

Zweisemestriges Grundpraktikum für die Studiengänge Physik, Geophysik, Meteorologie und für Lehramtskandidaten mit Physik als erstem oder zweitem Fach

Zweisemestriges Grundpraktikum (Anfängerpraktikum) für die Studiengänge Physik, Geophysik, Meteorologie und für Lehramtskandidaten mit Physik als erstem oder zweitem Fach.

#### Ziele des Praktikums

Einführung in Grundtechniken quantitativ-experimenteller und wissenschaftlicher Arbeitsmethoden der Physik (Messmethodik, Messtechnik, Messdokumentation, mathematisch-statistische und praktische Auswertverfahren / Fehlerrechnung, kritische Diskussion und wissenschaftliche Schlussfolgerung, schriftliche Darstellung und Präsentation / Bericht). Vertiefende und ergänzende Auseinandersetzung mit ausgewählten Themen der Physik.

#### Kernregeln

- Die vollständige Praktikumsordnung finden Sie unter [www.physik.fu-berlin.de/~gp/gp/](http://www.physik.fu-berlin.de/~gp/gp/)
- Vor Praktikumsbeginn ist die Bearbeitung der Online-Fehlerrechnung obligatorisch.
- Vorbereitung an Hand von Vorlesung und Lehrbüchern nach Angaben im Skript.
- Die Versuche beginnen c.t. und Verspätungen um mehr als 15 Minuten führen dazu, dass die Teilnahme am Versuch nicht mehr möglich ist.
- Eine zweiseitige theoretische Einführung (als Teil des Protokolls) ist zum Versuchsbeginn vorzulegen.
- Die Betreuerin / der Betreuer weist in den Versuch ein und vergewissert sich dabei, ob die Vorbereitung ausreicht oder ein Wiederholungstermin anzusetzen ist.
- Zügige Durchführung des Versuchs und Dokumentation der Ergebnisse erfolgt unter Anleitung der Betreuerin / des Betreuers, wobei die Möglichkeit zur weiterführenden Diskussion des physikalischen Hintergrundes besteht.
- Die tabellarische und graphische Auswertung des Versuchs erfolgt nach ca. 3 Stunden in Wechsel-

wirkung mit der Betreuerin / dem Betreuer; danach weitere Arbeit am Protokoll.

- Die 4 Zeitstunden sind voll zur Anfertigung des Protokolls auszunutzen und können nur dann verkürzt werden, wenn die Betreuerin / der Betreuer das Testat erteilt hat.
- Die volle Versuchszahl (in der Regel 12) ist innerhalb eines Praktikumsurses zu erbringen, wobei maximal 2 Versuche im Rahmen der Wiederholungstermine am Ende des Kurses nachgeholt werden können.
- Spätestens am letzten Tag des Praktikumsurses müssen für alle Versuche Testate vorliegen, da ansonsten das Praktikum insgesamt nicht bewertet werden kann und verfällt.

#### Einordnung in den Studiengang

Zwei Praktikumssteile (GP I und II) in Anschluss an die jeweiligen Vorlesungen (Physik I und II). Einschränkungen beim Bezug auf die Vorlesungsinhalte durch den zeitlichen Umfang und die Lage des Praktikums, bei der insbesondere bei der Teilnahme an Ferienkursen Themenbereiche im Praktikum im Vorgriff ohne Vorbereitung durch die Vorlesung behandelt werden müssen (Optik, Atomphysik, Quantenphänomene).

#### Durchführung

*Semesterkurse* (wöchentlich, 4stdg) und *Ferienkurse* (fünfwöchig, 2-3 Termine wöchentlich, je 4stdg).

*Kleingruppenpraktikum.* Paarweise Gemeinschaftsarbeit (Durchführung und Ausarbeitung der Versuche). Anleitung von 8-er-Gruppen (4 Paare) an gleichen oder verwandten Versuchen durch wissenschaftliche Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter. Wichtig ist eine gute Vorbereitung vor dem Praktikumstermin an Hand der Anleitung. Zum Praktikumstermin wird eine etwa zweiseitige Einführung in die Themenstellung und in die physikalischen Grundlagen vorgelegt, die Teil der Ausarbeitung ist.

Praktikumstermin mit *Versuchsdurchführung*, Auswertung und in der Regel Beginn des Protokolls.

Ausarbeitung von *Berichten* mit Einführung in die Themenstellung und physikalischen Grundlagen (zur Vorbereitung erstellt), Darstellung der Auswertungen und einer Zusammenfassung und kritischen Diskussion der Ergebnisse.

*Unterrichtsmaterial:* Versuchsanleitungen (Skript) mit Aufgabenstellungen, zusammenfassenden Darstellungen der physikalischen Grundlagen und Hinweisen zur Versuchsdurchführung. Laborhefte zur urschriftlichen Aufnahme sämtlicher Aufzeichnungen, die von den Praktikumssteilnehmern selbst zu kaufen sind.

#### Bewertung

Übungsschein mit Bewertungsgraden nach ECTS (European Credit Transfer System). Punktesystem für die einzelnen Versuche. Keine Klausuren oder Abschlusscolloquien.

#### Versuche

Versuche mit unterschiedlichen Schwerpunkten: Von sehr einfachen, exemplarischen Versuchen in GP I zur Vermittlung methodischer Grundfertigkeiten über Versuche mit höherem messtechnischen Schwierigkeitsgrad und mit weitergehenden physikalischen Ansprüchen bis zu Versuchen mit schwierigen Themen, die erste phänomenologische Begegnungen herstellen sollen, und deren tieferes Verständnis erst bei wiederholter Beschäftigung in späteren Studienabschnitten erreicht werden kann.

#### Anmerkungen

Die *Anwendung* erworbener Kenntnisse ist ein empfindlicher Indikator für das Verständnis. Durch Auseinandersetzung mit Details und Anleitung zu kritischer Betrachtung sollen die physikalischen Prinzipien und Zusammenhänge zwischen den Phänomenen aufgezeigt werden.

Einführende Lehrbücher stellen das grundlegende, gesicherte Wissen anschaulich und im Zusammenhang dar, erwähnen aber nur am Rande die Wege dorthin, d.h. die Arbeitsmethoden der Physik. Physikalisches Wissen entsteht entweder durch quantitative Beobach-

Zweisemestriges Grundpraktikum für die Studiengänge Physik, Geophysik, Meteorologie und für Lehramtskandidaten mit Physik als erstem oder zweitem Fach

tion der Naturvorgänge, d.h. durch experimentelles Arbeiten oder durch die mathematische Formulierung und schließende Entwicklung physikalischer Situationen, d.h. durch theoretisches Arbeiten.

Praktika vermitteln die experimentellen Methoden der Physik. Das Ziel des Grundpraktikums ist die Einführung in elementare, praktisch-experimentelle und fachmethodische Arbeitstechniken und in kritisch-quantitatives Denken. Im Einzelnen umfasst dies den Aufbau und Betrieb von Messapparaturen und Messgeräten (Messmethodik und Messtechnik), die Protokollierung durchgeführter Experimente (Messdokumentation), die Anwendung geeigneter Auswertemethoden (Fehlerrechnung), die wissenschaftliche Bewertung und Schlussfolgerung (Diskussion) und nicht zuletzt die schriftliche Darstellung wissenschaftlicher Arbeit (Bericht).

Das Grundpraktikum stellt bewusst **fachmethodische Arbeitsinhalte** in den Vordergrund. Die im Praktikum gestellten physikalischen Fragen sind längst beantwortet, und die Versuche sind als exemplarische Fallbeispiele für Methoden und Techniken zu verstehen, die bei anspruchsvolleren Themen und in der aktuellen Forschung in gleicher Weise wiederkehren. Dennoch steht hinter der Arbeit immer die Physik, die nicht nach einfach und schwierig unterscheidet, und es ist immer der beteiligte Person, gleich ob "fertig" oder in der Ausbildung, die selbst die Fragen stellt und damit ihr Niveau bestimmt.

Trotz der vorgegebenen Versuche und Aufgabenstellungen bietet gerade das Praktikum die Möglichkeit einer eigenen Herangehensweise, und der Lernerfolg wird stark durch die Teilnehmerinnen und Teilnehmer selbst bestimmt. Elementare und wichtige Voraussetzungen dafür sind eine kritisch-quantitative Neugier und der Ehrgeiz, den Dingen auf den Grund zu gehen.

Als Teil einer wissenschaftlichen Ausbildung will das Praktikum nicht bei der Vermittlung "mechanistischer" Fähigkeiten stehenbleiben, sondern soll zu wissenschaftlichem Denken hinführen, d.h. der wissenschaftli-

chen Beantwortung von Fragestellungen bzw. der Ableitung von Erkenntnissen oder Gesetzmäßigkeiten durch kritische Diskussion (in Kleingruppen) und schließende Bewertung der Beobachtungen und quantitativen Ergebnisse.

### **Fehlerrechnung**

Bei experimenteller Arbeit zeigt sich als sehr grundlegendes Phänomen, dass die tatsächliche, quantitative Erfassung der Naturvorgänge nur näherungsweise möglich ist und alle Ergebnisse Näherungscharakter haben und als Schätzwerte zu betrachten sind. Als Konsequenz daraus ergeben sich mathematisch-statistische Behandlungen und Betrachtungen für empirische und experimentelle Daten, die in der Messtechnik und Physik als Fehlerrechnung bezeichnet werden.

Das Grundpraktikum hat als wichtige Aufgabe die Vermittlung elementarer Grundlagen und Methoden der Fehlerrechnung. In dieser Praktikumsanleitung gibt es einen Abschnitt FEHLERRECHNUNG, der in einem ersten Schritt selbstständig und mit Hilfe zugehöriger Übungsaufgaben vor Praktikumsbeginn durchgearbeitet werden muss. (Die Übungsaufgaben sind als Online-Fehlerrechnung zu bearbeiten. Ein Ausdruck ist eine Woche vor Praktikumsbeginn im Praktikum abzugeben. Details siehe <http://www.physik.fu-berlin.de/~gp/gp/gp1/>). Das Erlernen sicherer Kenntnisse und Fähigkeiten der Fehlerrechnung ist dann Ziel der weiteren, laufenden Praktikumsarbeit.

**Redaktionsschluss: 20.03.08**

**Bearbeitung: Schattat**

## Themen und Versuche

Die Themen des Praktikums schließen sich an die Inhalte der Vorlesung an. Es gibt sowohl inhaltlich und messtechnisch sehr einfache Versuche mit einem Lernschwerpunkt bei den methodischen Arbeitstechniken als auch physikalische und apparativ anspruchsvollere Versuche.

Ein Problem entsteht durch den Umfang (zwei Teile; GP I und II) und die zeitliche Lage des Praktikums, wobei das Praktikum zum Teil im Vorgriff ohne den vorausgehenden Besuch der Vorlesungen alle Themenbereiche des Einführungskurses Physik I-IV berührt. Insbesondere bei stark belegten Kursen und in den Ferienpraktika kommt es durch die "rotierende" Organisationsform dazu, dass das Praktikum mit zum Teil schwierigen Themen beginnt, die noch nicht in der Vorlesung behandelt wurden, und vorbereitet worden sind, und die dann eine eigenständige und intensive Vorbereitung erfordern.

### Vorbereitung

Eine wesentliche Grundlage für eine erfolgreiche Arbeit im Praktikum und den Lernerfolg ist eine gute (physikalische und mathematische) Vorbereitung anhand der Praktikumsanleitung und gegebenenfalls mit Hilfe weiterer Literatur (Lehrbücher). Die Arbeitsmittel dazu sind Skript, Lehrbücher, Papier und Bleistift und ausreichend Zeit. Das Praktikum hat spezifische Ausbildungsziele, wobei es physikalische Inhalte vertiefen und ergänzen soll. Es kann aber nicht die Aufgabe der elementaren Stoffvermittlung übernehmen, die auf eine gründliche Mitarbeit in Vorlesungen und Übungen aufbaut.

Zum Praktikumstermin wird etwa eine zweiseitige Einführung in die Grundlagen vorgelegt, die Teil der Auswertung ist.

### Bericht

Auch die Berichte dienen nicht allein dem Nachweis der durchgeführten Arbeit, sondern sind ebenfalls Übung für die schriftliche Darstellung wissenschaftlicher Arbeit als methodische Form. Inhalt und äußere Form der Berichte müssen sich an dem Anspruch orientieren, dass ein Fachleser effizient und knapp, aber dennoch vollständig in die Themen- und Fragestellung eingeführt wird, und den Gang der Arbeit und die Ergebnisse und Schlussfolgerungen gut verfolgen und nachvollziehen kann. Die

Anfertigung der Berichte muss diese Aspekte stets im Auge behalten und darf sich nicht auf die Erledigung einer Mess- oder Rechenaufgabe beschränken.

### Regeln des Praktikumsablaufs

#### Laborhefte

Es ist gute wissenschaftliche Praxis und Vorschrift im Praktikum, zur dokumentarischen und organisatorischen Sicherheit sämtliche schriftlichen Aufzeichnungen zur Versuchsdurchführung und die Ausarbeitungen in gebundene Protokollhefte einzutragen oder abzulegen (*Laborhefte*). Geeignete Hefte (DINA4-karrierte Schulhefte, keine Ringordner) bringen Sie bitte zum Praktikum mit. Es ist günstig, wenn Sie sich 2-3 Hefte kaufen. Aufzeichnungen auf losen oder gehefteten Blättern führen aber zu Unsicherheiten über den Ursprung oder zum Verlust von Daten oder Unterlagen.

Zusätzliche Blätter (z.B. Netzpapier) müssen in die Hefte eingebunden werden. Dies geschieht vorzugsweise durch Einkleben an einem schmalen Randstreifen an der Innenseite von Hefeseiten, so dass beide Seiten der Zusatzblätter nutzbar sind. Ein lösbares Einbinden, z.B. mit Büroklammern, ist nicht zulässig.

#### Netzpapier

Grafische Darstellungen müssen auf Netzpapier angefertigt werden (mm-Papier, log-Papier; im Praktikum erhältlich).

#### Schriftliche Vorbereitung

Voraussetzung zur Versuchsdurchführung ist eine gute (physikalische und mathematische) Vorbereitung anhand der Praktikumsanleitung und gegebenenfalls mit Hilfe weiterer Literatur (Lehrbücher). Die Arbeitsmittel dazu sind *Skript, Lehrbücher, Papier und Lineal*.

Als Ergebnis der Vorbereitung muss die Einführung in die Themen- und Aufgabenstellung (Gliederungsabschnitt *Physikalische Grundlagen* als Teil des Berichts) schriftlich ausgearbeitet und zu Versuchsbeginn vorgelegt werden. Zur inhaltlichen Vorbereitung ist dieser Teil der Ausarbeitung von jeder Teilnehmerin / jedem Teilnehmer anzufertigen. Da in der Regel jeweils das eine der beiden Laborhefte eines Arbeitspaares zur Korrektur beim Tutor ist, muss die betroffene Person die Einführung zunächst auf lose Blätter niederschreiben und später in das Laborheft einkleben (siehe oben).

Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer müssen auf Grund der Vorbereitung in der Lage sein in einem begleitenden Gespräch mit der Betreuerin / dem Betreuer ihre Vorbereitung nachzuweisen.

Nicht ausreichend vorbereitete Teilnehmerinnen oder Teilnehmer werden von der Versuchsdurchführung abgewiesen. Der Versuch wird als versäumt gewertet und muss wiederholt werden. Bei Zurückweisung wegen mangelnder Vorbereitung kann ein Kolloquium bei der Praktikumsdozentin / dem Praktikumsdozenten oder der Praktikumsleitung zur Feststellung ausreichender Kenntnisse oder Einarbeitung angesetzt werden. (Laut Praktikumsordnung dürfen nicht mehr als zwei Versuche versäumt werden).

#### Praktikumszeit

Praktikumsbeginn ist pünktlich um 9.15 bzw. 14.15 Uhr.

Die Unterrichtszeit beträgt 5 SWS = 3<sup>3/4</sup> Zeitstunden (9.15-13 Uhr bzw. 14.15-18 Uhr) und wird für eine effektive Praktikumsarbeit ausgeschöpft. Verbleibende Zeit nach der Versuchsdurchführung ist zu nutzen, um unter Anleitung der Tutoren wichtige Teile der Auswertung zu beginnen (z.B. Anfertigung von grafischen Darstellungen).

#### Gliederung und Form der Berichte

Der Bericht setzt sich zusammen aus der Dokumentation der Versuchsdurchführung (Messprotokoll) und der Darstellung (Grundlagen, Auswertung, Zusammenfassung und Diskussion) der ausgeführten Arbeit. Er wendet sich an Dritte als Leser. Die allgemeine äußere Form einschließlich der Schrift müssen diesem Anspruch mit einer verständlichen und übersichtlichen Darstellung gerecht werden, so dass die Inhalte, Ergebnisse und Schlussfolgerungen mit angemessenem Aufwand nachvollzogen werden können (und so auch den Betreuerinnen und Betreuern eine effiziente Korrektur bei angemessenem Zeitaufwand ermöglichen).

Elementarer Formbestandteil schriftlicher Ausarbeitungen ist eine Gliederung. Die Praktikumsberichte müssen gemäß dem Abschnitt BERICHT auch äußerlich erkennbar durch deutlich abgesetzte Überschriften gegliedert sein.

Das Messprotokoll wird urschriftlich in das Laborheft eingetragen. Inhalt und Form müssen es zulassen, dass der Versuch auch von einer nicht am Versuch beteilig-

ten Person verstanden und ausgewertet werden kann. Es wird vom Tutor auf Vollständigkeit und Richtigkeit geprüft und zur Sicherung des Datenursprungs mit einem Antestat versehen. Versuchsausarbeitungen ohne testiertes Messprotokoll werden nicht anerkannt. Berichte, die diesen Ansprüchen nicht genügen, werden zurückgewiesen.

#### Abgabetermin der Ausarbeitungen (Bericht)

Die Berichte sollen noch während des Praktikums begonnen werden und müssen jeweils am folgenden Praktikumstermin abgegeben werden. Eine Verzögerung der Ausarbeitung erspart weder Arbeit noch Zeit, und ein zeitlicher Abstand zur Versuchsdurchführung führt zum Abklingen der Kenntnisse zum Thema und zum Versäumnis der Ausarbeitung. Zur Unterstützung der Ausarbeitung können wichtige Teile der Auswertung bereits während der Praktikumstermine durchgeführt werden (siehe *Praktikumszeit*).

Das Versäumen der pünktlichen Berichtsabgabe führt zum Ausschluss vom anstehenden Versuch.

#### Fehltermine und versäumte Versuche

Bei Fehlen oder Ausschluss des Partners arbeitet die verbleibende Person allein und muss für den betreffenden Versuch die Ausarbeitung anfertigen.

Die fehlende Person muss den Versuch nachholen und dabei ebenfalls eine eigene Ausarbeitung anfertigen. (Die Vereinbarung von Nachholterminen geschieht durch die Praktikumsleitung).

#### Gemeinschaftsarbeit

Im Praktikum wird (in der Regel) partnerschaftlich zusammen gearbeitet, so dass jeder von der Mitarbeit des Partners abhängig ist. Schließen Sie sich mit Ihrem Partner zusammen und besprechen Sie den Abschluss der Versuche, damit auch bei der Aufteilung von Arbeit keine Schwierigkeiten hinsichtlich der ordnungsgemäßen Erledigung und der Erteilung von Abschlusstesten auftreten.

Eine Realteilung eines Arbeits-Paares erfolgt nur bei Abbruch eines Praktikumsnehmers oder in besonderen Fällen nach Festlegung durch die Praktikumsleitung.

#### Testate und Ausgabe der Übungsscheine

Die Ausgabe der Übungsscheine nach erfolgreichem Abschluss des Praktikums erfolgt nur gegen Vorlage der vollständigen Testatliste. Testate können nur durch die zuständigen Tutoren erteilt werden.

#### Punktesystem im Grundpraktikum

Die Leistungen bei den einzelnen Versuchen werden durch Punkte bewertet. Die Punkte dienen der Beurteilung der Gesamtleistung nach den Regeln des ECTS-Systems (*European Credit Transfer System*).

Nach Abschluss aller Versuche werden folgende Grade vergeben (**in % der Maximalpunktzahl**):

$90\% \leq A \leq 100\%$	A (Sehr gut = very good)
$75\% \leq B < 90\%$	B (Gut = good)
$60\% \leq C < 75\%$	C (Befriedigend = satisfactory)
$49\% \leq D < 60\%$	D (Ausreichend = sufficient)
$E < 49\%$	E (Nicht ausreichend = fail).

Es erfolgt eine Einzelbewertung der Versuche, wobei für jeden Versuch maximal 5 Punkte vergeben werden können. Die erfolgreiche Bearbeitung eines Versuchs setzt eine mindestens ausreichende Leistung (1 Punkt) voraus.

Für die Bewertung werden die Leistungen in folgenden Teilbereichen herangezogen (Wertungsbereiche):

- A: Physikalische Kenntnisse und Verständnis, Vorbereitung zum Versuch.
- B: Praktische und methodische Fähigkeiten (experimentelles Arbeiten und Versuchsauswertung).
- C: Wissenschaftliche Diskussion und Bericht (Bewertung des Experiments und der Ergebnisse, schriftliche Ausarbeitung)

Die erreichten Punkte werden von den Betreuern im Laborheft, auf der Gruppenkarte, der Testatliste und auf der Karteikarte notiert.

INHALT		GPI
Allgemeiner Teil		SEITE
Inhaltlicher Ablauf des Praktikums		1
Auszug aus der Praktikumsordnung		3
Punktesystem		4
Bericht		5
Musterprotokoll		6
Standardlehrbücher		13
<u>Versuchsanleitungen</u>		
LIN: Lineare Bewegungen		14
PEN: Schwerependel		16
ELM: Elektrische Messtechnik		18
DRE: Drehbewegung oder		22
HAR: Harmonische Schwingungen		24
GES: Gekoppelte Schwingungen		29
KUG: Kugelfallviskosimeter		33
SPW: Spezifische Wärmekapazität		35
ISE: Isentropenindex		37
SAL: Schallwellen		40
RAZ: Radiaktiver Zerfall		43
GAM: Gamma Spektroskopie		45
<u>Anhang</u>		
Anlage I	Fehlerrechnung	48
Anlage II	Grafische Darstellungen und grafische Auswertung	53
Anlage III	Maße und Einheiten (SI)	58
Anlage IV	Kernstrahlungsdetektoren	62
Anlage V	Strahlenschutzanweisung	65
Anlage VI	Statistik	67

## BERICHT

## GPI

Schriftliche Aufzeichnungen und Ausarbeitungen sind elementare Bestandteile wissenschaftlicher Arbeit. Sie dienen der Dokumentation und der Kommunikation. Erkenntnisse haben nur dann einen Wert, wenn sie nachvollziehbar, überprüfbar, und für Dritte verfügbar sind. Die Literatur ist der wichtigste Stützpfeiler wissenschaftlicher Arbeit.

Die Praktikumsausarbeitungen (*Berichte*) dienen der Übung wissenschaftlich, schriftlicher Darstellungen. Sie sollen einerseits vollständig andererseits knapp und effizient verfasst werden. Diese Abwägung gehört zu den methodischen Lehrzielen des Praktikums. Bezüglich Darstellung und Umfang orientieren sie sich am Musterprotokoll in der GP I Anleitung.

Die Praktikumsberichte bestehen aus *Messprotokoll* und *Ausarbeitung*.

- Das Messprotokoll ist die Dokumentation des experimentellen Ablaufs.

Es muss sämtliche Angaben (Darstellung des experimentellen Aufbaus, Daten, Beobachtungen) enthalten, aus denen auch nach Abbau der Apparatur der Versuch vollständig nachvollzogen und ausgewertet werden kann.

- Die Ausarbeitung dient der Präsentation und Kommunikation.

Sie enthält eine kurze Darstellung der physikalischen Grundlagen und der Fragestellung, die Auswertungen und die Zusammenfassung und kritischen Diskussion der Ergebnisse und die daraus abgeleiteten wissenschaftlichen Schlussfolgerungen.

