drehmoments!

<u>Anm.:</u> Drehmoment bezogen auf den Koordinatenursprung: $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

Aufgabe KP 5)

Hobby-Physiker Dumfried Deddelhöfer behauptet, bei einer Kreisbewegung wäre die Beziehung zwischen Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$, Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Ort $\vec{r}$ $\vec{\omega}=\vec{r}\times\vec{v}$. Er argumentiert mit der Rechten-Hand-Regel. Hat er Recht? Falls ja, unterstütze seine Aussage durch weitere Argumente! Falls nein, widerlege sie!

Aufgabe KP 6*)
Eine übermütige Ameise hat sich auf den äußeren Rand einer Schallplatte gesetzt und fährt Karussell. Berechne ihre Bahn- und Winkelgeschwindigkeit! Schätze vorher!
a) Fall 1: Langspielplatte (Rotationsfrequenz $\nu = 33{,}33\ \text{min}^{-1}$, Durchmesser $d = 30$ cm)
b) Fall 2: Single (Rotationsfrequenz $\nu = 45\ \text{min}^{-1}$, Durchmesser $d = 17{,}5$ cm)
c) Berechne in beiden Fällen den Betrag der auf die Ameise wirkenden Zentral-beschleunigung! Vergleiche ihn mit der Erdbeschleunigung! Schätze vorher!

Anm.: (1) Zentralkraft (= Zentripetal- bzw. Zentrifugalkraft, je nach Vorzeichen): $F_Z = \pm \frac{mv^2}{r}$
(2) Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit (= „Kreisfrequenz“) und Frequenz: $\omega = 2\pi\nu$
(3) In der Schule werden Frequenzen in der Regel mit dem Buchstaben „f“ bezeichnet. Physiker/innen verwenden hierfür meistens den Buchstaben „ν“ (sprich: „Nü“).

4.4. Geraden und Ebenen im Raum

Geraden und Ebenen im Raum: REP, S. 137 bis 159
Aufgaben: G-E1 = REP 5.29 & 5.30, G-E2 = REP 5.39, G-E3 = REP 5.42, G-E4 = REP 5.47

Aufgabe G-E 1)

Berechne Schnittpunkt und Schnittwinkel der beiden Geraden G_1 und G_2 !

$$G_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r \in IR$$

$$G_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad s \in IR$$

Aufgabe G-E 2)

Bestimme eine Parameterdarstellung der Ebene E durch die Punkte

P_1 (2 | 1 | -3) , P_2 (-1 | 3 | -4) und P_3 (1 | 2 | 3) !

Aufgabe G-E 3)

a) Liegt der Punkt P = (5 | -3 | 4) auf der Ebene E: 3x + 6y + z = 3 ?
b) Nenne drei Punkte, die auf E liegen!

Aufgabe G-E 4)

Es sei $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ mit $r,s\in IR$.

Bestimme die Hessesche Normalform der Ebene sowie den Abstand von E zum Ursprung!

Aufgabe G-E 5)

Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte A (1 | -2 | 3) und B (3 | 2 | -1) geht?

Aufgabe G-E 6)

Prüfe, ob die Punkte A (1 | -1 | 0) , B (-2 | -1 | 3) und C (-3 | 2 | 1) auf einer Geraden liegen!

Aufgabe G-E 7)

a) Bestimme eine Parameterdarstellung sowie die Hesse-Form der Ebene E, die durch die Punkte A (2 | 1 | 0) , B (3 | -1 | 2) und C (-1 | 0 | 1) geht!
b) Bestimme eine Parameterform der Geraden, die durch den Punkt P (2 | 3 | -2) geht und senkrecht zu E steht!

Aufgabe G-E 8)

Untersuche, ob sich

$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ mit $r\in IR$ und

$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ mit $s,t\in IR$

schneiden und berechne ggf. Schnittpunkt und Schnittwinkel!

5. Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen: REP, S. 93 bis 105

Aufgabe C 1)

Es seien u = 2 + 3i ; v = 5 – i und w = 1 + i !

Berechne $\bar{v}$, $u+v$, $v+w$, $u-v$, $v\cdot w$, $\frac{u}{w}$, w^2 und u^2+2vw !