Die Inhalte und die äußere Form schriftlicher Arbeiten unterliegen hohen Anforderungen an Sorgfalt und Zuverlässigkeit. Versuchsprotokolle und Ausarbeitungen müssen von fachlich qualifizierten Lesern mit vertretbarem Aufwand nachvollzogen und verstanden werden können. Praktikumsberichte, die diesen Anforderungen nicht genügen, werden als nicht ausreichend zurückgewiesen.

Wichtiges Strukturelement schriftlicher Ausarbeitungen sind Gliederungen. Nachfolgend ist eine Standardgliederung beschrieben, die den Praktikumsberichten verbindlich zugrunde liegen muss.

### Messprotokoll

Das Messprotokoll stellt eine sekundäre Quelle der durchgeführten experimentellen Arbeit dar. Es muss über lange Zeit vollständig und verfügbar bleiben. Handschriftliche Aufzeichnungen werden aus diesem Grund urschriftlich in gebundene Hefte (Laborhefte) <sup>1</sup>eingetragen (maschinenschriftliche Teile oder Ausdrucke werden auch hier eingeklebt), die auch im Praktikum zur Führung sämtlicher Aufzeichnungen vorgeschrieben sind. Ausdrucke von Schreibern o.ä. werden eingeklebt.

Gliederungsbestandteile des Messprotokolls sind:

#### Titel (Versuchsthema)

##### Namen; Datum

- Namen der Mitarbeiter und des Tutors; Datum des Versuchstags.

##### Physikalische Grundlagen

- Kurze und zusammenfassende, eigene Darstellung der physikalischen Grundlagen der Themen- und Fragestellung, der Meßmethode und der Messgleichungen (nicht zulässig sind wörtliche Abschriften aus der Literatur).
- Die Darstellung muss eine kurze, aber vollständige Übersicht über wesentliche Aspekte der untersuchten Größen und Gesetzmäßigkeiten geben. Nicht erforderlich sind lehrbuchartige Ausführungen.
- Thematisch verfehlt sind Beschreibungen der praktischen Versuchsdurchführung.

##### Experimenteller Aufbau und Geräte

- Skizze des Versuchsaufbaus; Auflistung der verwendeten Geräte mit den Gerätedaten.

### Messwerte

- Datum, Beginn, Ende
- Größenbezeichnungen mit Maßzahlen, Werte, Fehlergrenzen und Maßeinheiten in unmittelbarer Form. Kommentare zu den Fehlerangaben. Strukturelement: Tabellenform.
- Sonstige Beobachtungen.

### Auswertungen

- Zusammenfassende Darstellung der Auswertungen mit grafischen Darstellungen (auf Original-Netzpapier; an zugehöriger Stelle in den Text einkleben), ausgewerteten Funktionsparametern, Zwischenwerten, Ergebnissen und Fehlergrenzen. Kommentare zur Fehlerbetrachtung. (Strukturelement: Tabellenform).
- Die Auswertung muss die Herleitung der Ergebnisse einfach nachvollziehbar und überprüfbar machen. Sie darf keine Klippe zur Rechnungsdurchführung sein.

### Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Knappe, zusammenfassende Darstellung:

- Was und wie wurde gemessen? (Messgrößen, Messmethode).
- Was ist herausgekommen? (Übersichtliche Aufführung der Ergebnisse).
- Wie sind die Ergebnisse zu bewerten? (Kritischer, qualitativer und quantitativer Vergleich von Ergebnissen untereinander, mit theoretischen Erwartungen; mit Literaturwerten. Physikalische Bewertung und Schlussfolgerungen, Fehlerdiskussion)

<sup>1</sup> Es müssen min. zwei Laborhefte von ca. 50 Seiten, kariert (keine Ringordner), von den Studierenden gekauft werden, und sie sind am ersten Praktikumstag mitzubringen.

(1) MUSTERBERICHT	GPI
-------------------	-----

(2) FEDERPENDEL*Albert Ach, Paula Puh*(3) Physikalische Grundlagen(4) *Bei einer idealen Feder ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung (Hookesches Gesetz):*

(5) (A)  $F = -D x$

(6) *Der Proportionalitätsfaktor  $D$  heißt Federkonstante. In Aufgabe 1 wird dies Gesetz direkt überprüft.**Mit (A) folgt als Newtonsche Bewegungsgleichung, wenn  $m$  die gesamte bewegte Masse ist:*

(B)  $-D x = m \ddot{x}$

*Lösungsansatz ist:*

(C)  $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \Phi)$

*wobei  $x_0$  die Amplitude,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\Phi$  eine Phasenkonstante sind. Für die Kreisfrequenz erhält man durch Einsetzen von (C) in (B):*

(D)  $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$  und  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$

*Die Beziehung (D) für die Schwingungszeit wird in Aufgabe 2 überprüft.**Gleichung (B) geht davon aus, dass die gesamte Masse die gleiche Beschleunigung erfährt. Das gilt aber nicht für die Feder selbst. Am Aufhängepunkt sind die Amplitude und Beschleunigung Null, am freien Ende der Feder haben sie die Werte der angehängten Masse.*(1) Der nebenstehende Musterbericht zu einem (fiktiven) Versuch stellt ein *positives* Beispiel und einen Kommentar gegenüber. Er dient zusammen mit den Hinweisen zum Bericht (siehe Darstellung BERICHT) zur Orientierung hinsichtlich Form und Inhalt der im Grundpraktikum geforderten schriftlichen Niederlegung und Darstellung physikalisch-wissenschaftlicher Arbeit.Sämtliche Teile des Berichts (Darstellung der physikalischen Grundlagen, Messprotokoll, Auswertung, Zusammenfassung und Diskussion) müssen *urschriftlich* in gebundene Laborhefte eingetragen werden.

Die Darstellung der physikalischen Grundlagen muss zur Vorbereitung vor Versuchsbeginn ausgearbeitet und vorgelegt werden. (Sollte dazu das Laborheft nicht vorliegen, muss die Niederschrift auf zusätzliche Blätter erfolgen, die später in das Laborheft eingeklebt werden).

(2) Zur besseren Übersicht beginnt jeder Bericht auf einer neuen Seite mit dem Titel des Themas.(3) Der Bericht muss durch Überschriften deutlich abgesetzt gegliedert sein.(4) Die Darstellung der physikalischen Grundlagen soll zusammengefasst eine kurze Einführung in das Thema und die Fragestellung des Versuchs geben:

Welche Phänomene oder Prinzipien werden untersucht?

Nach welchen Methoden soll gemessen werden?

(5) Die Darstellung muss sich auf die physikalischen Inhalte beziehen. Sie soll *knapp*, muss aber *vollständig* sein. Lehrbuchartige Ausführungen und mathematische Herleitungen von Formeln für elementare Sachverhalte sind nicht erforderlich.(6) Die Darstellung muss eigenständig sein. Literaturhinweise allein oder wörtliche Abschriften oder Kopien des Skripts sind nicht zulässig.

- (7) Die Masse der Feder wird durch eine Ersatzmasse (effektive Federmasse) am Federende berücksichtigt, an der die gleiche Beschleunigungsarbeit geleistet werden muss, und die damit die gleiche kinetische Energie wie die Feder selbst besitzt.

Der Geschwindigkeitsverlauf an der Feder ist linear:

$$(E) \quad v(x) = v_0 \frac{x}{x_0}$$

Die Masseverteilung längs der Feder ist konstant, und für ein Federelement  $dx$  folgt:

$$(F) \quad dm = m_F \frac{dx}{x_0}$$

Daraus folgt für die gesamte kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} v^2 dm = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{x_0^2} \frac{m_F}{x_0} \int_0^{x_0} x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{x_0^2} \frac{m_F}{x_0} \frac{1}{3} x_0^3$$

$$(G) \quad = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} m_F v_0^2 \right]$$

- (8) d.h., die Feder muss mit einem Drittel ihrer Masse berücksichtigt werden.

#### Aufgaben

1. Berechnung der Federkonstanten einer Schraubenfeder durch Messung der Auslenkung der Feder.
2. Berechnung der Federkonstanten aus der Schwingungszeit als Federpendel.

- (7) Besondere Sachverhalte und Formeln müssen erläutert bzw. hergeleitet werden.

- (8) Die Wiederholung der Aufgabenstellung dient der Orientierung und dem Verständnis bei den folgenden Aufzeichnungen.

Messprotokoll

- (9) Paula Puh, Albert Ach;  
Tutor: Peter Pi;
- (10) 3.3.1981; Beginn 10.15 Uhr, Ende 12.20 Uhr.
- (11) Geräte
- (12) Stativ mit Spiegelskala (300 mm; Teilung 1 mm).
- (13) Feder mit Marke und Schale (Apparatur 3).  
Gewichtssatz ("5/10/20/20/50 g").  
Handstoppuhr (Ablesegenauigkeit 0,1 s).  
Waage "Sartorius"; (Ablesegenauigkeit 0,05 g).
- Massen
- (14)  ~~$m_5 = 4,99 \text{ g}$  (alle Massenfehler 0,05 g Auflösfehler)~~  
 ~~$m_{10} = 9,92 \text{ g}$~~   
 ~~$m_{20} = 19,92 \text{ g}$~~   
(Messung wegen Nachjustierung des Nullpunkts verworfen).
- (15)  ~~$m_5 = 5,00 \text{ g}$~~   
 ~~$m_{10} = 9,90 \text{ g}$~~   
 ~~$m_{20} = 19,90 \text{ g}$~~   
 ~~$m_{20'} = 19,95 \text{ g}$~~   
 ~~$m_{50} = 49,90 \text{ g}$~~
- (16) Federmasse  $m_f = 15,15 \text{ g}$
- (17) Masse von Marke und Schale  $m_s = 8,50 \text{ g}$
- Zur Messung der Schwingungsdauer (Aufgabe 2)
- Amplitude ca. 30 mm.  
Die Schwingungsdauer der unbelasteten Feder konnte nicht gemessen werden, da sie nicht gleichmäßig schwingt.  
Die Zeiten wurden am Umkehrpunkt gestoppt. Messung von 10 T zur Reduzierung der Reaktionsfehler.

- (9) Die Namen der Autoren und der Betreuerin (des Betreuers) sind wichtig, um zu wissen, wem der Bericht gehört und wer dafür zuständig ist.
- (10) Das Datum ist eine Standardinformation. Die Zeit kann zur nachträglichen Diskussion von Störeinflüssen wichtig sein (Temperaturänderungen, Netzspannungsschwankungen, ...).
- (11) Für die Rekonstruktion des Experiments und die Interpretation der Daten (z.B. Fehlerinformationen) müssen zusammenfassend alle Geräte mit ihren wichtigen Nenndaten aufgeführt werden (Typ, Hersteller; Fehlerangaben).
- (12) Alle Geräteangaben müssen unmittelbar so notiert werden, wie sie angegeben sind (Messbereiche, Empfindlichkeitskoeffizienten, Skalenteilungen, Fehlerangaben, ...).
- (13) Die Angabe, an welchem Versuchsplatz bzw. mit welchen Bauteilen oder Proben gearbeitet wurde, ist zur späteren Rekonstruktion und zum Vergleich von Ergebnissen wichtig.
- (14) Verworfen Werte kenntlich machen (z.B. durchstreichen), aber lesbar erhalten. Keine Daten radieren oder sonst wie vernichten.
- (15) Auch Nullen sind Zahlen; z.B. die Messung nicht mit 5 g, sondern korrekt mit 5,00 g protokollieren. Die Anzahl der Ziffern eines Werts enthält implizit Information über die Genauigkeit und das Auflösungsvermögen des Werts.
- (16) Eine Skizze des Versuchsaufbaus ist anschaulich und hilft, Bezeichnungen der Geräte und Größen zu verstehen. Bei elektrischen Versuchen ist ein Schaltplan, bei optischen Experimenten der Strahlengang mit der Position der optischen Komponenten unerlässliche Voraussetzung auch zum physikalischen Verständnis der Messdaten.
- (17) Alle Überlegungen und sonstigen Informationen zu den Messungen auch niederschreiben.

(18) Ausdehnung der Feder unter Belastung (Aufgabe 1)

	Pos. Marke	M / g	x / mm
(19)	ohne	2,5	0
(20)	5	5,00(5)	14,5
	10	9,90(5)	28,5
	10+5	14,90(7)	43,0
	20	19,90(5)	57,0
	20+5	24,90(7)	71,5
	20+10	29,80(7)	85,5
	20+10+5	34,80(9)	100,0
	20+20'	39,85(7)	114,5
	20+20'+5	44,85(9)	129,0
	50	49,90(5)	143,0
(21)	ohne	2,5	

(21) Schwingungsdauer als Federpendel (Aufgabe 2)

	10 T / s	M / g	T <sup>2</sup> / s <sup>2</sup>
(22)	10	9,90(5)	0,29(4)
(23)	20	19,90(5)	0,38(4)
	20+10	29,80(7)	0,49
(24)	20+20'	39,85(7)	0,62(5)
	50	49,90(5)	0,76
	50+10	59,80(7)	0,81
	50+20	69,80(7)	0,94(6)

AUSWERTUNGAuslenkung in Abhängigkeit der Belastung

Siehe grafische Darstellung Auslenkung  $x$  gegen Auflagemasse  $m$  auf der Folgeseite. Es ergab sich die erwartete Nullpunktgerade mit dem Anstieg:

$$D \cdot g = (0,345 \pm 0,003) \text{ kg m}^{-1}$$

(18) Über jede Tabelle eine Überschrift setzen, damit zu sehen ist, um welche Messung es sich handelt.

(19) Längeneinheiten mm und cm nicht verwechseln. Viele Maßstäbe (Messlatten, Lineale, Schiebelehren) sind in cm kalibriert. Diese Skala hatte eine mm-Teilung.

(20) Eine Skala kann durch Schätzung zwischen zwei Teilstrichen genauer als auf ein Skalenteil (Skt) abgelesen werden (Schätzstelle; hier die Nachkommastelle). Der Fehler ist aus den Ablesebedingungen zu ermitteln; hier wurde die Obergrenze von einem ganzen Skalenintervall angenommen ( $\pm 0,5$  Skt).

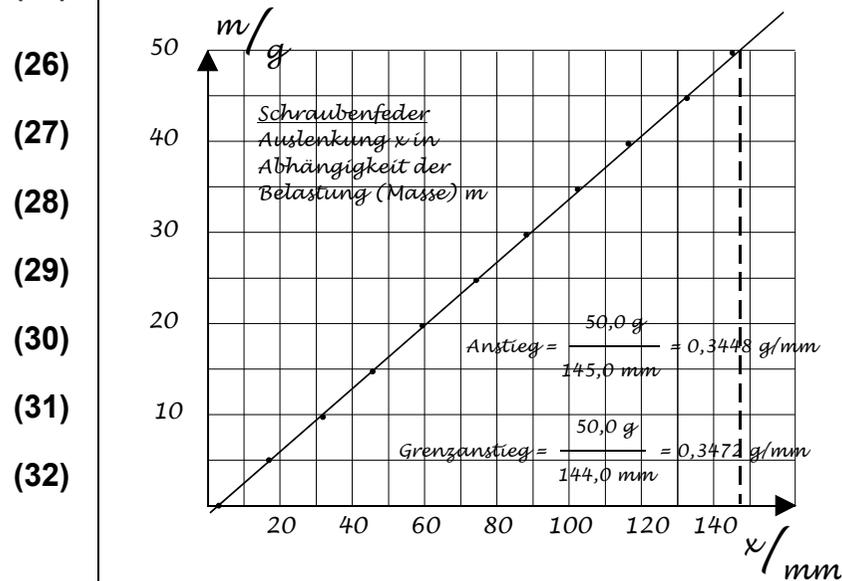
(21) Die letzte Messung wurde zur Kontrolle der Anfangswert (Nullpunkt) wiederholt.

(22) Berechnete Folgewerte zur besseren Übersicht in die Messtabelle integrieren.

(23) Alle Messungen unmittelbar so notieren, wie sie vorgenommen wurden; also nicht "15 g" oder nur den berechneten Wert 14,90 g schreiben, sondern welche Gewichtsstücke benutzt wurden.

(24) Fehlerrechnungen und Fehlerwerte nur dann ohne weitere Kommentare anführen, wenn sie rein formal nach den Fehlerfortpflanzungsgesetzen berechnet wurden und dabei alle Eingangsfehler erfassen.

(25) Zu Aufgabe 1: Auslenkung einer Feder unter Belastung



Zu Aufgabe 2: Schwingungsdauer einer Feder

(33)

Schraubenfeder  
Schwingungszeit  $T^2$  in  
Abhängigkeit der  
Belastung (Masse)  $m$

(34)

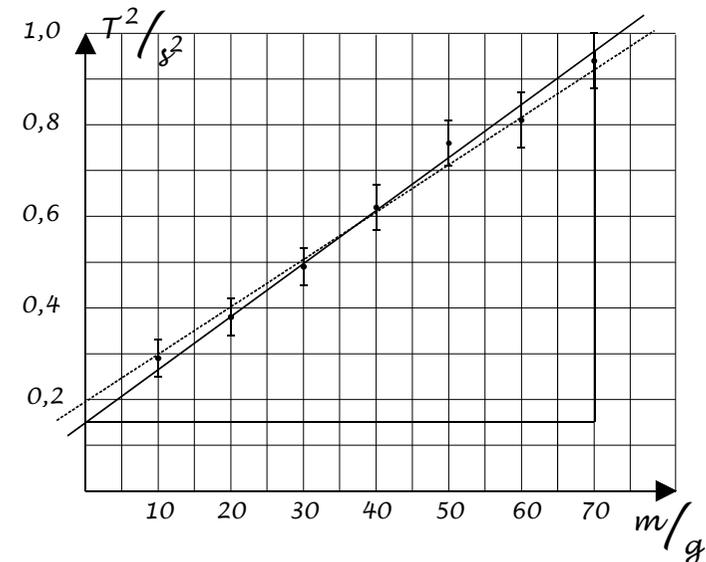
(35)

$$\text{Anstieg} = \frac{(0,96 - 0,15) \text{ s}^2}{70 \text{ g}} = 0,012 \text{ s}^2/\text{g}$$

(36)

$$\text{Grenzanstieg} = \frac{(0,92 - 0,20) \text{ s}^2}{70 \text{ g}} = 0,010 \text{ s}^2/\text{g}$$

(37)



(25) Zur Ausführung von grafischen Darstellungen siehe Anleitung GRAFISCHE DARSTELLUNGEN UND AUSWERTUNG VON FUNKTIONEN hier im Skript.

(26) Grafische Darstellungen sind auf Original-Netzpapier anzufertigen (mm-Papier, log-Papier; im Praktikum erhältlich). (In der nebenstehenden Abbildung musste aus darstellungstechnischen Gründen auf die korrekte Abbildung von Netzpapier verzichtet werden). Sie sind in den logischen Zusammenhang des Berichts fest einzufügen (einzukleben).

(27) Zur Auswertung herangezogene Darstellungen dürfen aus Genauigkeitsgründen nicht zu klein gewählt werden; Standardfall im Praktikum ist formatfüllendes DIN A4.

(28) Das Netz ist optimal auszunutzen, wobei hinsichtlich der Überprüfbarkeit die Achsenskalierung einfach sein und keine ungeraden oder komplizierten Teilungsmaße enthalten soll (1 Einheit pro 30 mm o.ä.).

(29) Jede Darstellung muss eine Legende tragen (was ist unter welchen Bedingungen dargestellt).

(30) Die Achsen müssen vollständig bezeichnet werden (Skalierung, Größen, Einheiten).

(31) Es müssen sämtliche Messpunkte und Fehlerbalken eingetragen werden.

- (32) Ist die Streuung von Daten sehr gering, so muss eine empfindlichere Darstellung oder ein numerisches Auswerteverfahren in Betracht gezogen werden. In Grenzfällen muss die Genauigkeit der Auflösung und der Einzelwerte zur Fehlerabschätzung herangezogen werden.
- (33) Werden Variablen transformiert, so ist dies bei der Achsenbezeichnung zu berücksichtigen.
- (34) Es ist ausreichend, nur eine der beiden möglichen Grenzgeraden zur Fehlerabschätzung zu betrachten. Die Fehler ergeben sich als Differenzen zwischen den Ausgleichs- und den Grenzgeraden.
- (35) Die zur Berechnung herangezogenen Anstiegsdreiecke sind zur Prüfung einzutragen. Sie sind möglichst groß zu wählen (Achsen Schnittpunkte), um Zeichen- und Ablesungenauigkeiten gering zu halten.
- (36) Zur Nachvollziehbarkeit sollen die berechneten Funktionsparameter mit in die Darstellung eingetragen werden.
- (37) Bei der Angabe der Parameter ist darauf zu achten, dass es sich im Allgemeinen um dimensionierte Größen handelt, die mit Einheiten anzugeben sind.

- (38) *Die Fehler  $\Delta m$  sind vernachlässigbar, die Fehler  $\Delta x$  liegen an der Grenze der Darstellungsmöglichkeit (Punkt Durchmesser). Zur Abschätzung einer Grenzgeraden wurde unter Berücksichtigung von Zeichengenauigkeit und Streuung ein Fehler von 1 mm bei der Auslenkung angesetzt.*
- (39) *Mit  $g = 9,8128(1) \text{ m/s}^2$  (Angabe im Skript; Fehler vernachlässigbar) folgt für die Federkonstante:*

$$D = (3,383 \pm 0,024) \text{ N m}^{-1}$$

Aufgabe 2: Auslenkung einer Schraubenfeder unter Belastung

Mit der Masse von Schale und Marke  $m_s$ , der effektiven Federmasse nach (G) und der variablen Anhängemasse  $m$  ist nach (D):

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{D} \left( m_s + \frac{1}{3} m_f \right) + \frac{4 \pi^2}{D} m$$

*In der transformierten Darstellung von  $T^2$  gegen  $m$  (siehe Vorseite) ergab sich die erwartete Gerade mit dem Anstieg:*

$$\frac{4 \pi^2}{D} = (12 \pm 2) \text{ s}^2 \text{ kg}^{-1}$$

*Daraus folgt für die Federkonstante:*

$$D = (3,29 \pm 0,55) \text{ N m}^{-1}$$

*Der Achsenabschnitt ist*

$$\frac{4 \pi^2}{D} \left( m_s + \frac{1}{3} m_f \right) = (0,15 \pm 0,05) \text{ s}^2$$

*Mit dem obigen Wert für die Federkonstante folgt als effektive Masse der Feder:*

$$m_f = (13 \pm 13) \text{ g}$$

- (38) Die Fehlerrechnung (Fehlerfortpflanzung, Fehlerabschätzung von Funktionsparametern) ist integraler Bestandteil der Auswertung. Fehlerwerte und Kommentare zur Fehlerrechnung gehören direkt an die Ergebnisse selbst.
- (39) Eine Niederschrift rein formaler Fehlerberechnungen (Zahlenwertgleichungen zum Fehlerfortpflanzungsgesetz) ist nicht erforderlich. Dagegen müssen Fehlerwerte immer erläutert werden, wenn bei der Abschätzung besondere individuelle oder lokale Gesichtspunkte berücksichtigt wurden.
- (40) Fehler-Zwischenwerte im Auswerteteil sollen zweistellig berücksichtigt und notiert werden.

gen wird:

$$D = (3,38 \pm 0,03) \text{ N m}^{-1}$$

Die Genauigkeit der Bestimmung aus der Schwingungszeit hätte durch Messung einer größeren Anzahl von Perioden gesteigert werden können.

Die qualitative und quantitative Übereinstimmung der Messungen untereinander und mit dem erwarteten Verlauf zeigt die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes (A) und des Bewegungsgesetzes (C) mit (D).

Aus der Messung der Schwingungszeit in Abhängigkeit von der Anhängemasse ließ sich zusätzlich der Beitrag der Feder Masse selbst bestimmen. Das Ergebnis für die Feder Masse  $m_f$  mit  $(13 \pm 13) \text{ g}$  steht dabei formal (noch) in Übereinstimmung mit dem auf der Waage ermittelten Messwert von  $(15,15 \pm 0,05) \text{ g}$  und widerspricht zumindest nicht einem Ansatz einer effektiven Feder Masse von  $1/3 m_f$ . Der sehr große Fehler muss aber als unbefriedigend angesehen werden, da er an der anderen Grenze auch noch den Schluss zulässt, dass die Feder selbst keinen Anteil zur trägen Masse beiträgt.

- (41) Wobei der D-Wert wegen der besseren Genauigkeit aus Ausgabe 1 übernommen wurde. Der große Fehler resultiert zum einen aus den schlechten Messdaten (Fehler des Achsenabschnitts 34 %), wobei die Vergrößerung auf
- (42) 100 % sich aus der Differenzbildung in der Auswertbeziehung ergibt.
- (43) Bei der Fehlerabschätzung müsste grundsätzlich berücksichtigt werden, dass der Anstieg und der Achsenabschnitt korreliert sind. Das kann hier jedoch außer Betracht bleiben, da der Fehler von D nicht beitragend
- (44) ist und ebenso wie der der Masse der Schale vernachlässigt wurde.
- (45) Zusammenfassung und Diskussion
- (46) Die Messung der Federkonstanten einer Schraubenfeder durch Auslenkung in Abhängigkeit der Belastung und
- (47) durch Messung der Periodendauer eines Federpendels ergab übereinstimmende Werte, wobei als Ergebnis der
- (48) bessere Wert aus der Auslenkungsmessung herangezogen
- (49)

- (41) Fehler müssen in besonderen Fällen diskutiert werden. Welches sind die stark beitragenden Fehler? Was beeinflusst die Fehlerfortpflanzung?
- (42) Bei korrelierten Größen muss zumindest der Maximalfehler berechnet werden. (Besser ist es, die Korrelation zu untersuchen).
- (43) Die Zusammenfassung und Diskussion muss Thema, Ziele und Ergebnisse des Versuchs übersichtlich und auf das Wesentliche bezogen darstellen: Was wurde untersucht? Wie oder nach welchen Methoden wurde gemessen? Welche Ergebnisse sind herausgekommen? Wie sind die Ergebnisse wissenschaftlich zu bewerten?
- (44) Die Ergebnisse sind qualitativ und quantitativ untereinander oder mit Literaturwerten zu vergleichen.
- (45) Werte stimmen überein, wenn sich die Fehlerintervalle überschneiden. Werte sind verträglich, wenn sich die dreifachen Fehlerintervalle überschneiden (Verträglichkeitsmaß). Werte werden erst dann als signifi-

- kant unterschiedlich betrachtet, wenn sich auch die dreifachen Fehlerintervalle nicht mehr erreichen.
- (46) Bei Ergebnissen mit unterschiedlichen Fehlern muss ein gewichteter Mittelwert gebildet werden. Bei Ergebnissen mit sehr unterschiedlichen Fehlern wird man den genaueren Wert als Endergebnis heranziehen.
- (47) Ergebnisse sind mit den absoluten Fehlern als Vergleichsgrundlage anzugeben. Der relative Fehler dient ergänzend der Genauigkeitsangabe.
- (48) Fehler von Endergebnissen sind aufgerundet einstellig anzugeben.
- (49) Auch die Fehler müssen in die Diskussion einbezogen werden. Wie könnte die Genauigkeit grundsätzlich apparativ oder methodisch verbessert werden?

## STANDARDLEHRBÜCHER

## GPI

*Die folgenden Lehrbücher werden verbreitet zur Vermittlung physikalischen Grundwissens herangezogen, wie es für das Physikstudium und die Vorbereitung der Praktikumsarbeit erforderlich ist. Eine Reihe von Lehrbüchern wurde in verschiedenen Auflagen bzw. Jahren herausgegeben, so dass auf eine Angabe des Erscheinungsjahrs verzichtet wurde. Alle Bücher sind in der Lehrbuchsammlung der Fachbereichsbibliothek vorhanden.*

obligatorische Literatur

- [1]: **Gerthsen-Kneser-Vogel;**  
Physik;  
Springer-Verlag
- [2]: **Bergmann-Schaefer Band 1**
- [3]: **Bergmann-Schaefer Band 2**
- [4]: **Eichler Kronfeld Sahn**

## Das neue Physikalische Grundpraktikum

Zusatzliteratur

- Alonso-Finn;**  
Physik;  
Addison-Wesley bzw. Inter European Editions
- Atkins;**  
Physik;  
de Gruyter
- Kittel-Knight-Rudermann;  
**Berkeley Physik Kurs**  
(1: Mechanik, 2: Elektrizität und Magnetismus, 3: Schwingungen und Wellen, 4: Quantenphysik, 5: Statistische Physik);  
Vieweg & Sohn
- Demtröder;**  
Experimentalphysik 1-4;  
Springer-Verlag

**Dransfeld-Kalvius-Kienle-Lucher-Vonach;**  
Physik (I: Mechanik, II: Elektrodynamik, IV: Atome-Moleküle-Wärme);  
Oldenbourg

**Feynman-Leighton-Sands;**  
Vorlesungen über Physik (I: Mechanik-Strahlung-Wärme, II: Elektromagnetismus und Struktur der Materie);  
Oldenbourg

**Hänsel-Neumann;**  
Physik 1-3;  
Spektrum Akademische Verlagsanstalt

**Kohlrausch;**  
Praktische Physik (3: Tafeln);  
Teubner

**Tipler;**  
Physik;  
Spektrum Akademische Verlagsanstalt

**Martienssen;**  
Einführung in die Physik (I: Mechanik, II: Elektrodynamik, III: Thermodynamik,

IV: Schwingungen-Wellen-Quanten);  
Akademische Verlagsgesellschaft

**Otten;**  
Repititorium der Experimentalphysik;  
Springer-Verlag

**PSSC;**  
Vieweg

**Pohl,**  
Einführung in die Physik (1: Mechanik-Akustik-Wärme,  
2: Elektrizitätslehre, 3: Optik-Atomphysik);  
Springer-Verlag

**Zinth-Körner;**  
Physik I-III;  
Oldenbourg

**Westphal;**  
Kleines Lehrbuch der Physik;  
Springer-Verlag

#### Optik

**Born-Wolf;**  
Principles of Optics;  
Mac Millan

**Fowles;**  
Introduction to Modern Optics;  
Dover Publication Inc.

#### Atom- und Quantenphysik

**Eisberg-Resnick;**  
Quatum Physics of Atoms, Moleculs, Solids, Nuclei and  
Particles;  
Wiley & Sons

**Finkelburg;**  
Atomphysik;  
Springer-Verlag

**Haken-Wolf;**  
Atom- und Quantenphysik;  
Springer-Verlag

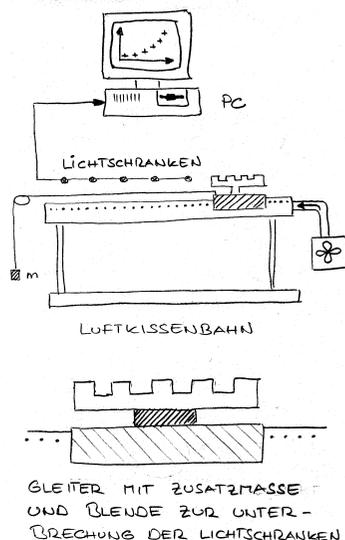
**Beiser;**  
Atome, Moleküle, Festkörper;  
Vieweg & Sohn

#### Fehlerrechnung

**Taylor;**  
Fehleranalyse;  
VCH Verlagsgesellschaft

## LINEARE BEWEGUNGEN

## GPI

**Stichworte**

Newtonsche Bewegungsgleichung;

Bewegungsgesetz bei konstanter (Antriebs-) Kraft und geschwindigkeitsproportionaler Reibungskraft; Reibung, Wirbelstromdämpfung.

**Ziele des Versuchs**

Diskussion der Newtonschen Bewegungsprinzipien und der Bewegungsgleichung. Untersuchung linearer Bewegungen eines Massenpunktes. Herleitung des Bewegungsgesetzes (Lösung der Bewegungsgleichung) für konstante und geschwindigkeitsproportionale Kräfte.

Betrachtung von Reibungseinflüssen. Abhängigkeit der Reibungskräfte von den Bewegungsgrößen.

Umgang mit computergestützten Experimentier- und Messsystemen (CASSY-Lab-System; siehe Skript im allgemeinen Teil der Praktikumsanleitung).

**Literatur**

[1]: Kapitel 1.3, 1.6, 7.4.4

**Aufgaben**

1. Justierung der Fahrbahn und des Messsystems.
2. Untersuchung von Bewegungen bei konstanter Kraft: Aufnahme von Weg-/Geschwindigkeits-/Beschleunigungs-Zeit-Messungen für verschiedene Kombinationen von Masse (Gleiter) und Zugkraft (Anhängegewicht) und Überprüfung des Bewegungsgesetzes in Abhängigkeit dieser Parameter.
3. Untersuchung von Bewegungen unter Berücksichtigung einer geschwindigkeits-proportionalen Dämpfungskraft (magnetische Wirbelstromdämpfung). Berechnung der Dämpfungskonstanten aus der Zeitkonstanten der Bewegung und aus der Grenzgeschwindigkeit.

**Physikalische Grundlagen**

Der Gleiter auf der Luftkissenfahrbahn ist ein starrer Körper, der durch die Schiene geführt wird und keine Rotationsbewegungen ausführen kann. Die Bewegung ist damit eindimensional und wird durch Anwendung der Bewegungsgleichung auf den Schwerpunkt vollständig beschrieben.

Unter Annahme einer konstanten Kraft  $F$  ist die Herleitung des Bewegungsgesetzes durch Integration der Bewegungsgleichung vergleichsweise einfach. Unter zusätzlicher Berücksichtigung einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft  $\delta v$  erhält die Bewegungsgleichung die Form:

$$F - \delta v = ma = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

Die Integration (nach Trennung der Variablen) liefert das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz. Unter Annahme der Anfangsbedingung  $v_0 = v(t=0) = 0$  erhält man:

$$v(t) = \frac{F}{\delta} \left( 1 - e^{-\frac{\delta}{m}t} \right) \quad (2)$$

Verdeutlichen Sie sich die Aussage dieses Gesetzes.

Was folgt im Grenzfall **für t?** Diskutieren Sie die Zeitkonstante und die Grenzgeschwindigkeit.

**Darstellung der physikalischen Grundlagen**

(zur Vorbereitung als Teil des Berichts): Allgemeine Darstellung und Erläuterung der Bewegungsprinzipien bzw. der Bewegungsgleichung.

Wesentlicher Inhalt der Einführung im Bericht soll die oben geschilderte Herleitung des Bewegungsgesetzes unter Einfluss der konstanten, beschleunigenden Kraft und der Reibungskräfte sein.

**Apparatur und Geräte**

Luftkissenbahn mit Gleiter und Zusatzmassen. Umlenkrolle. M5-Muttern als Anhängegewichte zur Ausübung einer konstanten Zugkraft. Permanentmagnete zur Wirbelstromdämpfung.

Lichtschrankschiene und rechnergestütztes Messsystem (CASSY-Lab-System) zur Datenerfassung (Geschwindigkeits-Zeit-Wertepaare) und Auswertung.

**Versuchsdurchführung und Auswertung**

Die Geschwindigkeits-Zeit-Messungen werden mit einer Lichtschrankschiene und mit dem rechnergestützten Mess- und Auswertesystem CASSY-Lab durchgeführt. Hinweise zur Bedienung des Rechners und zum Aufruf des Programms siehe Skript CASSY-Lab-System im allgemeinen Teil der Praktikumsanleitung. Weitere Hinweise auf die Mess- und Auswertemöglichkeiten und auf die Datenausgabe werden durch das Programm selbst gegeben.

**Hinweis:** *Hard- und Software der Ausrüstung (Bahnverfolgung) sind empfindlich gegen Störeinflüsse, und das Programm stürzt gelegentlich aus unerklärlichen Gründen ab. Problematisch ist insbesondere der **Datentransfer** der Messdaten aus dem Zwischenspeicher des Interface-Einschubs in den Rechner während der Menü-Funktion "Datentransfer". **Während dieser Phase darf das Gebläse nicht ein- oder ausgeschaltet werden.***

**Zu Aufgabe 1**

Vor Beginn der Messungen müssen Fahrbahn und Lichtschrankenschiene sorgfältig horizontal ausgerichtet werden. Ein Gleiter auf der Fahrbahn sollte (bei laufendem Gebläse) in Ruhe bleiben. Bedingt durch die hohe Empfindlichkeit der Apparatur und durch innere Verspannungen der Schiene kann nur eine beste, aber keine perfekte Justierung erreicht werden. Verbleibende Abweichungen können durch das Messprogramm berücksichtigt werden (Kalibrierfunktion). Testen Sie die Justierung ausgiebig durch Aufnahme von "kräftefreien" Bewegungsabläufen (Anstoßen des Gleiters).

Neben den Reibungskräften können Störungen durch Turbulenzen auch bei zu großen Luftförderleistungen auftreten. Im Platzskript sind empfohlene Einstellungen für das Gebläse angegeben.

**Zu Aufgabe 2**

Die Masse des Gleiters kann durch Zusatzgewichte verändert werden. Zur Realisierung von Zugkräften sind Faden und eine Umlenkrolle und kleine Muttern als Anhängengewichte vorhanden; die Masse der Muttern ist am Versuchsplatz angegeben. Zur Auswertung können grafische Darstellungen  $s(t^2)$ ,  $v(t)$  und  $a(t)$  und zusätzlich eine Wertetabelle von  $v(t)$  auf dem Drucker ausgegeben werden.

Zur Überprüfung der Bewegungsgleichung sind die Ergebnisse der Messungen in geeigneter Weise grafisch darzustellen und zu diskutieren.

**Zu Aufgabe 3**

Mit ein oder zwei Permanentmagneten, die in die Vertiefungen auf der Oberseite des Gleiters eingelegt werden, kann eine Wirbelstromdämpfung der Bewegung bewirkt werden. In Vorversuchen sind dabei geeignete Messumstände zu untersuchen (Masse des Gleiters, Zugkraft bzw. Anhängemasse, Zahl der Dämpfungsmagnete).

Nach Gleichung (2) kann die Dämpfungskonstante aus der Grenzgeschwindigkeit und aus den Zeitkonstanten des Exponentialterms bestimmt werden. Zur Auswertung der Messung werden dazu das  $v(t)$ -Diagramm und für die logarithmische Auswertung die  $v(t)$ -Wertetabelle

ausgedruckt.

Für die logarithmische Darstellung und Auswertung muss die Grenzgeschwindigkeit  $V_{\infty}$  von den Messwerten abgezogen werden. Ein erster Schätzwert ergibt sich aus den Daten für große Zeiten. Kriterium für einen konsistenten Wert für  $V_{\infty}$  ist darüber hinaus die Linearität der logarithmischen Darstellung. Liegen die Werte für große Zeiten zu hoch, so wurde zu viel abgezogen (zu großer Schätzwert für  $V_{\infty}$ ), liegen sie zu tief, entsprechend umgekehrt zu wenig.

Dieser Test ist sehr empfindlich und verlangt unter Umständen eine iterative Durchführung der logarithmischen Darstellung (Bleistift).

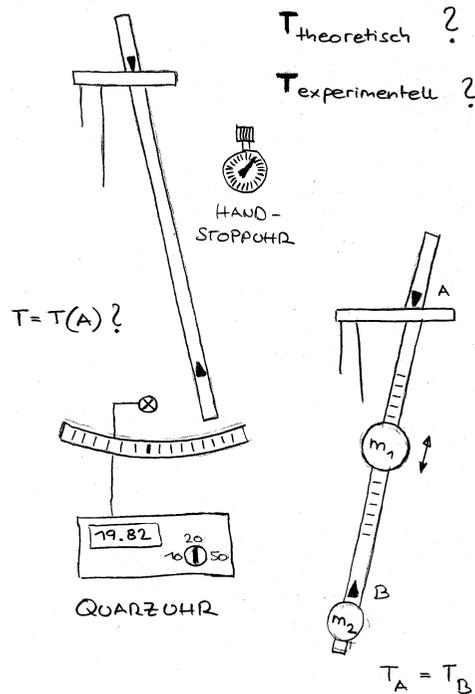
**Ergänzende Fragen**

1. Die zu beschleunigende Masse ist in erster Näherung die des Gleiters. Welchen Einfluss auf die Beschleunigung haben:
  - die Anhängengewichte?
  - die Umlenkrolle?

Im Ansatz der Bewegungsgleichung bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung wird die bewegungserhaltende Zugkraft als konstant angenommen. Ist dies bei der gegebenen experimentellen Durchführung verwirklicht?

## SCHWEREPENDEL

## GPI

Stichworte

Drehbewegungen starrer Körper; Drehmoment; Trägheitsmoment, *Steinerscher Satz*.

Freie, harmonische Schwingungen (Drehpendel), Bewegungsgesetz.

Reduzierte Pendellänge; Reversionspendel.

Ziele des Versuchs

Untersuchung von Drehschwingungen eines Schwerependels.

Vertiefung von Fehlerrechnung und Fehlerdiskussion im Rahmen der vergleichsweise hohen Messgenauigkeit an der Apparatur.

Literatur

[1]: Kapitel 1.4, 2.2, 2.3

[2]: Kapitel 22.1, 22.3

Aufgaben

- Messung der Schwingungszeit eines Schwerependels (Pendel ohne Zusatzmassen) in Abhängigkeit von der Amplitude.
- Messung der Fallbeschleunigung nach der Reversionsmethode (Pendel mit aufgesetzten Zusatzmassen).

Physikalische Grundlagen

Die Bewegungsgleichung für Drehbewegungen starrer Körper um eine feste Achse lautet:

$$(1) \quad M = I \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

wobei  $M$  das Drehmoment,  $I$  das Trägheitsmoment und  $\phi$  der Drehwinkel sind. Für ein (physikalisches) Schwerependel mit einem rücktreibendem Drehmoment  $M = -s m g \sin \phi$  (Abstand Drehpunkt-Schwerpunkt  $s$ , Masse  $m$ ), und unter der Näherung  $\sin \phi \approx \phi$  ergibt sich aus (1) eine harmonische Schwingung, deren Frequenz bzw. Periodendauer (Schwingungszeit) aus der Eigenwertgleichung des Lösungsansatzes folgt:

$$(2) \quad T_0 = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{m s g}}$$

Mit der Einführung der *reduzierten Pendellänge*  $L = I/(m s)$  wird eine Analogie zum mathematischen Pendel hergestellt:

$$(3) \quad T_0 = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung mit dem korrekten Drehmoment  $-s m g \sin \phi$  führt auf eine Reihenentwicklung:

$$(4) \quad T = T_0 \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + \dots \right]$$

d.h. auf eine Amplitudenabhängigkeit von  $T$ . Wird nur der erste Korrekturterm berücksichtigt, und an dieser Stelle wieder  $\sin \phi$  durch  $\phi$  genähert, so erhält man:

$$(5) \quad T = T_0 \left[ 1 + \frac{\phi_0^2}{16} \right]$$

Reversionspendel

Für ein gegebenes Pendel kann die Berechnung des Trägheitsmomentes  $I$  und des Schwerpunktabstandes  $s$  schwierig sein. Als *Reversionspendel* bezeichnet man eine Messmethode bzw. Anordnung, bei der der Ausdruck  $I/(m \cdot s)$  auf eine einfach zu messende Länge zurückgeführt wird.

Setzt man das Trägheitsmoment nach dem *Steinerschen Satz* aus „Formanteil“  $I_s$  (Trägheitsmoment zur Schwerpunktsachse) und einem „Punktmassenanteil“  $m \cdot s^2$  zusammen, so ist nach (2):

$$(6) \quad T = 2 \pi \sqrt{\frac{I_s + m s^2}{m s g}}$$

Durch Gleichsetzen dieser Beziehung für zwei Werte  $s_1$  und  $s_2$  können zwei Schwerpunktabstände (Drehpunkte) gesucht werden, für die das Pendel die gleiche Schwingungszeit besitzt. Es ergibt sich eine quadratische Gleichung mit den Lösungen:

$$(7a) \quad s_2 = s_1$$

$$(7b) \quad s_2 = \frac{I_s}{m s_1}$$

Die erste Lösung ist trivial und bringt keinen weiteren methodischen Nutzen. Bildet man die Summe der Schwerpunktabstände für den zweiten Fall, so ergibt dies gerade die reduzierte Pendellänge  $L$ :

$$(8) \quad s_1 + s_2 = \frac{I_s}{m s_1} + s_1 = \frac{I_s + m s_1^2}{m s_1} = \frac{I}{m s} = L$$

Ordnet man an einem Pendel auf einer Linie durch den Schwerpunkt zwei Drehpunkte mit unterschiedlichem Abstand vom Schwerpunkt an, so dass sich für beide Drehpunkte die gleiche Schwingungszeit ergibt, dann ist der (einfach messbare) Abstand der Drehpunkte gleich der benötigten reduzierten Pendellänge  $L$ .

#### Darstellung der physikalischen Grundlagen

(zur Vorbereitung als Teil des Berichts): Darstellung der Lösung der Bewegungsgleichung in der genäherten Form für ein lineares Rückstellmoment.

Berechnung des Trägheitsmomentes einer linearen Massenverteilung. Beweis zu Aufgabe 2.

#### Apparatur und Geräte

Pendel aus Flachstahl (ca. 1,70 m lang) mit zwei symmetrisch angeordneten Drehpunkten (Schneiden) und zusätzlich anbringbaren Massen (siehe Titelseite).

Handstoppuhr (Auflösung 1/100 s). Lichtschrankengesteuerte Quarz-Stoppuhr (Genauigkeit  $10^{-5}$ , Auflösung 1/100 s).

#### Versuchsdurchführung und Auswertung

##### Zu Aufgabe 1

Die Messungen sollen zum Vergleich sowohl mit einer Handstoppuhr als auch mit der lichtschrankengesteuerten Quarzuhr durchgeführt werden. In beiden Fällen sind die Genauigkeit und Reproduzierbarkeit zu untersuchen und bei den Überlegungen zum Umfang der Messungen zu berücksichtigen (Anzahl der Perioden). Maximal-Wegamplitude (am unteren Ende der Pendelstange) ca. 30 cm.

Bitte das Pendel bei großen Amplituden vorsichtig auslenken, um Kollisionen mit den übrigen Teilen der Apparatur zu vermeiden!

Zur Auswertung werden die Schwingungszeiten gegen das Quadrat der Amplitude grafisch aufgetragen.

Die Berechnung der Schwingungszeit des Pendels kann aus den im Platzskript angegebenen geometrischen Abmessungen und der Fallbeschleunigung (genauer Wert von  $g$  siehe *KONSTANTEN* im allgemeinen

Teil dieser Praktikumsanleitung) unter Anwendung des *Steinerschen Satzes* erfolgen. Die Pendelstange ist als linearer Körper zu idealisieren. Zusätzlich können mit den angegebenen Daten die Aussparung in der Stange und die eingesetzte Schneide berücksichtigt werden. Vergleichen und diskutieren Sie die berechneten mit den gemessenen Ergebnissen.