Aufgabe C 1-1)

Bestimme Real- und Imaginärteil sowie Betrag!

a) $\frac{2+3i}{1+2i}$

b) $2(1-i)+3(2+i)$

c) $\frac{1}{1-\sqrt{3}\cdot i}$

d) $\frac{(-2+5i)\cdot(1+3i)}{2+3i}$

Aufgabe C 2)

Die komplexen Zahlen u, v und w seien die gleichen wie in Aufgabe C 1 !

a) Berechne für w , $\bar{v}$ und v jeweils den Betrag r
und das Argument (= den Polarwinkel φ)!

b) Berechne für v + w , v · w und w^2 jeweils den Betrag r
und das Argument (= den Polarwinkel φ)! (Verwende die Ergebnisse aus Aufgabe C 1 !)
Vergleiche diese mit den Ergebnissen aus Teil a)! Was fällt auf?

Aufgabe C 3*)

Bestimme aus der folgenden linearen Gleichung die Unbekannte z durch äquivalentes Umformen!

$$(1+2i)\cdot z+(1-i)^2=i-(2+i)\cdot z$$

<u>Tipp:</u>
Im Prinzip erfolgt die Rechnung genauso wie bei reellen linearen Gleichungen:
1. Alle Terme, die die Unbekannte enthalten, auf einer Seite der Gleichung sammeln!
2. Alle anderen Terme auf die andere Seite bringen!
3. Die Unbekannte ausklammern und beide Seiten der Gleichung durch den Faktor, der vor der Unbekannten steht, dividieren!

Aufgabe C 4)

Skizziere die Menge M in der Gaußschen Zahlenebene!
$M = \left\{ z \in C \,|\, 1 < \left| \bar{z} - i \right| \leq 2 \right\}$

Aufgabe C 5) Berechne i^0 , i^1 , i^2 , i^3 , i^4 , i^5 , i^6 , i^7 , …! Was fällt auf?

Aufgabe C 6)

Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in Eulerscher Darstellung!
Gibt die exakten Werte der Winkel an (→ Bruchteile von π)!

$$z_1 = 3 \cdot \sqrt{3} + 3i$$
$$z_2 = -2 - 2i$$
$$z_3 = 5$$
$$z_4 = -3$$
$$z_5 = -2i$$

Aufgabe C 7)

Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in kartesischer Darstellung!
Gibt die Lösung, wenn möglich, exakt an (→ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ usw.; s. unten)!

$$z_1 = 2 \cdot (\cos 225° + i \sin 225°)$$
$$z_2 = 4 \cdot e^{\frac{11\pi}{6} \cdot i}$$
$$z_3 = 2 \cdot e^{-\frac{3\pi}{2} \cdot i}$$

Aufgabe C 8)

Es sei $z = 2 \cdot \sqrt{3} + 2i$. Berechne z^4 und z^6 !

Verwendetes Lehrbuch („REP"):
Merziger / Wirth:
Repetitorium der Höheren Mathematik,
Binomi-Verlag 2010,
ISBN-10: 3923923341,
Preis: ca. 20 Euro
(auch ältere Auflagen verwendbar)

Zum Nachdenken:
„Ich hatte in meinem ganzen Leben immer recht. Nur ein einziges Mal dachte ich, dass das nicht so wäre. Aber da hatte ich mich geirrt."

6. Anhang

Wichtige Internetadressen:

- Seite des Fachbereichs Physik der Freien Universität Berlin:
  www.physik.fu-berlin.de/

  (bzw. in Englisch: www.physik.fu-berlin.de/en/index.html),

  insbesondere: www.physik.fu-berlin.de/studium/index.html

- Allgemeine Studienberatung:
  www.fu-berlin.de/studienberatung/

- Studienordnungen (alle Studiengänge):
  www.fu-berlin.de/studium/pruefung/stud-pruef-ordnungen.html

Studienfachberatung

Studienziel Mono-Bachelor Physik :
Prof. Dr. Martin Weinelt
weinelt@physik.fu-berlin.de
Tel.: 838 56060 - Raum 0.4.15

Studentische Studienfachberatung:
Markus Gleich
studienberatung@physik.fu-berlin.de
Raum: 1.1.14a
Sprechzeiten nach Vereinbarung

Studienziel Kombi-Bachelor Physik (= Lehramt):
Prof. Dr. Volkhard Nordmeier
volkhard.nordmeier@physik.fu-berlin.de
Tel.: 838 53031/53033 - Raum 1.3.33

Studentische Studienfachberatung:
Nicole Schrader
tutorphy@zedat.fu-berlin.de
Sprechzeiten nach Vereinbarung

Berufspraktikum:
Prof. Dr. Stephanie Reich
stephanie.reich@physik.fu-berlin.de
Tel.: 838 56162 - Raum 1.2.42

Prüfungsbüro Physik
Andreas Heß
andreas.hess@fu-berlin.de
Tel.: 838 56017 - Raum 1.1.14a
Sprechzeiten: Di, Mi, Do 12:00 - 14:00 Uhr