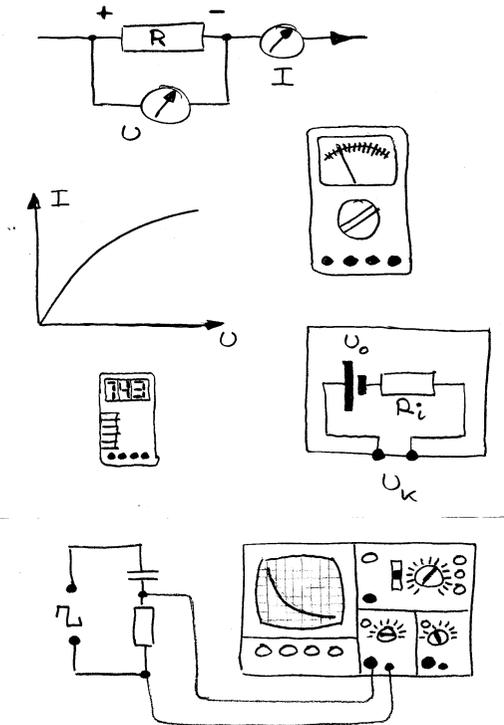
##### Zu Aufgabe 2

Für diese Messungen müssen die Zusatzmassen auf die Pendelstange aufgesetzt werden. Die große Zusatzmasse muss sich zwischen den Schneiden befinden, die kleine Zusatzmasse außerhalb der Schneiden, so dass die rote Pfeilmarkierung bei der Strichmarkierung A steht. Bei dem Pendel in dieser Form ist der Wert der reduzierten Pendellänge durch den Schneidenabstand fest vorgegeben ( $L = 0,9941 \text{ m} \pm 0,0002 \text{ m}$ ), aber die Schwerpunktlage kann durch Verschieben insbesondere der großen Masse verändert werden.

Eine unsystematische Suche nach einer Stellung mit gleicher Schwingungszeit für beide Drehpunkte ist aus zwei Gründen unbefriedigend. Zum einen würde man sich der gesuchten Einstellung nur zufällig und sukzessive nähern. Zum anderen würden alle Messungen bis zum Erreichen dieser Einstellung zum Ergebnis und seiner Genauigkeit nicht mehr beitragen. Günstiger ist es, nacheinander für beide Drehpunkte die Schwingungszeit in Abhängigkeit der Position des großen Gewichts zu messen und in einem gemeinsamen Diagramm grafisch darzustellen. Es sollte sich ein Schnittpunkt  $T_1 = T_2$  ergeben, dessen Lage und Genauigkeit dann durch die Gesamtheit aller Messwerte bestimmt wird.

## ELEKTRISCHE MESSTECHNIK

## GPI

Stichworte

Stromleitung; Strom (Ladungsstrom); elektrische Spannung. *Kirchhoffsche* Regeln. Widerstand; *Ohmsches* Gesetz.

Elektrische Arbeit und Leistung.

*Wheatstonesche* Brücke; Kompensationsmessung.

Innenwiderstand von Messgeräten und Stromquellen.

Wechselstrom; Effektivwerte. Impedanz (Wechselstromwiderstand).

Phasenverschiebung und Wechselstromleistung.

Kondensator und Kapazität; Spule und Selbstinduktion.

*R-C*-Kreis (Zeitkonstante) und *L-C*-Kreis (Eigenfrequenz und Dämpfungskonstante).

Ziele des Versuchs

Elektrische Schaltungen und Messgeräte und die Benutzung elektrischer Messgrößen sind elementare Hilfsmittel bei physikalischen Experimenten aus allen Themenbereichen und allen Schwierigkeitsgraden, und zugehörige messtechnische Grundkenntnisse können nicht themenbezogen auf das Gebiet der Elektrizitätslehre beschränkt bleiben. Hauptziel des Versuchs ist eine Einführung in den messtechnischen Umgang mit den Grundgrößen Spannung, Strom und Widerstand und den zugehörigen Geräten. Darüber hinaus sollen propädeutisch einfache Modellvorstellungen des Stromleitungsmechanismus vermittelt werden.

Der Versuch soll vornehmlich den Umgang mit Experimentier- und Messgeräten üben. Eine inhaltliche Vertiefung der physikalischen Grundlagen einiger der Schaltungsbeispiele findet in späteren Versuchen statt.

Literatur

[1]: Kapitel 6.3, 7.6.2 mit 7.6.7

[3]: Kapitel 23.4, 24.3

Aufgaben

Die Aufgaben sind thematisch gegliedert. Gefordert ist die Bearbeitung von vier Aufgaben aus unterschiedlichen Themenbereichen, davon zwei aus A-D und zwei aus E-G.

Themenbereich A (Strom, Spannung und Widerstand; Kirchhoffsche Regeln. Innenwiderstände von Messgeräten. Spannungs- und Stromteiler; Spannungs- bzw. Stromquellen. Innenwiderstand. Leistungsanpassung):

A1. Aufbau, Messung und Berechnung des Widerstandswertes einer "Würfelschaltung" aus 100-Ω-Widerständen bei "raumdiagonalem" Stromfluss.

A2. Aufnahme der Kennlinie eines belasteten Spannungsteilers.

Themenbereich B (Spannungs- bzw. Stromquellen. Innenwiderstand. Leistungsanpassung):

B1. Messung des Innenwiderstandes einer Batterie und des scheinbaren Innenwiderstandes eines Spannungskonstanters (Netzgerät).

Themenbereich C (Brückenmethoden):

C1. Messung eines sehr kleinen Widerstandes (Kupferdraht) mit einer Brückenschaltung und Bestimmung des spezifischen Widerstands von Kupfer.

Themenbereich D (Stromleitungsmechanismen. Kennlinien):

D1. Aufnahme der Kennlinien eines metallischen Leiters (Glühlampe) oder eines Halbleiters (NTC-Widerstand).

D2. Messung der Temperaturabhängigkeit des Widerstandes für einen metallischen oder einen Halbleiter. Berechnung der Temperaturkoeffizienten (im Falle des Halbleiters aus einer logarithmischen Darstellung der Messung). Bestimmung der mittleren Energiedifferenz zwischen Valenz- und Leitungselektronen bei Halbleitern.

Themenbereich E (Frequenzgenerator, Oszilloskop; Charakteristika von Wechselspannungen):

E1. Beobachtung einer Wechsel-, einer Dreieck- und einer Rechteckspannung mit dem Oszilloskop und gleichzeitige Effektivwert-Messung der Spannungen mit einem Multimeter. Vergleich der verschiedenen Messergebnisse für die Spannungswerte (Amplitude, Effektivwert) und der Frequenzen untereinander.

Themenbereich F (Kondensator und Spule):

F1. Aufbau eines *R-C*-Kreises. Periodische Anregung mit einer Rechteckspannung und Aufnahme der Lade-/Entladekurve. Überprüfung der erwarteten funktionalen Abhängigkeit und Berechnung der Zeitkonstanten. Vergleich mit dem erwarteten Wert aus der Kapazität des Kondensators und dem Wert des Widerstands. (Zusatzaufgabe: Beobachtung der Entladekurve des *R-C*-Kreises bei sehr kleinem und sehr großem Widerstand und Interpretation der Ergebnisse).

F2. Aufbau eines *L-C*-Kreises. Periodische Anregung mit einer Rechteckspannung und Aufnahme der Schwingungskurve. Überprüfung der erwarteten funkti-

onalen Abhängigkeit und Berechnung der Eigenfrequenz und der Dämpfungskonstanten. Vergleich mit dem erwarteten Wert aus der Induktivität und dem Widerstand der Spule und der Kapazität des Kondensators. Themenbereich G (Wechselstromwiderstand und Wechselstromleistung):

G1. Bestimmung des Wechselstromwiderstands eines Kondensators in Abhängigkeit von der Frequenz. Überprüfung der funktionalen Abhängigkeit von der Frequenz und Berechnung der Kapazität des Kondensators.

G2. Bestimmung des Wechselstromwiderstandes einer Spule in Abhängigkeit von der Frequenz. Überprüfung der funktionalen Abhängigkeit von der Frequenz und Berechnung der Induktivität (Selbstinduktionskoeffizient) der Spule.

G3. Aufbau eines  $R$ - $C$ -Spannungsteilers (Hochpass/Tiefpass). Messung der Teilspannungen in Abhängigkeit von der Frequenz und Bestimmung der Kapazität des Kondensators aus der Übernahmefrequenz.

### Physikalische Grundlagen

Ausführliche Darstellungen zu den Themen bzw. Aufgaben des Versuchs sind in allen einführenden Lehrbüchern der Physik zu finden. Im Folgenden werden kurz die Zusammenhänge dargestellt, die für die Berechnungen zu den Aufgabenstellungen benötigt werden.

#### Stromleitung

Zu den Mechanismen der Stromleitung in Metallen und Halbleitern siehe die Darstellung *STROMLEITUNG* im allgemeinen Teil dieses Skripts.

#### Widerstand $R$

Der (Gleichstrom-) *Widerstand*  $R$  ist definiert als Verhältnis zwischen der Spannung  $U$  und der Ladungsstromstärke  $I$  an einem Leiter:

$$(1) \quad R = \frac{U}{I} \quad \left( = \frac{|U|}{|I|} \right)$$

Die Beziehung (1) ist eine Definitions- und Rechenbeziehung für die positiv definite Größe "Widerstand". Sie

ist keine Gesetzmäßigkeit, die Aussagen über die Größe oder funktionale Abhängigkeit von Widerständen trifft, wie z.B. das  $\uparrow$  *Ohmsche Gesetz*.

Für einen homogenen Leiter ist der Widerstand proportional zur Länge  $\ell$  und umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche  $A$ :

$$(2) \quad R = \rho \cdot \frac{\ell}{A}$$

Die (temperaturabhängige) Materialkonstante  $\rho$  heißt *spezifischer Widerstand*.

#### Ohmsches Gesetz

Das *Ohmsche Gesetz* bezeichnet die Modellvorstellung eines konstanten Widerstands:

$$(3) \quad R = \text{const}$$

Im Allgemeinen hängt der Widerstand in komplizierter Weise von der Spannung, dem Strom, der Temperatur oder anderen Parametern ab, und nur als Grenzfall folgen Metalle bei (nicht zu kleiner) und konstanter Temperatur dem Ohmschen Gesetz.

#### Kirchhoffsche Regeln

Ströme und Spannungen in verzweigten Stromkreisen werden durch die *Kirchhoffschen Gesetze* für die Elementarbestandteile *Knoten* und *Masche* eines Netzwerkes beschrieben:

In jedem Knoten verschwindet die Summe aller Ströme:

$$(3a) \quad \sum I_k = 0$$

In jeder *Masche* ist die Summe aller Spannungen gleich Null:

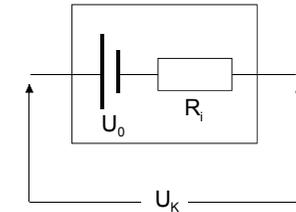
$$(3b) \quad \sum U_k = 0$$

Hieraus lassen sich die Regeln für Serien- und Parallelschaltungen von Widerständen herleiten.

#### Innenwiderstände von Spannungs- und Stromquellen

Bei der Berechnung von Schaltkreisen ist zu berücksichtigen, dass reale Spannungs- bzw. Stromquellen einen endlichen *Innenwiderstand* besitzen, an dem bei

Belastung ein Teil der Quellspannung  $U_0$  (*Urspannung, elektromotorische Kraft*) abfällt, so dass die Ausgangsspannung  $U_k$  (*Klemmenspannung*) in Abhängigkeit des Stroms abnimmt. Das tatsächliche Verhalten realer Bauteile oder Baugruppen muss in der Modellvorstellung durch ein geeignetes *Ersatzschaltbild* berücksichtigt werden:



#### Innenwiderstände von Messgeräten

Auch Messgeräte für Spannung und Strom haben einen eigenen (endlichen bzw. nicht verschwindenden) Innenwiderstand, der bei den Messungen unter Umständen berücksichtigt werden muss.

Bei klassischen Drehspulmessinstrumenten (Analogmultimetern) hängen die Innenwiderstände (Widerstand der Drehspule plus Vorwiderstände bei Spannungsmessung bzw. Nebenwiderstände [*Shunts*] bei Strommessung) von den jeweiligen Messbereichen ab.

Digitalmultimeter haben im Allgemeinen einen gleichbleibenden Innenwiderstand bei Spannungsmessung (Eingangswiderstand der Messschaltung; typisch  $10 \text{ M}\Omega$ ), aber unterschiedliche Innenwiderstände (Nebenwiderstände) bei Strommessung.

#### Brückenmethoden

Mit Brückenschaltungen können die Genauigkeit und Empfindlichkeit von Messungen gesteigert oder die Rückwirkung der Messung auf das zu untersuchende Objekt verringert werden (Wheatstonesche Brücke, Kompensationsbrücke). Im vorliegenden Fall soll ein sehr kleiner Widerstand, bei dem eine Stromspannungsmessung praktisch schwierig ist, mit Hilfe einer Brückenschaltung mit geeigneten Referenzwiderständen bestimmt werden (siehe Abbildung der Schaltung bei den *Hinweisen zur Versuchsdurchführung*).

#### Zusammenhänge zwischen Strom und Spannung für $R$ , $C$ und $L$

Aus den Definitionen von  $R$ ,  $C$  und  $L$  folgen als allgemeine Zusammenhänge zwischen Spannung und Strom:

$$(4) \quad U_R = - R \cdot I$$

$$(5) \quad I_C = - C \frac{dU}{dt}$$

$$(6) \quad U_L = - L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Die Vorzeichen ergeben sich unter zusätzlicher Berücksichtigung der Orientierungen der Größen, wobei "Ursache" und "Wirkung" entgegengerichtet sind (*Lenz'sche Regel*). Hinsichtlich der Vorzeichenkonvention eines positiven Stroms von Plus nach Minus "aus einer Quelle heraus" fließt am Widerstand ein negativer Strom von Minus nach Plus "in den Widerstand hinein" und ist mit einer proportionalen (Gegen-) Spannung verbunden (Spannungsabfall). Am Kondensator führt ein (negativer) Strom in den Kondensator "hinein" zu einem (Gegen-) Spannungsaufbau, und umgekehrt. An einer Spule verursacht eine Stromerhöhung eine induzierte (Gegen-) Spannung, und umgekehrt.

Dabei charakterisieren Widerstand  $R$ , Kapazität  $C$  und Selbstinduktionskoeffizient  $L$  modellmäßig ideale Widerstände, Kondensatoren und Spulen. Reale Bauteile verhalten sich nur näherungsweise wie  $R$ ,  $C$  und  $L$ , und insbesondere bei Spulen muss auch bei einfacher Betrachtung der Wicklungswiderstand und sonstige Wirkwiderstand durch ein *Ersatzschaltbild* mit einem zusätzlichen  $R$  berücksichtigt werden.

#### Impedanz (Wechselstromwiderstand)

Als *Impedanz*  $Z$  (Wechselstromwiderstand) für sinusförmige Spannungen bzw. Ströme ist das Verhältnis von Spannungs- zu Stromamplitude definiert:

$$(7) \quad Z \equiv \frac{U_0}{I_0}$$

#### Wechselstromleistung

Für den zeitlichen Mittelwert der Wechselstromleistung gilt:

$$(8) \quad P = U_0 \cdot I_0 \cdot \cos(U, I)$$

#### Darstellung der physikalischen Grundlagen

(zur Vorbereitung als Teil des Berichts): Kurze Beschreibung und Diskussion der gewählten Schaltungsbeispiele mit Angabe der benötigten Grundbeziehungen und Herleitung der Messbeziehungen.

#### Apparatur und Geräte

*Steckbrett* (Experimentier-Steckplatine). Verbindungskabel.

Spannungsquellen (Netzgerät, Funktionsgenerator).

Verschiedene Widerstände und Bauteile in Steckgehäusen, auf *Schaltbrettchen* oder in einem Temperaturbad.

Leuchtstofflampe ("Energiesparlampe") mit Anschlüssen zur Spannungs- und Strommessung.

(Digital-) Multimeter für unterschiedliche elektrische Messgrößen. Oszilloskop.

#### Versuchsdurchführung und Auswertung

Zur Versuchsdurchführung sind die ergänzenden Hinweise im Platzskript zu beachten! Machen Sie sich intensiv mit den Spannungsquellen und den Messgeräten vertraut! Beachten Sie gegebenenfalls die Innenwiderstände der Multimeter beim Aufbau der Schaltungen und bei der Auswertung der Messungen! Berücksichtigen Sie die Nenn-Fehlerangaben zu den Multimetern und zum Oszilloskop (im Platzskript)!

#### Die Grenzwerte für Strom und Spannung der Bauelementen sind einzuhalten!

Es ist unbedingt darauf zu achten, dass als Netzgerät die mit "Strombegrenzung 200 mA" bezeichneten Geräte verwendet werden. (An den Versuchsplätzen sind weitere, gleichartige Netzgeräte vorhanden, die diese zusätzliche Strombegrenzung nicht aufweisen, und Ströme bis zu 2,5 A liefern. Dabei besteht die Gefahr, dass durch unbeabsichtigte Fehlschaltungen Bauteile überlastet und zerstört werden.

#### Themenbereich A

##### Zu Aufgabe A1

Es ist ein fertig aufgebauter "Widerstandswürfel" vorhanden. Machen Sie bei der Berechnung des erwarteten Gesamtwiderstands von der Symmetrie der Schaltung Gebrauch.

##### Zu Aufgabe A2

Als Spannungsteiler wird ein 10-Gang-Wendelpotentiometer benutzt. Der Belastungswiderstand ist auf dem Schaltbrettchen mit den *Unbekannten Widerständen* vorhanden ( $\approx 200 \Omega$ ; der genaue Widerstandswert muss mit einem Multimeter gemessen werden).

#### Themenbereich B

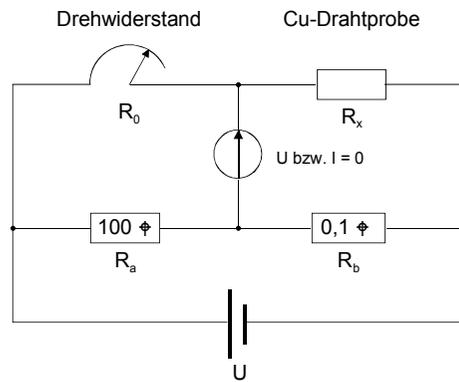
##### Zu Aufgaben B1 und B2

Nehmen Sie die Spannungs-Strom-Kennlinien einer 1,5-V-Batterie (Monozelle) und des Netzgerätes auf. Als Belastung sind fünf *Belastungswiderstände* ( $3,3 - 56 \Omega$ ) auf einem Schaltbrettchen vorhanden. Zur Messung der Kennlinie des Netzgerätes ist eine Leerlaufspannung von knapp unter 2 V günstig (zur optimalen Ausnutzung der Auflösung der Multimeter).

#### Themenbereich C

##### Zu Aufgabe C1:

Die Messbrücke wird mit einem festen Spannungsteiler in dem einen Brückenweig und der Kupfer-Drahtprobe und dem 10-Gang-Wendelpotentiometer ( $1 \text{ k}\Omega$ ) in dem anderen Brückenweig aufgebaut. Als Nullinstrument wird eines der Digitalmultimeter verwendet.



Welche Ströme oder Spannungen sind zu erwarten, wenn die Brücke nicht abgeglichen ist? Beachten Sie, dass wegen der niederohmigen Anordnung hohe Ströme das Potentiometer zerstören können!

Ermitteln Sie mit Hilfe des Ergebnisses den spezifischen Widerstand von Kupfer, und vergleichen Sie das Ergebnis mit Literaturangaben!

### Themenbereich D

#### Zu Aufgaben D1

Als Bauteile sind eine 24-V-Glühlampe und eine NTC-Widerstand (Negative-Temperature-Coefficient) auf einem Schaltbrettchen vorhanden. Denken Sie über einen geschickten Einsatz des Netzgerätes nach, falls sich bei dem NTC-Widerstand ein überraschender Ver-  
suchsablauf ergibt!

#### Zu Aufgaben D2

Zur Beobachtung der Temperaturabhängigkeit des (spezifischen) Widerstandes können Materialproben (Kupferdraht, Halbleitermaterial) in einem Wärmebad bis ca. 100 °C erhitzt und die Widerstandswerte (direkt mit einem Multimeter) gemessen werden.

Für Kupfer soll der lineare Temperaturkoeffizient des Widerstandes durch eine grafische Darstellung ermittelt werden. Für die Halbleiterprobe kann die Energielücke zwischen Valenz- und Leitungselektronen (Angabe in J und eV) durch entsprechende Auswertung einer einfachlogarithmischen Darstellung des Widerstandes über  $1/T$  bestimmt werden.

### Themenbereich F

#### Zu Aufgaben F1

Der  $R$ - $C$ -Kreis wird mit einem Kondensator (0,1  $\mu\text{F}$  / Kennzeichnung RCK), einem Widerstand (18  $\text{k}\Omega$ ) und dem Funktionsgenerator in Serie aufgebaut und mit einer Rechteckspannung periodisch ( $\approx 50$  Hz) angeregt. Der Strom  $I = f(t)$  kann als Spannungsabfall an dem Widerstand mit dem Oszilloskop beobachtet werden. Optimieren Sie die Einstellungen am Oszilloskop und protokollieren Sie eine Wertetabelle mit  $t$ - $U$ -Wertepaaren. Zur Auswertung wird die Messung geeignet linearisiert dargestellt.

Beobachten Sie zusätzlich bei einem kleinen Widerstand (1  $\text{k}\Omega$ ) den Strom im Kreis und bei sehr großem Widerstand (1  $\text{M}\Omega$ ) die Spannung am Kondensator und interpretieren Sie die Ergebnisse.

#### Zu Aufgabe F2

Der  $L$ - $C$ -Kreis wird mit einer Spule (Kennzeichnung ZAS), einem Kondensator (1  $\mu\text{F}$  / Kennzeichnung LCK), dem Funktionsgenerator und dem Oszilloskop zur Beobachtung parallelgeschaltet aufgebaut und mit einer Rechteckspannung periodisch angeregt ( $\approx 50$  Hz). Zur Auswertung der Periodendauer wird die Zeit für möglichst viele Perioden gemessen; zur Auswertung der Dämpfungskonstanten können die Amplitudenwerte durch Verschieben auf die feiner skalierte Mittellinie des Oszilloskop-Bildschirms genauer abgelesen werden.

Skizzieren Sie zusätzlich ein Bild des gesamten Spannungsverlaufs.

### Themenbereich G

#### Zu Aufgabe G1 und G2

Benutzen Sie den Kondensator von 1  $\mu\text{F}$  oder die Spule ZAS. Überlegen Sie eine geeignete Abstufung der Fre-

quenzen für die Messung der Frequenzabhängigkeit des Wechselstromwiderstandes des Kondensators. Werten Sie die Messungen qualitativ (erwarteter funktionaler Verlauf) und quantitativ (Parameter  $C$  bzw.  $L$ ) durch geeignete grafische Darstellungen aus.

#### Zu Aufgabe G3

Bauen Sie einen Spannungsteiler aus dem Kondensator 0,1  $\mu\text{F}$  und dem 18- $\text{k}\Omega$ -Widerstand auf, und messen Sie die Teilspannungen an  $R$  und  $C$  in Abhängigkeit von der Frequenz. Protokollieren Sie insbesondere auch das Wertepaar, bei dem die Spannungen an Widerstand und Kondensator gleich sind (Übernahmefrequenz). Stellen Sie die Messung doppellogarithmisch dar, und berechnen Sie die Kapazität des Kondensators aus dem Übernahmepunkt. Vergleichen Sie das Ergebnis für die Kapazität mit einer "Direktmessung" mit einem Multimeter.

### Ergänzende Fragen

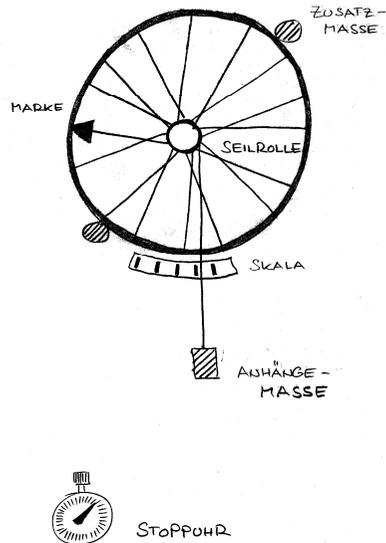
Wie groß ist die mittlere Driftgeschwindigkeit von Leitungselektronen, wenn ein Strom von 1 A durch einen Kupferdraht von 1 mm Durchmesser fließt (Leitungselektronendichte etwa 1 pro Atom, d.h.  $10^{29} \text{ m}^{-3}$ ). Wie groß ist im Vergleich dazu die mittlere thermische Geschwindigkeit der Leitungselektronen, wenn diese als klassisches Gas aufgefasst werden? (Durch das *Pauli-Verbot* der Mehrfachbesetzung der Zustände liegen die thermischen Geschwindigkeiten tatsächlich um eine Größenordnung über dieser Abschätzung).

### Anhang

Abbildungen zum Oszilloskop (siehe Folgeseiten).

GLEICHMÄSSIG BESCHLEUNIGTE  
DREHBEWEGUNG

GPI

Stichworte

Drehbewegungen starrer Körper.

Drehmoment; Trägheitsmoment, *Steinerscher Satz*.

Bewegungsgleichung.

Reibungskräfte.

Ziele des Versuchs

Untersuchung der Bewegungsgleichung für Drehbewegungen starrer Körper um eine feste Achse; Überprüfung des *Steinerschen Satzes*; Untersuchung von Reibungsbeiträgen.

Einführung in elementare Mess- und Auswertetechniken und in Fehlerrechnung.

Literatur

[1]: Kapitel 2.2, 2.3

[2]: Kapitel 10.2, 10.3

Aufgaben

Untersuchung gleichmäßig beschleunigter Drehbewegungen:

- Messung von Weg-Zeit-Abhängigkeiten,
- Messung von Drehmoment-Zeit-Abhängigkeiten und
- Messung der Reibungsverluste

für unterschiedliche Trägheitsmomente (mit und ohne Zusatzmassen).

1. Qualitative und quantitative Überprüfung des Bewegungsgesetzes. Messung der Zeit in Abhängigkeit des Drehwinkels (bei festem Drehmoment) und in Abhängigkeit des Drehmoments (bei festem Drehwinkel). Bestimmung der Trägheitsmomente (mit und ohne Zusatzmassen) des Rades aus den Messungen und Vergleich mit dem berechneten Wert aus dem *Steinerschen Satz*.
2. Diskussion von Reibungseinflüssen und Reibungsmodellen (Abhängigkeit von Reibungskräften bzw. Reibungsmomenten von den verschiedenen Bewegungsparametern) aus den Ergebnissen der Messungen.

Physikalische Grundlagen

Für Rotationsbewegungen starrer Körper um eine feste Achse gilt analog zur Bewegungsgleichung für Translationsbewegungen

$$(1) \quad \bar{M} = I \frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

mit dem Drehmoment  $M = r \times F$ , dem *Trägheitsmoment*  $I$  und der *Winkelgeschwindigkeit*  $\omega = d\phi/dt$ . Die allgemeine Formulierung von (1) lautet mit dem *Drehimpuls*  $L$ :

$$(2) \quad \bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

aus der für ein abgeschlossenes System ( $M = 0$ ) die *Drehimpulserhaltung* folgt. Das Trägheitsmoment ist definiert als:

$$(3) \quad I = \int_V r^2 dm$$

und lässt sich für homogene und symmetrische Körper durch eine geeignete Zerlegung in Volumenelemente  $dV$  und die Umformung  $dm = \sigma \cdot dV$  berechnen. Liegt die Drehachse im Abstand  $a$  vom Schwerpunkt, dann erhält man als Trägheitsmoment (*Steinerscher Satz*):

$$(4) \quad I = I_s + m a^2$$

wobei  $I_s$  das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich einer zur Drehachse parallelen Achse durch seinen Schwerpunkt ist.

Durch Integration der Bewegungsgleichung für ein konstantes Drehmoment mit den Anfangsbedingungen  $\omega_0$  und  $\phi_0$  folgt als Bewegungsgesetz für die Zeitabhängigkeit des Drehwinkels:

$$(5) \quad \phi = \frac{M}{2I} t^2 + \omega_0 t + \phi_0$$

Reibung

Reibung entsteht durch Wechselwirkungen in den mikroskopischen Grenz- bzw. "Kontakt"bereichen an Oberflächen oder im Innern von Materie (innere Reibung bei Flüssigkeiten). Die tatsächlichen Vorgänge sind oft kompliziert und analytisch schwer zu beschreiben und werden dann durch geeignete empirische Ansätze berücksichtigt (konstante *Haftreibung*, geschwindigkeitsproportionale Reibung, Abhängigkeit vom Quadrat der Geschwindigkeit, ...).

An den Fahrrad-Laufrädern des Versuchs tritt Lager- und Luftreibung auf, wobei die Einflüsse im Rahmen der gegebenen Messgenauigkeit (Ablesefehler bei den Drehwinkeln, subjektive Fehler bei der Zeitmessung mit Handstoppuhren) bei den kinematischen Daten an der Nachweisgrenze liegen und geeignete Mess- und Auswertemethoden herangezogen werden müssen.

Bei der einfachsten (aber unrealistischen?) Annahme eines konstanten *Reibungsmoments*  $M_R$  liegt eine Möglichkeit darin, das Drehmoment zu variieren und die Daten geeignet linearisiert aufzutragen, so dass ein zusätzlicher konstanter Anteil am Drehmoment als Achsenabschnitt erkannt werden kann.

Das Bewegungsgesetz (5) liefert (für festen Drehwinkel  $\phi_n$  und mit  $\omega_0 = \dot{\phi}_0 = 0$  als linearisierte Funktion  $M(1/t^2)$ :

$$(6) \quad M = M_r + 2 I \phi_n \frac{1}{t^2}$$

Sehr viel deutlicher wird der Reibungseinfluss an dem Energieverlust der Anhängemasse beim Wiederaufstieg nach Ablauf des Seils, wobei ohne Reibung die Ausgangshöhe wieder erreicht werden müsste. Aus den Messungen dieses Energieverlusts (der Höhendifferenz der Anhängemasse) in Abhängigkeit der übrigen Bewegungsdaten lassen sich dann genauere Aussagen über den Reibungsbeitrag herleiten.

### Darstellung der Physikalischen Grundlagen

(zur Vorbereitung als Teil des Berichts). Angabe und kurze Diskussion der Bewegungsgleichung und deren Lösung für den vorliegenden Fall (gleichmäßig beschleunigte Drehbewegungen starrer Körper um eine feste Achse).

Herleitung des *Steinerschen Satzes*. Berechnung des Trägheitsmomentes starrer Zylinder.

### Apparatur und Geräte

Drehkörper (Fahrrad-Laufrad mit einer Seilrolle auf der Drehachse; siehe Abbildung auf der Titelseite). Schnur, Anhängengewichte zur Ausübung konstanter Drehmomente. Zylindrische Zusatzmassen zur definierten Veränderung des Trägheitsmomentes. Satz Anhängengewichte; Waage.

Handstoppuhren (1/10 s).

Metallmaßstab, Schiebelehre.

### Versuchsdurchführung und Auswertung

#### Allgemeine Hinweise

Zum Ausgleich von Unwucht des Rades ist eine kleine Ausgleichsmasse in den Speichen angebracht. Noch verbleibende Unwucht ist gegebenenfalls durch geeignetes messtechnisches Vorgehen zu berücksichtigen (Messung für beide Drehrichtungen und Mittelwertbildung).

Für die Messungen mit Zusatzmassen ist auf die geometrisch richtige Befestigung der Zusatzmassen zu achten.

Gegebenenfalls ist bei den Messungen auch das Gewicht der Feder am Ende der Schnur und der Durchmesser der Schnur zu berücksichtigen. (Zur Wahl von Anzahl und Lage der Messpunkte siehe auch *GRAFISCHE DARSTELLUNGEN UND GRAFISCHE AUSWERTUNG VON FUNKTIONEN* in diesem Skript).

Die Markierungspfeile an den Rädern sind so angebracht, dass bei völlig abgewickelter Schnur (Umkehrpunkt des Anhängengewichts) der Pfeil auf die Null-Markierung der Skala zeigt. Bruchteile einer Umdrehung beim Rücklauf müssen geschätzt werden.

#### Zu Aufgabe 2

Es sind vier Messreihen

$$\begin{aligned} t(\phi; M, I_0), \\ t(\phi; M, I_0 + I_z), \\ t(M; \phi_n, I_0), \\ t(M; \phi_n, I_0 + I_z) \end{aligned}$$

aufzunehmen und durch linearisierte Darstellungen  $\phi$  gegen  $t^2$  bzw.  $M$  gegen  $1/t^2$  auszuwerten (Bestimmung der Trägheitsmomente aus den Anstiegen der erwarteten Geraden; Bestimmung eines konstanten Anteils am Reibungsmoment).

#### Zu Aufgabe 2

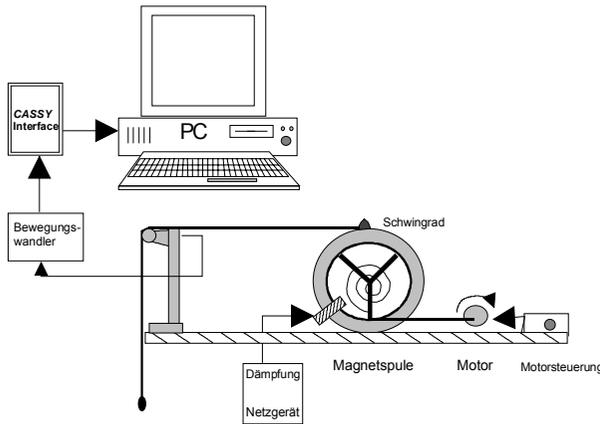
Berechnung der geleisteten Reibungsarbeit für die einzelnen Messungen aus der Höhendifferenz des Anhängengewichts nach dem Wiederaufstieg und Vergleich mit den übrigen Versuchsdaten (Gesamtgewicht des Rades bzw. Belastung der Drehachse; mittlere Geschwindigkeit). Diskussion der Ergebnisse im Rahmen einfacher Reibungsmodelle.

### Ergänzende Fragen

1. Die beschleunigt fallende Anhängemasse wirkt nicht mit ihrem vollen Gewicht auf die Rolle des Rades. Warum nicht? Wie lautet die vollständige Bewegungsgleichung und wie groß ist der maximal auftretenden Fehler abzuschätzen?
2. Wie kann an einem einfachen Beispiel eines starren Körpers (ideale Hantel) der Unterschied zwischen *statischer* und *dynamischer* Unwucht erklärt werden?
3. Wie ist die Umkehr der Anhängemasse bei der geleisteten Reibungsarbeit zu berücksichtigen?

## HARMONISCHE SCHWINGUNGEN

## GPI

**Stichworte**

Freie und freie gedämpfte Schwingungen

Erzwungene Schwingungen; Resonanzverhalten (Absorption) und Phasenverschiebung (Dispersion).

**Ziele des Versuchs**

Mathematische Behandlung erzwungener Schwingungen. Ansatz und stationäre Lösung der Schwingungsgleichung. Resonanzkurve; Abhängigkeit der Amplitude (Absorption) und der Phasenverschiebung von der Frequenz (Dispersion). Allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung und Betrachtung des *Einschwingvorgangs*.

Das Experiment hat das Ziel, an einem klassischen, exemplarischen Lehrmodell eines Oszillators (*Pohl-sches Rad*) das physikalische Verständnis für Schwingungen zu festigen und zu vertiefen.

**Literatur**

[1]: Kapitel 1.4, 4.1.2, 4.1.3

[2]: Kapitel 20.3, 20.4, 21.1, 21.2

**Aufgaben**

1. Untersuchung von freien gedämpften Schwingungen. Aufnahme der Auslenkung in Abhängigkeit von der Zeit. Bestimmung der Eigenfrequenz und der Dämpfungskonstanten des Systems.
2. Untersuchung von erzwungenen Schwingungen. Aufnahme der Auslenkung in Abhängigkeit von der Frequenz. Bestimmung der Eigenfrequenz und der Dämpfungskonstanten.
3. Qualitative Beobachtung der Phasenverschiebung zwischen Erreger und Oszillator in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz.
4. Beobachtung der Einschwingvorgänge für den Resonanzfall und für eine Anregungsfrequenz in der Nähe der Resonanz.

**Physikalische Grundlagen**

Schwingungsphänomene sind elementare Erscheinungsformen in der Natur. Der *harmonische Oszillator* ist die einfachste Modellvorstellung eines schwingungsfähigen Systems als Grundlage des Verständnisses aller Schwingungserscheinungen. Ein harmonischer Oszillator kann ohne größeren Aufwand mathematisch berechnet und experimentell in guter Näherung realisiert werden.

**Der harmonische Oszillator**

Voraussetzung für harmonische Schwingungen ist ein System, das zwei Freiheitsgrade für die Energie besitzt und mit einem linearen Kraftgesetz an eine Ruhelage gebunden ist (lineare rücktreibende Kraft oder Richtmoment). Die folgende Darstellung stellt die formale Behandlung des Problems mit der Lösung der Bewegungsgleichung in den Vordergrund, wobei ein eindimensionales System mit  $x(t)$  als Variable (Auslenkung) betrachtet werden soll. Die Herleitungen sind über diesen Fall hinaus repräsentativ für die Lösung analoger Differentialgleichungen, die sich für ähnliche Problemstellungen in anderen Teilbereichen der Physik ergeben (siehe Versuche *WECHSELSTROMKREISE* aus GP I und der nachfolgende Versuch *GEKOPPELTE SCHWINGUNGEN*).

**Freie, ungedämpfte Schwingungen**

Die Bewegungsgleichung für eine lineare Rückstellkraft lautet:

$$(1) \quad m \ddot{x} + D x = 0$$

Differentialgleichungen dieses Typs (*lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten*) werden mathematisch (am einfachsten) durch komplexe Exponentialfunktionen gelöst. Als Ansatz wird gewählt (wobei komplexe Größen im folgenden **fett** gedruckt werden):

$$(2) \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\omega t}$$

Setzt man diese Funktion und ihre zweite Ableitung in (1) ein, so erhält man die *charakteristische Gleichung* für die Frequenzen, für die der Ansatz eine Lösung darstellt:

$$(3) \quad \omega^2 - \frac{D}{m} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \pm \omega_0$$

Man erhält zwei *spezielle* Lösungen mit den Frequenzen  $+\omega_0$  und  $-\omega_0$ , die als *Eigenfrequenzen* des Systems bezeichnet werden.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung setzt sich aus der Summe der beiden speziellen Lösungen mit zwei beliebigen Konstanten zusammen, die ebenfalls komplex sein können:

$$(4) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{C}_1 e^{i\omega_0 t} + \mathbf{C}_2 e^{-i\omega_0 t}$$

Zum Schluss muss das mathematische Ergebnis wieder auf die physikalische Problemstellung zurückgeführt werden. Als physikalische Lösung entnimmt man der allgemeinen Lösungsmenge (4) die Funktionen, die für alle Zeiten  $t$  reell sind. Da die Exponentialausdrücke konjugiert komplex sind, wird  $\mathbf{x}(t)$  reell, wenn auch  $\mathbf{C}_1$  und  $\mathbf{C}_2$  konjugiert komplex sind. Schreibt man:

$$(5) \quad \mathbf{C}_1 = \frac{1}{2} A e^{i\beta} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_2 = \frac{1}{2} A e^{-i\beta} = \mathbf{C}_1^*$$

so folgt:

$$(6) \quad x(t) = \frac{1}{2} A \left[ e^{i(\omega_0 t + \beta)} + e^{-i(\omega_0 t + \beta)} \right]$$

bzw.

$$(7) \quad x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \beta)$$

Schreibt man die Konstanten in der Form

$$(8) \quad \mathbf{C}_1 = \frac{1}{2}(A_1 - i A_2) \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_2 = \frac{1}{2}(A_1 + i A_2) = \mathbf{C}_1^*$$

so erhält man:

$$(9) \quad x(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t$$

Beide Formeln (7) und (9) des Bewegungsgesetzes sind äquivalent. Die Konstanten  $A$  und  $\beta$  bzw.  $A_1$  und  $A_2$  werden durch die *Anfangsbedingungen*  $x(t=0) = x_0$  und  $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$  des Systems bestimmt und können durch sie dargestellt werden. Dabei nimmt die Lösung in der Form (9) die übersichtlichere Gestalt an.

### Freie, gedämpfte Schwingung

Unter Berücksichtigung einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft lautet die Bewegungsgleichung:

$$(10) \quad m \cdot \ddot{x} + k \dot{x} + D x = 0$$

Mit dem gleichen Lösungsansatz wie im ungedämpften Fall erhält man wieder zwei *partikuläre* Lösungen mit zwei Frequenzen. Der Ansatz (2) führt auf die charakteristische Gleichung:

$$(11) \quad \omega = i \frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} = i \delta \pm \omega_1$$

Mit den Abkürzungen:

$$(12) \quad \delta = \frac{k}{2m} \quad \text{und} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

lautet die allgemeine Lösung dann:

$$(13) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{C}_1 e^{-\delta t} e^{i\omega_1 t} + \mathbf{C}_2 e^{-\delta t} e^{-i\omega_1 t}$$

Die physikalisch sinnvollen Lösungen sind wieder durch die Forderung  $\mathbf{x}(t)$  reell für alle  $t$  gegeben. Da bei starker Dämpfung die Frequenz  $\omega_1$  in (12) imaginär werden kann, ist bei der Diskussion der Lösungen eine *Fallunterscheidung* erforderlich.

### $\delta < \omega_0$ : Schwingfall

Die Frequenz bleibt reell, und die Exponentialausdrücke mit  $i \omega_1 t$  somit konjugiert komplex, so dass auch  $\mathbf{C}_1$  und  $\mathbf{C}_2$  konjugiert komplex sein müssen. Die Lösung entwickelt sich bis auf den Faktor  $e^{-\delta t}$  genau wie im Fall der ungedämpften Schwingung:

$$(14) \quad x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \beta)$$

oder:

$$(15) \quad x(t) = e^{-\delta t} [A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t]$$

mit den Konstanten:

$$(16 \text{ a,b}) \quad A_1 = x_0 \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{\delta \cdot x_0 + \dot{x}_0}{\omega_1}$$

### $\delta > \omega_0$ : Kriechfall

Die Frequenz wird imaginär. Man kann  $\omega_0$  und  $\delta$  umstellen, und die imaginäre Einheit  $i$  vor den gesamten Ausdruck ziehen:

$$(17) \quad \omega = i \left[ \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right] = i \delta_{1,2}$$

Die Lösung lautet dann:

$$(18) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{C}_1 e^{-\delta t} + \mathbf{C}_2 e^{-\delta_2 t}$$

Da beide Exponentialanteile reell, aber verschieden groß sind, wird  $\mathbf{x}(t)$  nur dann reell für alle  $t$ , wenn auch die Konstanten  $\mathbf{C}_1$  und  $\mathbf{C}_2$  reell sind. Sie dienen wieder der Anpassung an die Anfangsbedingungen. Bei dieser sehr starken Dämpfung verliert die Bewegung ihren periodischen Charakter und geht in eine monotone, exponentielle Rückkehr in die Ruhelage über. Mit

wachsender Dämpfung klingt der Term mit  $\delta_1$  zwar schnell ab, die Zeitkonstante  $\delta_2$  wird dagegen aber kleiner und geht im Grenzfall unendlicher Dämpfung gegen Null. Die Reibungskräfte werden so groß, dass sie eine Bewegung kaum noch zulassen, und das System kriecht langsam in seine Ruhelage zurück.

### $\delta = \omega_0$ und $\omega_1 = 0$ Aperiodischer Grenzfall

Zwischen Schwing- und Kriechfall liegt als Sonderfall  $\delta = \omega_0$  mit  $\omega_1 = 0$ . Ein direktes Einsetzen von  $\omega_1 = 0$  in die Lösung (14) oder (15) des Schwingfalls liefert nur eine Beschreibung für die speziellen Anfangsbedingungen  $A$  bzw.  $A_1 \neq 0$  und  $\dot{x} = 0$ . Die allgemeine Lösung erhält man durch eine Grenzwertbetrachtung von (15) mit (16):

$$(19) \quad x(t) = e^{-\delta t} \left[ x_0 \cos \omega_1 t + (\delta x_0 + \dot{x}_0) \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right]$$

Im Grenzübergang wird:

$$(20) \quad \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} = t$$

und man erhält für den aperiodischen Grenzfall wieder eine nicht periodische Bewegung:

$$(21) \quad x(t) = x_0 e^{-\delta t} + (\delta x_0 + \dot{x}_0) t e^{-\delta t}$$

Der aperiodische Grenzfall sorgt für die schnellste Rückkehr eines schwingungsfähigen Systems in seine Ruhelage. Er hat messtechnische Bedeutung. Messinstrumente stellen oft schwingungsfähige Gebilde dar, die bei aperiodischer Dämpfung am schnellsten den Anzeigewert als Gleichgewichtswert bzw. Ruhelage annehmen.

### Erzwungene Schwingung

Das System soll zusätzlich durch eine äußere Kraft periodisch mit der Frequenz  $\Omega$  angeregt werden. Unter Vernachlässigung eines besonderen Zeitnullpunktes kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit ohne weitere Phasenkonstante schreiben:

$$(22) \quad m \ddot{x} + k \dot{x} + D x = F_0 \cos \Omega t$$

Die Differentialgleichung ist gegenüber den bisherigen Ansätzen *inhomogen* geworden. Die allgemeine Lösung von (22) setzt sich additiv aus der Lösung (14) bzw. (15) der zugehörigen homogenen Gleichung und einer beliebigen partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen. Als partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung wird angenommen, dass das System für sehr große Zeiten ebenfalls mit der äußeren Frequenz  $\Omega$  und mit konstanter Amplitude schwingt, wobei eine Phasenverschiebung gegenüber der Anregung auftritt. Der Lösungsansatz für diesen *stationären* Fall lautet damit:

$$(23) \quad x(t) = A_s \cos(\Omega t + \phi)$$

Grundsätzlich ist es möglich, die  $\cos$ -Funktion entsprechend (6) korrekt durch komplexe e-Funktionen auszudrücken und den obigen Ansatz auszurechnen. Man erhält die gleichen Ergebnisse jedoch einfacher mit einer allgemeinen komplexen Darstellung:

$$(24) \quad \mathbf{F}(t) = F_0 e^{i\Omega t}$$

und dem Lösungsansatz:

$$(25) \quad \mathbf{x}(t) = A_s e^{i(\Omega t + \phi)}$$

wobei der physikalische Sachverhalt durch den Realteil von (24) bzw. Betrag und Phase von (25) wiedergegeben wird. Durch Ableiten, Einsetzen und Durchkürzen von  $i\Omega$  erhält man:

$$(26) \quad (D - m\Omega^2 + ik\Omega) A_s e^{i\phi} = F_0$$

und:

$$(27) \quad A_s e^{i\phi} = \frac{F_0}{D - m\Omega^2 + ik\Omega}$$

bzw. mit den Bezeichnungen  $D/m = \omega_0^2$  und  $k/(2m) = \delta$ :

$$(28) \quad A_s e^{i\phi} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\delta\Omega}$$

Die Amplitude der stationären Lösung hängt demnach von der Anregungsfrequenz  $\Omega$  ab. Aus (28) ergeben sich entsprechend den Zusammenhängen zwischen

Betrag und Phase und Real- und Imaginärteil komplexer Zahlendarstellungen:

$$(29) \quad A_s = A_s(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \quad \text{und:}$$

$$(30) \quad \tan\phi = \frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Da in der allgemeinen Lösung der gedämpfte Term nach hinreichend langer Zeit praktisch abgeklungen ist (siehe Einschwingvorgang weiter unten), bezeichnet man die stationäre Lösung als erzwungene Schwingung im engeren Sinne.

**Resonanzkurve**

Der Verlauf der Amplitude in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz  $A(\Omega)$  (Resonanzkurve) und auch die Phasenverschiebung  $\delta(\Omega)$  hängen stark vom Grad der Dämpfung ab. In der Darstellung auf der folgenden Seite sind Beispiele der Verläufe wiedergegeben. Die Lage der Resonanzkurve wird durch die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems bestimmt, die Breite durch die Dämpfung.

$$\frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$$

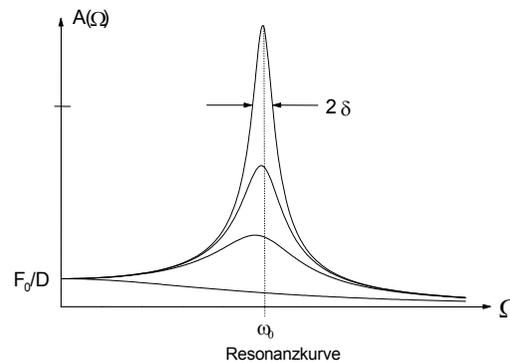


Abbildung: Resonanzkurve für Dämpfungsverhältnisse  $\delta/\omega_0 = 0,05; 0,1; 0,2$  und  $1$

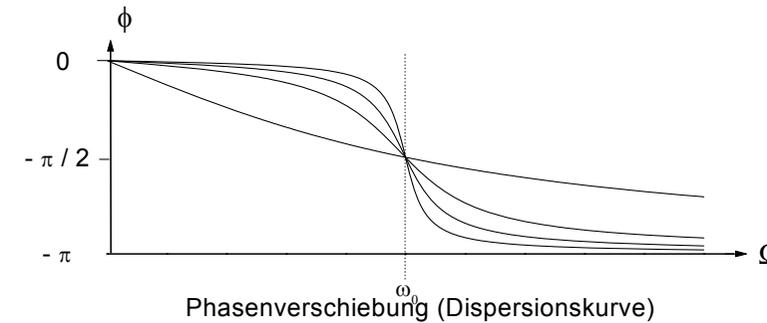


Abbildung: Phasenverschiebung (Dispersionskurve) für die gleichen Dämpfungsverhältnisse. Physikalisch lässt sich der Verlauf leicht nachvollziehen, mathematisch aus (30) nur unter Berücksichtigung der Eigenarten von Umkehrfunktionen.

Bei kleiner Dämpfung kann die Oszillatoramplitude sehr groß werden (Resonanzkatastrophe), wobei der Übergangsbereich der Phasenverschiebung sehr klein wird (Phasensprung).

Für kleine Abweichungen  $\omega_0 \approx \Omega$  und  $|\omega_0 - \Omega| = \Delta\Omega$  (Verstimmung), d.h. für vergleichsweise schmale Resonanzkurven bei kleiner Dämpfung, kann (29) näherungsweise umgeformt und vereinfacht werden:

$$(31) \quad \omega_0^2 - \Omega^2 \approx (\omega_0 + \Omega)(\omega_0 - \Omega) \approx 2 \omega_0 \Delta\Omega$$

$$(32) \quad A_s(\Delta\Omega) = \frac{F_0/m}{2 \delta \omega_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\Omega}{\delta}\right)^2}}$$

In dieser Näherung liegt das Maximum der Kurve bei  $\Omega = \omega_0$ , und die Amplitude erreicht den maximalen Wert:

$$(33) \quad A_{\Omega=\omega_0} = A_{\max} = \frac{F_0/m}{2 \delta \omega_0}$$

Insbesondere für die Stellen  $\Delta\Omega = \pm \delta$  wird:

$$(34) \quad A_{\Omega=\omega_0 \pm \delta} = \frac{F_0/m}{2 \delta \omega_0 \sqrt{2}} = \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Die Dämpfungskonstante kann dann aus der halben Breite der Kurve bei

$$A = A_{\max} / \sqrt{2} \quad \text{bestimmt werden.}$$

### Einschwingvorgang

Die allgemeine Lösung der erzwungenen Schwingung besteht aus der allgemeinen Lösung (z.B. 14) der homogenen Gleichung für den Schwingfall und der partikulären, reellen Lösung (25):

$$(35) \quad x(t) = A \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \beta) + A_s(\Omega) \cos(\Omega t + \phi)$$

Zu Beginn der Bewegung wird dem System sowohl der stationäre Term aufgeprägt als auch eine freie, gedämpfte Schwingung angeregt. Die Überlagerung beider Terme von (35) führt zu einem komplizierten Schwingungsverhalten, das als *Einschwingvorgang* bezeichnet wird. Übersichtliche Verhältnisse ergeben sich für den Fall kleiner Dämpfung ( $\delta \ll \omega_0$ ) und mit einer Erregerfrequenz nahe der Eigenfrequenz ( $\Omega \approx \omega_0$ ).

Wählt man Anfangsbedingungen  $x_0=0$  und  $\dot{x}=0$ , so ergibt eine Näherungsrechnung:

$$(36) \quad x(t) = A_s \left[ \cos(\Omega t + \phi) - e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_0 t + \beta) \right]$$

Die Überlagerung beider Schwingungen ergibt eine

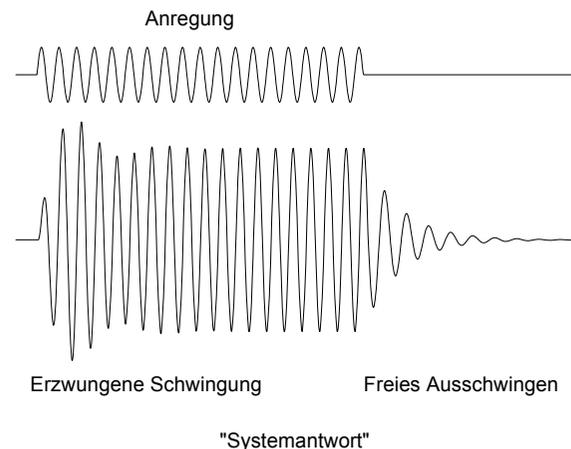
*Schwebung* mit der halben Differenzfrequenz  $|\Omega - \omega_0|/2$ , die jedoch mit  $e^{-\delta t}$  abklingt, wobei die Bewegung allmählich in den stationären Zustand übergeht.

Die größtmögliche Amplitude beim Einschwingvorgang wird erreicht, wenn durch den Unterschied der beiden Frequenzen die beiden cos-Terme ein entgegengesetztes Vorzeichen erhalten. Bei sehr kleiner Dämpfung kann die sich so ergebende *Einschaltspitze* dem Wert  $2A_s$  sehr nahe kommen, d.h. fast den doppelten Betrag der stationären Amplitude erreichen.

Für den Fall  $\Omega = \omega_0$  vereinfacht sich der Einschwingvorgang weiter. Die Phasenverschiebung  $\Phi$  wird dann  $\pi/2$ , und aus (36) folgt:

$$(37) \quad x(t) = A_s (1 - e^{-\delta t}) \sin \omega_0 t$$

Das System vollführt nach dem Einschalten eine Schwingung mit exponentiell ansteigender und gegen den Grenzwert  $A_s$  der stationären Schwingung strebender Amplitude. In der folgenden Abbildung sind die Verhältnisse des Einschwingvorgangs, der stationären Schwingung und des freien, gedämpften Ausschwingens zusammen mit der Erregerschwingung dargestellt.



### Darstellung der physikalischen Grundlagen

(zur Vorbereitung als Teil der Ausarbeitung): Kurze Beschreibung der Ansätze und der Ergebnisse der

Rechnungen und ausführliche physikalische Interpretation im Rahmen der Aufgabenstellung.

### Apparatur und Geräte

Durch eine Schneckenfeder elastisch an eine Ruhelage gebundenes Drehpendel, das durch eine Wirbelstrombremse zusätzlich gedämpft und über einen Motorantrieb mit Exzenter und Pleuelstange periodisch angeregt wird kann (*Pohlsches Rad*, siehe Skizze auf dem Titelblatt).

Bewegungsmesswandler: Zwischen einer Lichtschranke laufende kleine Seilrolle mit Löchern; Betriebsgerät, das die zeitabhängige Pulsfolge am Ausgang der Lichtschranke in auslenkungs-, geschwindigkeits- und beschleunigungsproportionale Analogsignale wandelt.

Rechnergestützte Datenakquisition (*CASSY-Lab-System*). Zusätzlich Handstoppuhren.

### Versuchsdurchführung und Auswertung

Das Pohlsche Rad kann frei (mit der Hand) ausgelenkt oder von einem Motor periodisch angeregt werden kann. Die Dämpfung lässt sich mit der Wirbelstrombremse an dem zugehörigen Netzgerät in sechs Stufen einstellen (0, 1, 2, 3, G=Grenzfall, K=Kriechfall).

Die Messungen zu den gestellten Aufgaben sollen bei Dämpfungsstufe 2 durchgeführt werden.

Zur Erfassung der Auslenkung ist ein Messwandler vorhanden. Ein Faden wird in einer Nut über der Peripherie des Drehpendels und dann über eine kleine Seilrolle geführt. Die Seilrolle trägt Löcher und läuft zwischen einer Lichtschranke. Am Ausgang der Lichtschranke entsteht eine Pulsfolge, deren Frequenz der Geschwindigkeit des Rades proportional ist. Die Pulsfolge wird elektronisch verarbeitet, und am Ausgang des zugehörigen Betriebsgerätes stehen analoge Spannungssignale für die Auslenkung ( $s$ ), die Geschwindigkeit ( $v$ ) und die Beschleunigung ( $a$ ) zur Verfügung. Geeignet für die Messungen ist das Geschwindigkeitssignal ( $v$ ). Dem Ausgangssignal ist dabei ein Gleichspannungsanteil überlagert, der insbesondere bei der späteren logarithmischen Darstellung der Daten stört. Dieser Gleichspannungsanteil kann durch Zwischenschalten eines Kondensators in die Verbindung des freien Potentials zwischen Messwandler und

CASSY-Lab-Systems unterdrückt werden.

**Man sollte bei der Auswertung darauf achten, ob man mit der Frequenz  $f$  oder mit der Kreisfrequenz**

rechnet.

### Zu Aufgabe 1

Die Messdaten (Auslenkung in Abhängigkeit von der Zeit) werden mit Hilfe des CASSY-Lab-Systems durch einen Rechner (PC) erfasst. Siehe dazu die allgemeine Hinweise zu CASSY im Skript und besondere Hinweise zur Benutzung des zugehörigen Programms im Platzskript.

### Zu Aufgaben 2 und 3

Das Drehpendel wird mit dem Motor periodisch ange-regt. Die Drehzahl des Motors ist elektronisch stufenlos regelbar.

Die Frequenz kann an einem 10-Gang-Wendelpotentiometer eingestellt werden, jedoch gibt die Anzeige des Potentiometers nur willkürliche Einheiten für die Frequenz an. Die tatsächlichen Werte werden mit dem CASSY-Lab-System-System bestimmt, wobei gleichzeitig die zeitlichen Konstanz der Amplituden überprüft werden kann (Ausklängen des Einschwingvorgangs).

Die Amplitudenwerte können direkt an der Skala des Drehpendels abgelesen oder auch mit dem Messwertfassungssystem bestimmt werden. Für jeden Messpunkt muss ausreichend lange gewartet werden, bis der Einschwingvorgang abgeklungen ist.

Die Resonanzkurve wird zunächst mit grob abgestuften Stützpunkten erfasst (etwa für alle vollen Umdrehungen der Einstellung der Frequenz am Potentiometer) und messbegleitend grafisch dargestellt (Amplitude über Frequenz). Anhand des damit gewonnenen groben Verlaufs der Kurve können geeignete Zwischenwerte zum genaueren Ausmessen der interessierenden Bereiche (Flanken, Maximum) bestimmt werden. Wegen der Steilheit der Kurve im Resonanzbereich ist es wichtig, bei der Einstellung der Potentiometerwerte das mechanische Spiel des Stellknopfs zu berücksichtigen.

Die Phasenverschiebung zwischen Anregung und der Schwingung des Rades kann anhand der Zeiger am Rad und an der Antriebsstange qualitativ beobachtet

werden. Die Beobachtungen sind mit der theoretischen Vorhersage zu vergleichen.

### Zu Aufgabe 4 (ohne Dämpfung durchführen)

Zur Beobachtung eines Einschwingvorganges außerhalb der Resonanz sollte die Frequenz nicht zu stark verstimmt werden, um das Auftreten der typischen Einschaltspitzen gut beobachten zu können. Die Auslenkungs-Zeit-Abhängigkeiten werden wieder mit dem CASSY-Lab-System registriert. Vergleichen Sie das exponentielle Verhalten beim Anschwingen und Abklingen im Falle außerresonanter Anregung mit dem erwarteten Wert.

### CASSY

### EINSCHALTEN

Spannungsversorgen SENSOR-CASSY (12V)

Rechner + Monitor einschalten

**CASSY-Lab** starten:

'Freischaltung': Schließen (ist bereits freigeschaltet)

'Einstellungen' (lässt sich auch mit '**F5**' aufrufen):

evtl. 'Anordnung aktualisieren'

aktiven Kanal (Ein-/Ausgang) anklicken (wird farbig)

'Einstellungen Sensoreingang' einstellen

z. B. Messbereich : -1V .. 1V

'Messparameter' einstellen

z.B. 'Triggerbedingung' (unterstützt die Vergleichbarkeit der verschiedenen Messungen)

z.B. 'wiederholende Messung'

**rechte Maustaste** (geht vor, während oder nach der Messung)

z.B. 'Zoomen' Bereich wird per Maus-markiertem Bereich gezoomt, danach 'Zoom ausschalten'

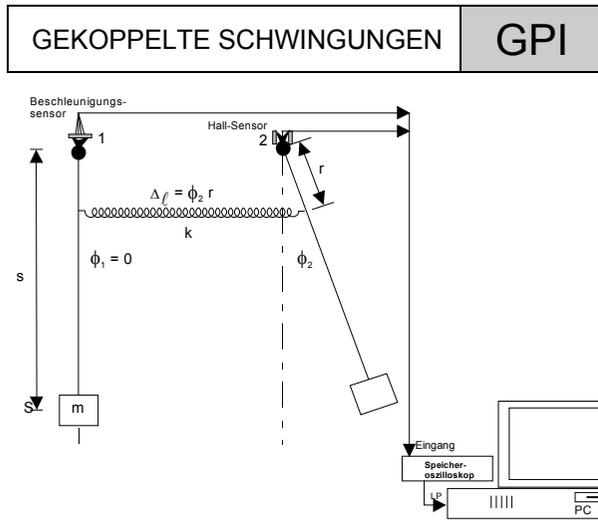
z.B. 'Achsenbelegung ändern': log- Darstellung,  $x^2$ -Darstellung, ...

z.B. 'Markierung setzen' und dann 'Differenz messen' (wird ganz unten links angezeigt)

.....  
**F9 startet und stoppt Messung** (wenn 'wiederholende Messung' eingestellt ist, wird neue Messung in neuer Farbe dargestellt)

linke Maustaste markiert Punkte auf Grafen; gleichzeitig werden Werte in Tabelle markiert; mit Skrollen (Pfeile auf/ab) läuft man in Grafen und Tabelle die nächsten Werte ab;

**Drucken:** „TTgelb“ ansteuern



### Stichworte

Gekoppelte Schwingungen, gekoppelte Pendel; Normalschwingungen (Grund- oder Fundamentalschwingungen); Schwebungen.

### Ziele des Versuchs

Exemplarischer Versuch zur quantitativen Auseinandersetzung mit gekoppelten Schwingungen. Gekoppelte Schwingungen bilden eine wichtige Erweiterung der Schwingungen isolierter Systeme. Sie stehen darüber hinaus in engem Zusammenhang mit Wellenphänomenen. Der Versuch hat als zusätzliches Ziel die beispielhafte Behandlung eines Eigenwertproblems.

### Literatur

[1]: Kapitel 4.1.1

[2]: Kapitel 22.1, 22.3

### Aufgaben

1. Abgleich der Einzelpendel (Schwependel) auf gleiche Schwingungszeit. Messung der Grundfrequenzen und Vergleich mit dem aus den Pendelabmessungen berechneten Wert.
2. Anregung der symmetrischen und der antisymmetrischen Normalschwingung und Messung Grund-

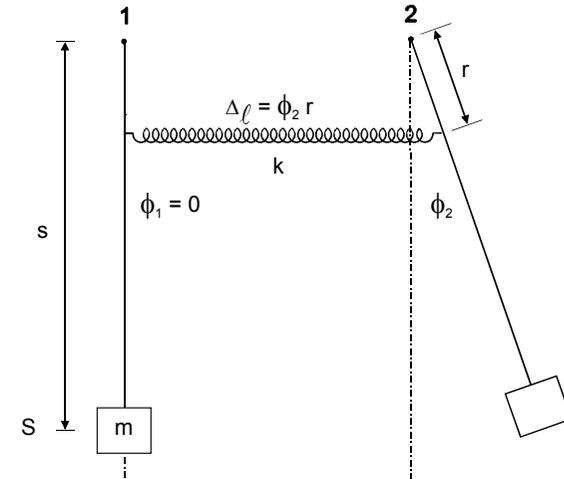
frequenzen in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke. Berechnung der Kopplungsgrade.

3. Anregung von Schwebungen für die verschiedenen Kopplungen und Berechnung der Kopplungsgrade aus den Schwebungsfrequenzen.
4. Berechnung der Federkonstanten der Koppelfeder aus einer grafischen Darstellung der Kopplungsgrade gegen das Quadrat der Koppelpunkte (Abstand der Koppelpunkte vom Drehpunkt der Pendel). Direkte Bestimmung der Federkonstanten der Koppelfeder aus Messung der Schwingungszeit von freien Federschwingungen mit einer Anhängemasse. Vergleich und Diskussion der Ergebnisse.

### Physikalische Grundlagen

Für die folgende, formale Behandlung des Problems sollen als einfachster Fall zwei gekoppelte Fadenpendel gleicher Länge und Masse untersucht werden (symmetrische Kopplung; siehe nebenstehende Abbildung). Die Struktur des Problems gekoppelter harmonischer Oszillatoren ist stets die gleiche, und die Ergebnisse dieses besonders einfachen Beispiels lassen sich ohne Schwierigkeiten auf andere Fälle übertragen.

Die Behandlung zweier gekoppelter Oszillatoren entspricht weitgehend der des einfachen, schwingungsfähigen Systems und bringt keine grundsätzlichen Schwierigkeiten mit sich. Die gesamte formale Durchführung und Interpretation ist jedoch wesentlich umfangreicher und birgt die Tendenz in sich, unübersichtlich zu werden. Die folgende Darstellung ist aus diesen Gründen bewusst knapp gehalten, um die wesentlichen Züge des Lösungsansatzes und der Lösungsdurchführung herauszuheben, und sie verzichtet bewusst auf eine detaillierte Erörterung sämtlicher Einzelfragen. Sie setzt gute Kenntnisse des einfachen harmonischen Oszillators voraus (siehe Versuch *HARMONISCHE SCHWINGUNGEN*).



### Bewegungsgleichung

Das Richtmoment  $M_g$  aufgrund der Schwerkraft (in der Näherung  $\sin \phi = \phi$ ), und das Koppelmoment  $M_k$  für Pendel 2 in der Ruhelage sind (Federkonstante  $D$ ; Koppelabstand  $r$ ):

$$(1a,b) \quad M_g = -m g s \phi_2 \quad \text{und} \quad M_k = -D r^2 \phi_2$$

Die (gekoppelten) Bewegungsgleichungen für zwei gleiche Pendel lauten dann mit dem Trägheitsmoment  $I$  der Pendel:

$$(2a) \quad \ddot{\phi}_1 + \frac{m g s}{I} \phi_1 + \frac{D r^2}{I} (\phi_1 - \phi_2) = 0$$

$$(2b) \quad \ddot{\phi}_2 + \frac{m g s}{I} \phi_2 + \frac{D r^2}{I} (\phi_2 - \phi_1) = 0$$

Es werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$(3a,b) \quad \omega_0^2 = \frac{m g s}{I} \quad \text{und} \quad f = \frac{D r^2}{m g s}$$

dabei ist  $\omega_0^2$  die Frequenz der einzelnen, freien Pendel. Das Verhältnis der Koppelgröße  $D r^2$  zur Richtgröße  $m g s$  heißt *Kopplungsgrad*  $f$ . Die (gekoppelten) Bewegungsgleichungen des Systems lauten damit:

$$(4a) \quad \ddot{\phi}_1 + (1+f)\omega_0^2 \phi_1 - f\omega_0^2 \phi_2 = 0$$

$$(4b) \quad \ddot{\phi}_2 - f\omega_0^2 \phi_1 + (1+f)\omega_0^2 \phi_2 = 0$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem, welches zweckmäßig mit dem Formalismus der Matrizen- und Vektorrechnung behandelt wird. In Matrixschreibweise erhält man (wobei im folgenden **Vektoren fett** und **Matrizen zusätzlich unterstrichen** geschrieben werden:

$$(5) \quad \ddot{\underline{\phi}} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\phi} = 0 \quad \text{mit}$$

$$(5a) \quad \underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} (1+f)\omega_0^2 & -f\omega_0^2 \\ -f\omega_0^2 & (1+f)\omega_0^2 \end{bmatrix}$$

Die homogene, lineare Differentialgleichung (5) mit konstanten Koeffizienten wird (analog dem Fall des einfachen harmonischen Oszillators) durch einen Ansatz mit komplexen Exponentialfunktionen gelöst (siehe Skript *HARMONISCHE SCHWINGUNGEN*):

$$(6) \quad \underline{\phi}(t) = \underline{\mathbf{Z}} e^{i\omega t}$$

wobei auch die Konstanten  $\underline{\mathbf{Z}}$  einen Vektor bilden. Als zweite Ableitung erhält man:

$$(7) \quad \ddot{\underline{\phi}} = -\omega^2 \underline{\mathbf{Z}} e^{i\omega t} = -\omega^2 \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\mathbf{Z}} e^{i\omega t}$$

mit der Einheitsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ . Aus der Bewegungsgleichung folgt damit:

$$(8) \quad (\underline{\underline{\Omega}} - \omega^2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}) \underline{\mathbf{Z}} = 0$$

Dieses (homogene, lineare) charakteristische Gleichungssystem hat nur dann eine nichttriviale Nulllösung ( $\underline{\mathbf{Z}}=0$ ), wenn die Determinante der Klammer verschwindet:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} (1+f)\omega_0^2 - \omega^2 & -f\omega_0^2 \\ -f\omega_0^2 & (1+f)\omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Die Gleichung (9) hat vier Lösungen (im allgemein Fall von  $N$  gekoppelten Oszillatoren  $2N$  Lösungen), die *Eigenwerte*  $\omega_j$ . Einsetzen der  $\omega_j$  in (8) liefert (bis auf einen frei wählbaren Faktor) die zugehörigen *Eigenvektoren*  $\underline{\mathbf{Z}}_j$ :

$$(10a) \quad \omega_1 = \omega_0 = \omega_s \quad \underline{\mathbf{Z}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Z}}_s$$

$$(10b) \quad \omega_2 = -\omega_0 = -\omega_s \quad \underline{\mathbf{Z}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Z}}_s$$

$$(10c) \quad \omega_3 = \omega_0 \sqrt{1+2f} = \omega_a \quad \underline{\mathbf{Z}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Z}}_a$$

$$(10d) \quad \omega_4 = -\omega_0 \sqrt{1+2f} = -\omega_a \quad \underline{\mathbf{Z}}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Z}}_a$$

Nach geeigneter Zusammenfassung zu reellwertigen Funktionen ergibt sich, dass die Amplitude  $\phi_i$  des  $i$ -ten Oszillators sich als Summe von  $N$  *Normalschwingungen* darstellen lässt:

$$(11) \quad \phi_i(t) = \sum_{j=1}^N A_{ij} \cos(\omega_j t + \delta_j)$$

Dabei ist zu beachten, dass die Phase  $\delta_0$  nicht von  $i$  abhängt, und dass die  $A_{ij}$  für festes  $j$  durch den Eigenvektor  $\underline{\mathbf{Z}}_j$  (bis auf einen gemeinsamen Faktor) festgelegt sind. Es gibt also genau  $2N$  freie Konstanten, die durch die Anfangsbedingungen  $\phi_i(0)$  und  $\dot{\phi}_i(0)$  bestimmt werden.

Speziell für zwei gleiche Oszillatoren ergeben sich als *Normalfrequenzen*:

$$(12a,b) \quad \omega_1 = \omega_s = \omega_0 \quad \text{und} \quad \omega_2 = \omega_a = \omega_0 \sqrt{1+2f}$$

Die zugehörigen Amplituden gehorchen den Bedingungen:

$$(13a) \quad A_{1s} = A_{2s} \quad (\text{symmetrische Schwingung})$$

$$(13b) \quad A_{1s} = -A_{2s} \quad (\text{antisymmetrische Schwingung})$$

Im allgemeinen Fall führt (11) zu komplizierten, nichtperiodischen Bewegungen (auch schon für  $N=2$ ), jedoch lassen sich durch geeignete Anfangsbedingungen die reinen Normalschwingungen anregen. Dabei schwingen dann alle Oszillatoren rein sinusförmig mit (bis auf das

Vorzeichen) gleicher Phase, und ein Energieaustausch zwischen den Systemen findet nicht statt.

### Schwebungen

Unter *Schwebungen* versteht man Phänomene, die bei der Überlagerung von Schwingungen mit vergleichbaren Frequenzen auftreten, d.h. für  $\Delta\omega \ll \omega$ . Ein Beispiel dafür sind gleiche, schwach gekoppelte Pendel. Mit Hilfe der Additionstheoreme für die Winkelfunktionen lässt sich Gleichung (11) als Produkt einer schnellen Schwingung mit langsam veränderlicher Amplitude darstellen:

$$(14a) \quad \phi_1(t) = \phi_0 \cos \Delta\omega t \cos \omega t = A_1(t) \cos \omega t$$

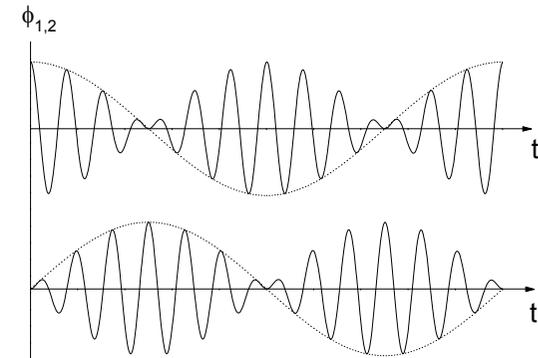
$$(14b) \quad \phi_2(t) = \phi_0 \sin \Delta\omega t \sin \omega t = A_1(t) \sin \omega t$$

mit den Frequenzen

$$(15a,b) \quad \omega = \frac{\omega_a + \omega_s}{2} \quad \text{und} \quad \Delta\omega = \frac{\omega_a - \omega_s}{2}$$

und den Anfangsbedingungen  $\phi_{10} = \phi_0$ ,  $\phi_{20} = 0$  und  $\dot{\phi}_{10} = \dot{\phi}_{20} = 0$ .

Bei der Schwebung wird die Energie abwechselnd und vollständig von einem Pendel auf das andere übertragen. An den Nulldurchgängen der langsam veränderlichen Funktion treten dabei Phasensprünge in den Bewegungen auf (siehe folgende Abbildung); an diesen Stellen kehrt sich die Richtung des Energieflusses zwischen den Oszillatoren um.



### Darstellung der physikalischen Grundlagen

(zur Vorbereitung als Teil der Ausarbeitung): Kurze Beschreibung der Ansätze und Ergebnisse der Rechnungen; insbesondere Berechnung der Frequenzen und relativen Amplituden der Normalschwingungen. Ausführliche physikalische Interpretation im Rahmen der Aufgabenstellung

### Apparatur und Geräte

Zwei gleiche Schwerependel; Koppelfeder.

Handstoppuhren. Hall-Effekt-Winkelaufnehmer mit Betriebsgerät; Y-t-Schreiber.

### Versuchsdurchführung und Auswertung

Die Messungen werden an zwei Schwerependeln durchgeführt, die durch eine Feder gekoppelt sind. Die Pendel bestehen aus Rundstäben, an deren Ende jeweils ein Gewicht ( $m_1$ ) aufgeschraubt ist (siehe folgende Skizze der Einzelpendel und Abbildung auf dem Titelblatt). Das Gewicht kann zur Justierung der Schwingungszeit verstellt werden. Zur Arretierung ist eine Kontermutter vorhanden ( $m_2$ ).

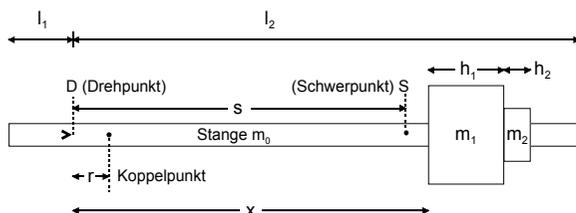
Die Abmessungen der Pendel sind:

Pendelstange  $\ell_1 = (0,026 \pm 0,01) \text{ m}$   
 $\ell_2 = (1,069 \pm 0,01) \text{ m}$   
 $m_0 = (1,048 \pm 0,002) \text{ kg}$

Pendelmasse  $h_1 = (0,0593 \pm 0,0002) \text{ m}$   
 $m_1 = (1,359 \pm 0,001) \text{ kg}$

Abstand  $x$  justierbar ( $x \approx 0,995 \text{ m}$ )

Kontermutter  $h_2 = (0,0180 \pm 0,0002) \text{ m}$   
 $m_2 = (0,074 \pm 0,001) \text{ kg}$



Das Trägheitsmoment einer linearen Masseverteilung der Länge  $\ell$  bezogen auf einen Drehpunkt an einem Ende der Masse ist:

$$(16) \quad I = \frac{1}{3} m \ell^2$$

Die Eigenfrequenzen und die Frequenzen der Normalschwingungen können mit den Handstoppuhren gemessen werden. Dabei ist auf eine hinreichende Genauigkeit zu achten.

Für die messtechnische Erfassung der Schwebungen (Aufnahme der Auslenkung in Abhängigkeit von der Zeit) ist ein kleiner Hall-Sensor innerhalb eines konstanten Magnetfeldes (Permanentmagnet) an der Drehachse eines der Pendel angebracht. Da die Hallspannung proportional zum Sinus des Winkels zwischen Magnetfeld und Probe ist, kann sie für kleine Amplituden als Signal für die Auslenkung herangezogen werden. Es ist ein kleines Betriebsgerät vorhanden, an dessen Ausgang das Signal zur Verfügung steht. Die Aufnahme des Signals geschieht mit einem Y-t-Schreiber. Bedienungshinweise zu den Geräten sind im Platzskript zu finden.

### Zu Aufgabe 1

Vor Beginn der Messungen müssen die Schwingungszeiten der Pendel so abgeglichen werden, dass der relative Unterschied  $\leq 10^{-3}$  ist.

Die Schwingungszeiten werden gemessen und zur Kontrolle mit dem aus den Abmessungen der Pendel berechneten Wert verglichen.

### Zu Aufgabe 2

Bei den Messungen ist sorgfältig darauf zu achten, dass die Amplituden jeweils nur so groß gewählt werden, dass sich die Koppelfeder auch bei vollständig angenäherter Bewegungsphase nicht entspannt. Die Abstände der Koppelpunkte von den Drehpunkten sind im Platzskript angegeben.

### Zu Aufgabe 3

Für drei Koppelpunkte werden Schwebungen angeregt und mit dem Y-t-Schreiber registriert.

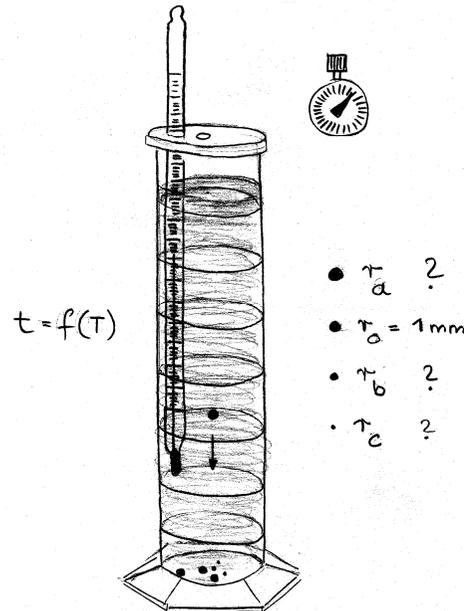
### Zu Aufgabe 4

Aus den gemessenen Frequenzen werden die Koppelgrade berechnet. Zur qualitativen Beurteilung der Messung (Vergleich Experiment-Theorie) und zur Auswertung werden die Koppelgrade gegen die Quadrate der Koppelpunkte (Abstände der Koppelpunkte von der Drehachse) grafisch dargestellt. Aus dem Anstieg der erwarteten Geraden kann mit dem Richtmoment der Pendel die Federkonstante der Koppelfeder ermittelt werden.

Es ist eine kleine Anhängemasse vorhanden, mit der die Koppelfeder zu Federschwingungen angeregt werden kann. Aus der Schwingungszeit wird wiederum die Federkonstante berechnet.

## KUGELFALLVISKOSIMETER

## GPI

Stichworte

Laminare Strömungen.

Innere Reibung, Viskosität; Strömungswiderstand, *Stokessches*- und *Hagen-Poiseuillesches* Gesetz.

Turbulente Strömungen und *Reynolds-Zahl*.

Ziele des Versuchs

Untersuchung von Strömungswiderstand, innerer Reibung, Viskosität und laminaren Strömungen um eine Kugel; *Stokessches Gesetz*. Temperaturabhängigkeit der Viskosität.

Literatur

[1]: Kapitel 3.3

[2]: Kapitel 16.2 mit 18.1

Aufgaben

- Messung der Fallgeschwindigkeit von Stahlkugeln mit bekanntem und unbekanntem Radius in Abhängigkeit von der Temperatur.
- Untersuchung der funktionalen Abhängigkeit der Viskosität des Glycerins von der Temperatur. Bestimmung der Viskosität des Glycerins bei 20 °C und Vergleich mit dem Literaturwert.
- Bestimmung der Radien der unbekanntem Stahlkugeln aus den Messungen und Vergleich mit einer direkten Messung mit einer Mikrometerschraube.
- Aufstellung und Lösung der Bewegungsgleichung mit den Randbedingungen  $v(t=0) = v_0 = 0$  und  $v(t \rightarrow \infty) = v_\infty$  und Abschätzung der Zeit bzw. Wegstrecke, ab der die Kugeln mit praktisch konstanter Geschwindigkeit sinken.

Physikalische Grundlagen

Flüssigkeiten (kontinuierliche Medien) können *laminar* oder *turbulent* strömen. Bei laminaren Strömungen werden die auftretenden Reibungskräfte durch die Viskosität  $\eta$  (Koeffizient der inneren Reibung) bestimmt. Als Beispiel gilt für die Reibungskraft  $R$  bei der Bewegung einer Kugel in einer viskosen Flüssigkeit das *Stokessche Gesetz*:

$$(1) \quad R = -6 \pi \eta r v$$

wobei  $r$  der Radius und  $v$  die Geschwindigkeit der Kugel sind.

Fällt eine Kugel unter Einfluss der Schwerkraft in einer Flüssigkeit, so greift entgegengerichtet zur Widerstandskraft die Schwerkraft  $G$  vermindert um den Auftrieb  $A$  an, und unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit stellt sich wegen der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Reibungskraft nach einiger Zeit ein Gleichgewicht ein, bei dem die Summe aller Kräfte verschwindet:

$$(2) \quad G + A + R = 0$$

Die Kugel fällt dann mit konstanter Geschwindigkeit, aus der die Viskosität berechnet werden kann.

Temperaturabhängigkeit

Die innere Reibung wird bei Flüssigkeiten durch intermolekulare Wechselwirkungen verursacht und nimmt mit steigender Temperatur ab. In vielen Fällen folgt sie einem funktionalen Verlauf der Form:

$$(3) \quad \eta(T) = A e^{\frac{B}{T}}$$

Darstellung der physikalischen Grundlagen

(zur Vorbereitung als Teil des Berichts): Neben der Messmethode (Messgleichungen) sollen die Themen innere Reibung und laminare Strömungen und die Definition der Viskosität kurz dargestellt werden.

Apparatur und Geräte

Standzylinder mit Ringmarken und Thermometer; gefüllt mit Glycerin (siehe Abbildung auf der Titelseite). Kühlschrank. Stahlkugeln verschiedener Größe. Pinzette. Papier und 2-Propanol zum Reinigen der Kugeln. Stoppuhr. Metallmaßstab. Mikrometerschraube.

Versuchsdurchführung und Auswertung

Die Messung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität wirft Probleme auf: Die Temperatur als Zustandsgröße setzt ein thermodynamisches Gleichgewicht voraus, das praktisch aber nur sehr aufwendig zu realisieren ist. Im Sinne eines Kompromisses zwischen Aufwand und Ergebnis ist folgender Versuchsaufbau vorgesehen:

Die Standzylinder sind in einem Kühlschrank vorhanden. Sie werden bei Versuchsbeginn der Raumtemperatur ausgesetzt und wärmen sich dabei auf, so dass die Temperatur veränderliche Werte annimmt. Diese Aufwärmung ist ein dynamischer Vorgang ohne thermodynamisches Gleichgewicht. Man kann jedoch näherungsweise voraussetzen, dass die systematische Verfälschung der Werte bei allen Messungen in etwa gleich ist, so dass der funktionale Verlauf der Viskosität in Abhängigkeit von der Temperatur dennoch gut beobachtet werden kann.

Der Versuchsablauf sieht etwa folgendermaßen aus: Die Standzylinder werden bei Versuchsbeginn aus dem Kühlschrank genommen. Dann werden während einer bestimmten Zeitspanne (etwa 1 Stunde), und damit über ein bestimmtes Temperaturintervall (etwa 6 bis 10 K), nacheinander und wiederholend die Fallzeiten für die verschiedenen Kugeln  $t(r_0)$ ,  $t(r_a)$ ,  $t(r_b)$ ,  $t(r_c)$ , und die zugehörige Temperaturen gemessen, wobei alle anderen Messumstände gleich bleiben müssen (Fallstrecke der Kugeln, Lage des Thermometers, etc). Bei der Fallstrecke ist die beschleunigte Anfangsphase der Kugeln zu beobachten und gegebenenfalls zu berücksichtigen. Zur Temperaturmessung wird empfohlen, Anfangs- und Endwert für jede Fallzeit zu protokollieren, und später für die Auswertung den Mittelwert heranzuziehen. Man erhält so ein Werteschema für die Fallzeiten in Abhängigkeit von der Temperatur und den vier Radien.

Jeder Versuch einer gleichmäßigen Temperierung (z.B. durch Umrühren des Glycerins) ist zwecklos und schafft Umstände, die eine weitere Versuchsdurchführung unmöglich machen (z.B. Luftblasen im Glycerin).

Das *Stokessche Gesetz* gilt streng nur für die Bewegung einer Kugel in einem unbegrenzt ausgedehnten Medium. In einem engen zylindrischen Rohr erhöht sich der Widerstand infolge der Randstörungen. Deshalb sollten die Kugeln möglichst zentral im Zylinder fallen. Außerdem muss die Messung ein genügendes Stück oberhalb des Bodens gestoppt werden.

Die Kugeln müssen vor Versuchsbeginn gut von anhaftendem, altem Glycerin befreit (gereinigt) werden (warm?). Sie können nach Versuchsende mit einem Magneten wieder aus den Standzylindern entfernt werden.

Zur Auswertung werden die Fallzeiten in Abhängigkeit von der Temperatur in einer geeigneten einfach-logarithmischen Darstellung aufgetragen. Zur Kontrolle der Messung empfiehlt es sich, diese Darstellung messbegleitend direkt während der Versuchsdurchführung anzufertigen. An der Ordinate kann später zusätzlich eine zweite Achse mit den konkreten Viskositätswerten eingezeichnet werden, die sich aus den Fallzeiten der bekannten Kugel ergeben.

Die Bestimmung der Radien der unbekannt Kugeln läuft auf eine Verhältnismessung der Fallzeiten zur

Kugel  $r_0$  heraus, sofern vorausgesetzt werden kann, dass alle anderen Messumstände gleich bleiben. Für die Viskosität ist dies experimentell nicht gegeben, da sich die Temperatur unbeeinflussbar ändert. Jedoch können aus der grafischen Darstellung durch Interpolation mit Hilfe von Ausgleichsgeraden Vergleichsdaten gewonnen werden.

#### Ergänzende Fragen

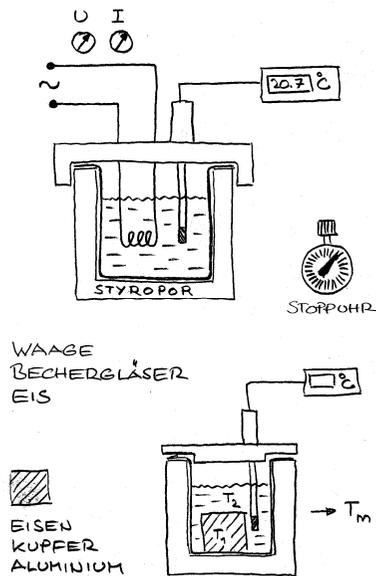
Der Übergang von laminaren zu turbulenten Strömungen wird durch die *Reynolds-Zahl*  $R_E$  beschrieben:

$$(4) \quad R_E = \frac{\rho r v}{\eta}$$

wobei  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit ist. In welchem Bereich liegen die *Reynolds-Zahlen* bei diesem Experiment? Ist damit sichergestellt, dass es sich um laminare Strömungen handelt?

## SPEZIFISCHE WÄRMEKAPAZITÄT

GPI

Stichworte

- Innere Energie und Wärme;
- 1. Hauptsatz der Wärmelehre. Wärmekapazität;
- *Du-Long-Petit'sche-Regel*.
- Phasenübergänge, Schmelzwärme.
- *Joulesche Wärme*

Ziele des Versuchs

Untersuchung der Wärmekapazität fester Körper und der Schmelzwärme des Wassers (Eises). Einführung in elementare Mess- und Auswertetechniken und Berücksichtigung systematischer Fehler.

Literatur

[1]: Kapitel 5.1, 5.2.3, 5.6.1, 5.6.2, 6.3.3

[2]: Kapitel 34.8 mit 34.15, 37.2

[3]: Kapitel 3.2.3

Aufgaben

1. Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität von Wasser.
2. Bestimmung der spezifischen und molaren Wärmekapazitäten von Aluminium, Eisen, Kupfer und Acrylglas (Plexiglas) und Vergleich mit der *Dulong-Petit'schen-Regel*.
3. Bestimmung der spezifischen Schmelzwärme von Eis.

Physikalische GrundlagenInnere Energie und Wärme

In einem allgemeinen physikalischen System ist die ungeordnete Energie (statistische Energie, Wärme) mit der geordneten Bindungsenergie gekoppelt und bildet die *innere Energie*  $U$  als Gesamtenergie des Systems, die sich wegen des unbestimmten Austauschs nicht weiter in Anteile zerlegen und abspalten lässt (wie Anteile potentieller Energie  $E_{pot}$  oder kinetischer Energie  $E_{kin}$  des Ladungs- oder Massenschwerpunkts des Systems). Das Wesen der statistischen Energie liegt darin, eine Ensembleeigenschaft der Teilchen und Quanten des Systems zu sein, wobei die mikroskopischen Zustände des Systems ständig fluktuieren und eine *Unbestimmtheit* des Systems erzeugen. Diese Unbestimmtheit ist physikalisch bedeutend und wird durch die *Entropie*  $S$  als wichtige Zustandsgröße des Systems ausgedrückt.

Die innere Energie steht in Zusammenhang mit den Zustandsgrößen des Systems. Sie kann durch *Arbeit*  $dW$  und *Wärme*  $dQ$  geändert werden.

Die Änderung der inneren Energie durch Arbeit ist an eine Volumenänderung gebunden:

$$(1) \quad dW = p dV$$

Wegen der oben geschilderten Kopplung mit geordneten Energieformen kann die Wärme als statistische Energieform grundsätzlich nicht als Teil des *Energiebestands* eines Systems, sondern nur als Austauschform  $dQ$  definiert werden, wobei ihr Wesen darin liegt, mit der Änderung oder dem Austausch von Entropie verbunden zu sein:

$$(2) \quad dQ = T dS$$

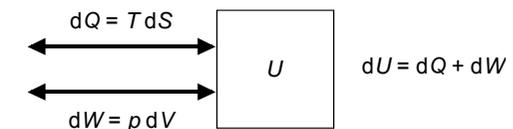
Die Temperatur stellt das *thermodynamische Potential* dar. Sie beschreibt die thermische Energie qualitativ als statistischer Parameter der Verteilung bzw. Besetzung der Zustände des Systems.

Die Wärme ist keine integrierbare Funktion eines Systems und es gibt keine Zustandsgröße "Q". Gleichung (2) stellt ihre Definition als Energieform dar, wobei sich als integrale Form bei einer abgeschlossenen Zustandsänderung eine gesamte, umgesetzte *Wärmemenge*  $\Delta Q$  ergibt.

Der *1. Hauptsatz der Wärmelehre* bezieht die innere Energie als Teil der Gesamtenergie und die Wärme als Austauschform von Energie in den Energieerhaltungssatz ein:

$$(3) \quad E_{\text{gesamt}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + U = \text{const} \quad \text{und}$$

$$(4) \quad dU = dQ + dW$$

Wärmekapazität

Wärme verursacht entweder eine Temperaturänderung oder eine Änderung der inneren Struktur des Systems (Phasenumwandlungen; s.u.). Für den ersten Fall bezeichnet man als *Wärmekapazität*  $C$  das Verhältnis von ausgetauschter Wärme und Temperaturänderung:

$$(5) \quad C = \frac{dQ}{dT}$$

Die Wärmekapazität hängt im Allgemeinen von der Temperatur ab, d.h.  $C = f(T)$ , und zusätzlich von den mit dem Prozess verbundenen Zustandsänderungen. Festkörper und Flüssigkeiten haben sehr kleine Ausdehnungskoeffizienten, so dass Druck und Volumen als konstant betrachtet und der Austausch von Arbeit bei einer begleitenden Volumenänderung vernachlässigt werden können.  $C$  ist dann unabhängig von der speziellen Zustandsänderung. Zusätzlich kann die Wärmekapazität bei genügend hohen Temperaturen auch als näherungsweise unabhängig von  $T$  angenommen werden:

$$(6) \quad C = \frac{dQ}{dT} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \text{const}$$

#### Temperatenausgleich

Bringt man zwei Körper unterschiedlicher Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  in thermischen Kontakt miteinander, so findet ein Wärmeaustausch statt, bis sich eine gemeinsame (Misch-) Temperatur  $T_m$  eingestellt hat. Wegen der Energieerhaltung muss dabei die Wärme, die der heißere Körper abgibt, gleich der Wärme sein, die der kältere Körper aufnimmt:

$$(7) \quad c_1 m_1 (T_m - T_1) = c_2 m_2 (T_2 - T_m).$$

#### Spezifische Wärmekapazität und Dulong-Petit'sche Regel

Die Wärmekapazität eines Systems ist mengenproportional, wobei der auf die Masse (Einheit kg) bezogene Wert die *spezifische Wärmekapazität*  $c$  und der auf die Stoffmenge  $\nu$  (Einheit Mol) bezogene Wert die *molare Wärmekapazität*  $C_M$  genannt werden:

$$(8) \quad C = c m = C_M \nu$$

Die molare Wärmekapazität beträgt bei genügend hohen Temperaturen (Raumtemperatur) für die meisten festen Stoffe übereinstimmend etwa 25 J/(mol K). Dies Verhalten wird als *Dulong-Petit'sche-Regel* bezeichnet.

#### Phasenumwandlungen

Phasenumwandlungen sind Veränderungen der inneren Struktur des Systems, bei denen sich bei gleichbleibender Temperatur die Entropie ändert und Unstetigkeitsstellen des Temperatur-Entropie-Zusammenhangs auftreten. Einfache Beispiele sind die Umwandlungen zwischen den Aggregatzuständen gasförmig, flüssig und fest.

Die an Phasenumwandlungspunkten zu- oder abgeführte Wärme verändert nicht die Temperatur des Systems (die Wärmekapazität ist scheinbar unendlich groß), sondern kompensiert die Energie durch die Veränderung der Ordnungs- und Bindungszustände des Systems. Sie wird als *latente* oder verborgene Wärme bezeichnet; wie die Schmelz- und Verdampfungswärmen, die bei Phasenumwandlungen in der Energiebilanz zu berücksichtigen sind.

#### Joulesche Wärme

Bei einem elektrischen Strom durch einen Leiter wird Energie als Wärme an den Leiter (und die weitere Umgebung) übertragen. Die umgesetzte Wärmemenge beträgt:

$$(9) \quad \Delta Q = U I \Delta t$$

wobei  $U$  die Spannung,  $I$  die Stromstärke und  $\Delta t$  das Zeitintervall sind.

#### Darstellung der physikalischen Grundlagen

(zur Vorbereitung als Teil des Berichts): Kurze Darstellung zur inneren Energie, Wärme und Wärmekapazität. Ergänzende Erklärung der Wärmeleitung für unterschiedliche Materialien. Kurze Darstellung der thermodynamischen Verhältnisse beim Schmelzen. Erläuterung der *Dulong-Petit'schen-Regel*. Aufstellung der Messgleichungen.

#### Apparatur und Geräte

Siehe Titelseite: Einfaches Kalorimeter aus einem Aluminiumgefäß mit Styropor-Isolierung; Probekörper (Aluminium, Eisen, Kupfer, Plexiglas)

Halbleiter-Widerstands-Digitalthermometer (1/10 K).

Heizeinsatz (Drahtwicklung). Netzgerät (Transformator mit stufenweise wählbarer Ausgangsspannung); zwei Digitalmultimeter für Strom- und Spannungsmessung; Verbindungskabel. Handstoppuhr(1/10s).

Verschiedene Messgefäße. Waage. Eis (Eisbox im Versuchsraum, Eismühle in der Treppenhalle).

#### Versuchsdurchführung und Auswertung

##### (Vorversuch zu Aufgabe 1 (Wasseräquivalent))

Da das Kalorimeter an allen Austauschprozessen beteiligt ist, muss dessen Wärmekapazität berücksichtigt und in einem Vorversuch ermittelt werden. Dazu wird kaltes Wasser ( $m_W \approx 300$  g,  $T_1 \approx 0$  °C) in das leere, auf Zimmertemperatur  $T_R$  befindliche Kalorimeter gefüllt. Aus der Temperaturerhöhung des Wassers auf den Wert  $T_m$  kann entsprechend (7) auf die Wärmekapazität des Kalorimeters  $C_K$  geschlossen werden:

$$(10) \quad C_K (T_R - T_m) = c_W m_W (T_m - T_1).$$

Da die spezifische Wärme  $c_W$  des Wassers zunächst nicht bekannt ist, berechnet man das Verhältnis  $C_K/c_W = m_A$ . Dieser Wert repräsentiert die Masse einer fiktiven Menge Wasser, die die gleiche Wärmekapazität wie das Kalorimeter besitzt; sie wird *Wasseräquivalent* des Kalorimeters genannt. Diese Größe lässt sich in den folgenden Messgleichungen einfach verwenden, indem man sie bei der jeweiligen Massenbilanz berücksichtigt:

$$(11) \quad m = m_W + m_A.$$

##### Zu Aufgabe 1 (Spezifische Wärme von Wasser)

Es wird die noch im Kalorimeter befindliche Wasserprobe vom Vorversuch benutzt. Durch eine kleine elektrische Heizung kann der Wasserprobe eine bestimmte Wärmemenge  $\Delta Q$  zugeführt werden. Für die Umwandlung elektrischer in thermische Energie (*Joulesche Wärme*, siehe *Versuch GLEICHSTROM/WECHSELSTROM*) gilt im Zeitintervall  $\Delta t$ :

$$(12) \quad \Delta Q = U I \Delta t,$$

wobei  $I$  die Stromstärke und  $U$  die Spannung am Widerstand ist. Die Temperaturerhöhung soll aus Genauigkeitsgründen mindestens 10 K betragen. Anfangs- und Endtemperatur sollen symmetrisch zur Zimmer-

temperatur liegen um systematische Fehler durch Wärmeaustausch mit der Umgebung wegen unzureichender thermischer Isolation des Kalorimeters möglichst gering zu halten.

### Messungen

Bei der Messung der spezifischen Wärmekapazität von Wasser (Wassermenge etwa 300 g) durch elektrische Wärmezufuhr soll das resultierende Temperaturintervall aus Genauigkeitsgründen etwa 10 K betragen und symmetrisch zur Raumtemperatur liegen. Hinweise zum elektrischen Aufbau sind im Platzskript angegeben. Zur Beurteilung der Messergebnisse ist es vorteilhaft, während der Heizphase die Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit (etwa alle Minute) zu protokollieren und messbegleitend kritisch zu betrachten.

### Zu Aufgabe 2

Die Messung der spezifischen Wärmekapazitäten der Metalle erfolgt durch Mischexperimente. Erst wird sehr kaltes Wasser in das Kalorimeter gefüllt (etwa 200 g; im Kalorimeter mit Eis nachkühlen; das Eis dann aber vollständig entfernen oder schmelzen lassen), dann werden die auf Raumtemperatur befindlichen Probekörper dazugegeben.

### Zu Aufgabe 3 (Schmelzwärme)

Die Schmelzwärme wird aus der Abkühlung bestimmt, die schmelzendes Eis bei einer Wasserprobe verursacht. Bei Aufstellung der Messgleichung müssen drei Anteile am Wärmeaustausch berücksichtigt werden: für das Eis die Aufnahme der Schmelzwärme und die anschließende Aufwärmung von  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  ( $= 0 \text{ °C}$ ) auf die Mischtemperatur  $T_m$  und für die Wasserprobe die Abkühlung auf die Mischtemperatur.

Als Wasserprobe wird wieder das noch im Kalorimeter befindliche warme Wasser aus dem Heizversuch benutzt. Die Eismasse sollte etwa 50 g betragen (zwei große Würfel). Das Eis aus der Kühlbox muss eine Weile in einem Wasserbad gehalten werden, um die Temperatur  $0 \text{ °C}$  anzunehmen.

### Ergänzende Fragen (optional)

1. Nach dem *Gleichverteilungssatz* beträgt die mittlere thermische Energie eines Teilchens  $\frac{1}{2} kT$  pro Freiheitsgrad (*Boltzmann-Konstante*  $k$ ). Wie viel Freiheitsgraden pro Atom entspricht der Wert der *Dulong-Petit'schen-Regel*?
2. Zu den systematischen Fehlern durch Wärmeleitung und Wärmestrahlung kommen bei einem nicht vollständig geschlossenen Kalorimeter zusätzliche durch Konvektion und Verdampfung oder Kondensation. Welche Argumente ergeben sich daraus für eine günstige Wahl der Temperaturintervalle bei den Experimenten?
3. Der thermische Ausgleichsvorgang innerhalb der Probekörper wird durch eine thermische Diffusionszeit  $\tau_D$  charakterisiert, die zu  $\rho \cdot c / \lambda$  proportional ist (Dichte  $\rho$ ; spezifische Wärmekapazität  $c$ ; Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ ). Die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  beträgt bei Raumtemperatur etwa  $400 \text{ W/(K}\cdot\text{m)}$  für Kupfer und  $0,2 \text{ W/(K}\cdot\text{m)}$  für Acrylglas. Wie groß ist das damit zu erwartende Verhältnis der Diffusionszeiten? Steht dies in Einklang mit den Beobachtungen, bzw. wie sind beobachtete Abweichungen zu erklären?

### Literaturwerte

Spezifische Wärmekapazität von Wasser bei  $20 \text{ °C}$ :

$$c_w = 4,1818 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Spezifische Schmelzwärme von Wasser:

$$\Gamma_E = 333,7 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Spezifische Verdampfungswärme von Wasser bei

$p = 1,0132 \text{ bar}$  und  $T = 373,15 \text{ K}$

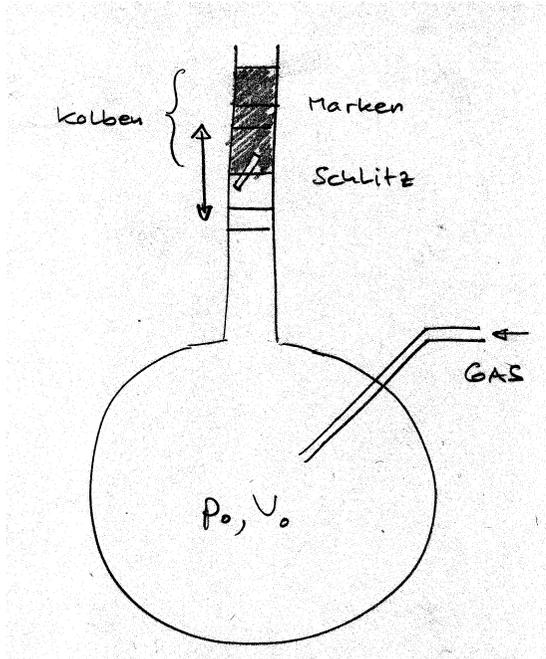
$$\Gamma_{v1} = 2255,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Spezifische Verdampfungswärme von Wasser bei

$p = 1,0132 \text{ bar}$  und  $T = 273,15 \text{ K}$

$$\Gamma_{v2} = 2500,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

(Quelle: KOHLRAUSCH; Praktische Physik 3; p.43 B.G.Teubner Stuttgart).



### Stichworte

Innere Energie; 1. Hauptsatz der Wärmelehre; Wärmekapazität. Allgemeine Zustandsgleichung des idealen Gases; **Poisson-Gleichungen** (Adiabatengleichungen). Kinetische Gastheorie, Freiheitsgrade. Harmonische Schwingungen.

### Ziele des Versuchs

Experimentell einfacher Versuch, dessen theoretische Grundlagen einen guten Einblick in die Thermodynamik und die kinetische Gastheorie vermitteln, und aus dessen Ergebnissen Rückschlüsse auf die molekulare Struktur der untersuchten Gase gezogen werden können.

### Literatur

[1]: Kapitel 5.1, 5.2, 1.4.3

[2]: Kapitel 34.14 mit 34.16, 35.1 mit 35.4

### Aufgaben

- Bestimmung des Verhältnisses der spezifischen Wärmen  $c_p/c_v = \kappa$  für Luft nach der Methode von **Clement-Desormes**.
- Bestimmung des Wertes für  $\kappa$  für ein einatomiges (Argon), ein zweiatomiges ( $N_2$ ) und ein dreiatomiges Gas ( $CO_2$ ) durch Messung der Eigenfrequenzen eines Gasoszillators.

Vergleich der Ergebnisse untereinander und mit den erwarteten Werten aus der kinetischen Gastheorie für ein ideales Gas.

### Physikalische Grundlagen

**Adiabate und reversible** Zustandsänderungen, die ohne Austausch von Energie mit der Umgebung und ohne Entropieerzeugung verlaufen, sind *isentrop*, d.h., die Entropie des Systems bleibt dabei konstant. Für ideale Gase werden sie durch die *Poisson-Gleichungen* beschrieben. Eine von ihnen lautet:

$$(1) \quad p \cdot V^\kappa = \text{const}$$

Weitere Formen für die anderen Variablenpaare, wie (2), können durch Einsetzen der allgemeinen Zustandsgleichung aus (1) hergeleitet werden. Die Größe  $\kappa = c_p/c_v$  als Verhältnis der spezifischen Wärmen des Gases bei konstantem Druck  $c_p$  und bei konstantem Volumen  $c_v$  heißt **Adiabatexponent**, **Isentropenindex** oder schlicht **Kappa**. Nach der kinetischen Gastheorie ist  $\kappa$  abhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade der Gasmoleküle (als Beispiel für alle einatomigen Gase ist  $\kappa = 5/3 \approx 1,67$ ).

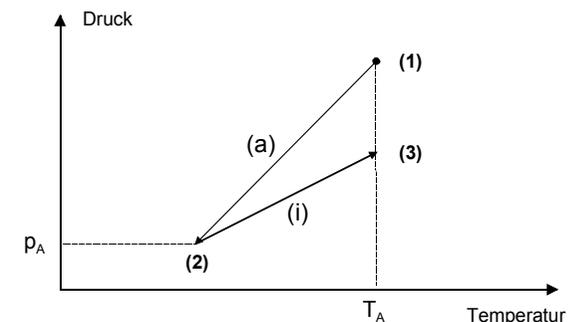
Eine experimentelle Bestimmung von  $\kappa$  durch Einzelmessungen von  $c_p$  und  $c_v$  wird dadurch erschwert, dass die Wärmekapazität des Gasbehälters im allgemeinen groß gegen die des eingeschlossenen Gases ist. Einen eleganten Ausweg bildet die Verwendung adiabater Zustandsänderungen, wie z.B. der Schallausbreitung

(siehe Versuch **SCHALLWELLEN**). Bei den hier verwendeten Verfahren nach *Flammersfeld-Rüchert* und *Clement-Desormes* wird die Adiabatiebedingung dadurch erfüllt, dass die Zustandsänderung in sehr kurzer Zeit erfolgt, so dass der Energieaustausch mit den Gefäßwänden praktisch vernachlässigbar ist.

### Methode nach Clement-Desormes

Die Untersuchung von Zustandsänderungen zur Bestimmung von  $\kappa$  erfordern die Messung von Temperaturen bzw. Temperaturdifferenzen. Die klassische Methode von *Clement-Desormes* beruht auf der Idee, die schwierige Messung kleiner Temperaturänderungen in einem Gas auf eine Druckmessung zurückzuführen, wobei das Gas selbst als Thermometersubstanz benutzt wird (Gasthermometer).

Ein Gasvolumen  $V$  wird in einem geeigneten Behälter so eingeschlossen, dass bei einer kurzzeitigen Zustandsänderung der Wärmeaustausch mit den Gefäßwänden vernachlässigbar ist, während längerer Zeiträume jedoch ein Wärme- und Temperaturengleich erfolgen kann. Die Differenz zwischen dem Gasdruck  $p$  innerhalb des Volumens und dem äußeren Luftdruck  $p_A$  wird mit einem offenen U-Rohr-Manometer durch die der Druckdifferenz proportionale Höhendifferenz  $\Delta h$  gemessen. Untersucht werden eine adiabate Zustandsänderung (a) von  $(p_1, T_1 = T_A)$  mit  $p_1 > p_A$  und  $T_A =$  Raumtemperatur auf  $(p_2 = p_A, T_2)$  und eine anschließende *isochore* ( $V = \text{const}$ ) Zustandsänderung (i) auf  $(p_3, T_3 = T_A)$ .



Zur Versuchsdurchführung wird zu Beginn in dem Gefäß ein leichter Überdruck erzeugt. Nach dem Temperaturengleich ( $T_1 = T_A$ ) wird ein Ventil zur Umgebung kurz geöffnet, wobei sich das Gas adiabatisch auf den Außendruck entspannt ( $p_2 = p_A$ ). Dabei verrichtet das ausströmende Gas Arbeit gegen den äußeren Luftdruck und verringert seine innere Energie und seine Temperatur, wobei die zugehörige Temperaturabnahme aus der *Poisson-Gleichung* berechnet werden kann. Anschließend erwärmt sich das Gas isochor wieder auf  $T_A$ , wobei der Druckanstieg auf  $p_3$  zur Bestimmung der Temperaturänderung mit Hilfe der allgemeinen Zustandsgleichung herangezogen werden kann.

Unter den gegebenen Umständen sind die Druck- und Temperaturänderungen klein gegen die Absolutwerte der Größen, und die Herleitung der Meßgleichung wird vergleichsweise einfach bei differentieller Betrachtung und Näherung  $dp \approx \Delta p$ . Für die adiabatische Zustandsänderung (**a**) ist die zugehörige *Poisson-Gleichung*:

$$(2) \quad p^{1-\kappa} T^\kappa = \text{const}$$

Durch Bildung des totalen Differentials und Umformung erhält man:

$$(3) \quad (1-\kappa) \frac{dp_{(a)}}{p} + \kappa \frac{dT_{(a)}}{T} = 0$$

Für die isochore Zustandsänderung (i) ergibt sich bei entsprechendem Vorgehen aus der allgemeinen Zustandsgleichung:

$$(4) \quad \frac{p}{T} = \text{const} \quad \text{und}$$

$$(5) \quad \frac{dp_{(i)}}{T} - p \frac{dT_{(i)}}{T^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dT_{(i)}}{T} = \frac{dp_{(i)}}{p}$$

Einsetzen von (5) in (3) mit  $dT_{(i)} = -dT_{(a)}$  ergibt:

$$(6) \quad (1-\kappa) \frac{dp_{(a)}}{p} - \kappa \frac{dp_{(i)}}{p} = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$(7) \quad \kappa = \frac{dp_{(a)}}{dp_{(a)} + dp_{(i)}} \approx \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_3}$$

wobei  $\Delta h_1$  und  $\Delta h_3$  die Höhendifferenzen am Manometer am Anfangszustand 1 und am Endzustand 3 sind.

Die Messmethode nach *Clement-Desormes* läuft auf eine überraschend einfache Messvorschrift (7) hinaus. Wegen der kleinen Druck- bzw. Höhendifferenzen und wegen systematischer Störeinflüsse (ungenügende Realisation von  $dQ = 0$ , Undichtigkeiten der Apparatur) ist die Genauigkeit der Methode im Allgemeinen aber nicht sehr hoch und (an der vorhandenen Apparatur) auch nicht ausreichend, um die  $\kappa$ -Werte für ein-, zwei- oder mehratomige Gase zu unterscheiden.

#### Methodenach Flammersfeld-Rüchert

Genauere Messungen erlauben auf *Rüchert* zurückgehende Schwingungsmethoden. Dazu wird ein Gasvolumen durch einen beweglichen Kolben abgeschlossen, der in einem Führungsrohr (Präzisions-Glasrohr) schwingen kann. Die Eigenfrequenz ergibt sich aus der durch Volumen und Druck des Gases bestimmten Rückstellkraft und der Masse des Kolbens und kann mit Hilfe der Adiabatangleichung berechnet werden. Die freie Schwingung klingt jedoch nach wenigen Perioden aus, so dass Messungen wiederum nicht mit ausreichender Genauigkeit durchführbar sind.

Abhilfe bietet eine Modifikation des Experiments nach *Flammersfeld*, bei der durch eine **parametrische Selbststeuerung** eine stationäre Schwingung erreicht wird. In der Nähe der Mittellage des Kolbens ist eine kleine Öffnung angebracht (Schrägschlitz, siehe Abbildung auf der Titelseite), und in das Volumen wird ein schwacher Gasstrom eingeleitet. Der Gasstrom sorgt für einen Ausgleich der durch die Undichtigkeit am Kolben und durch die Dämpfung entstehenden Gas- und Energieverluste (Anheben des Kolbens). Insbesondere bewirkt er eine erhebliche Verringerung der Reibung über eine Zentrierung des Kolbens (*Bernoulli-Kräfte*) durch Aufbau einer Gasschicht zwischen Kolben und Zylinderwand, die Voraussetzung dafür ist, dass die Eigenfrequenz des Schwingers durch die Selbststeuerung nur unwesentlich verändert wird. Die starke Dämpfung ohne den Gasstrom kann sehr deutlich an der praktisch sofort ausklingenden Schwingung bei Abstellen des Gasstroms beobachtet werden.

Eine genaue Betrachtung zeigt eine prinzipiell recht komplizierte Bewegung. Befindet sich der Kolben unterhalb der Öffnung, wird die Schwingung dadurch ver-

zerrt, dass der Druck zusätzlich zu der adiabatischen Kompression noch durch die Gaszufuhr laufend erhöht wird. Die Bewegung des Kolbens oberhalb der Öffnung wird, im Grenzfall eines sehr großen Loches, durch einen freien Fall mit starker Reibung beschrieben. Die überraschend guten Ergebnisse für  $\kappa$  im Vergleich zu den erwarteten bzw. Literaturwerten (Test durch Referenzmessungen) zeigen jedoch, dass die Störungen aufgrund der verringerten Reibung insgesamt klein bleiben und die Eigenfrequenz tatsächlich wenig beeinflussen.

Bei der folgenden Herleitung der Schwingungsfrequenz sind  $dx$  und  $dF$  Auslenkung und Kraft auf den Kolben in Bezug auf die Ruhelage,  $S$  und  $m$  die Querschnittsfläche und die Masse des Kolbens und  $V$  und  $p$  Volumen und Druck des abgeschlossenen Gasvolumens. Durch Bildung des totalen Differentials folgt aus (1):

$$(8) \quad \frac{dp}{p} + \kappa \frac{dV}{V} = 0$$

Als Rückstellkonstante ergibt sich:

$$(9) \quad D = -\frac{dF}{dx} = -\frac{S dp}{dx} = \kappa \frac{p S^2}{V}$$

Damit folgt als Eigenfrequenz:

$$(10) \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m} = \kappa \frac{p S^2}{m V} \quad \text{und}$$

$$(11) \quad \kappa = \frac{4 \pi^2}{\tau^2} \frac{m V}{p S^2}$$

wenn  $\tau$  die beobachtete Periodendauer ist.

#### Darstellung der physikalischen Grundlagen

(zur Vorbereitung als Teil des Berichts): Kurze Definition der spezifischen bzw. molaren Wärmekapazitäten eines idealen Gases unter Berücksichtigung der jeweiligen Zustandsänderungen. Herleitung der Abhängigkeit von  $\kappa$  von den Freiheitsgraden der Atome bzw. Moleküle.

Herleitung der Adiabatengleichungen (**Poisson-Gleichungen**).

#### Apparatur und Geräte

##### Apparatur nach **Clement-Desormes**

Große, isolierte Glasflasche mit einem Ein-/Auslassventil und einem Flüssigkeitsmanometer zum Ablesen der Druckdifferenzen zum Außendruck. Als Manometerflüssigkeit wird ein angefärbtes Äthanol-Wasser-Gemisch verwendet. Der Luftdruck in der Flasche kann durch ein kleines Handgebläse (Gummiballpumpe) gegenüber dem Außendruck erhöht werden.

##### Apparatur nach **Flammersfeld**

Glaskolben mit aufgesetztem Präzisions-Glaszylinder und Kunststoffkolben. Argon, Stickstoff und Kohlendioxid in Stahlflaschen. Lichtschranke mit Zähler. Elektronische Handstoppuhr (1/100 s). Barometer.

**ACHTUNG:** Bitte gehen Sie sorgfältig mit den Apparaturen um! Die Glasapparaturen sind bruchempfindlich, wobei insbesondere das Schlitzventil bei den Gasoszillatoren wie eine Sollbruchstelle wirkt.

**HINWEIS:** Stahl-Gasflaschen unter hohem Druck sind grundsätzlich Gefahrenträger, die Vorsicht und Sorgfalt im Umgang erfordern. Bedienung der Gasflaschen nur nach Einweisung durch den Tutor! Zur Inbetriebnahme der Apparaturen unbedingt Hinweise im Platzskript beachten!

##### Messung nach **Clement-Desormes**

Mit der Gummiballpumpe wird ein Überdruck  $\Delta h_1$  von 80-100 mmH<sub>2</sub>O-Säule erzeugt. Nach der Druckerhöhung muss abgewartet werden, bis sich die Temperatur des Gases wieder an  $T_1$  = Raumtemperatur angeglichen und der Überdruck stabilisiert haben. Anschließend wird der Hahn der Flasche zur (adiabaten) Entspannung kurz geöffnet. Die Öffnungszeit muss geeignet gewählt werden (etwa 1 s). Sowohl eine zu kurze als auch eine zu lange Öffnungszeit verfälschen das Ergebnis systematisch. Danach wird der (isochore) Druckanstieg beobachtet, und das Maximum als Messergebnis  $\Delta h_3$  protokolliert. Die Messung ist zur Kontrolle und zur Fehlerabschätzung zu wiederholen.

Es ist nur eine Apparatur vorhanden, die zwischen den Arbeitsgruppen entsprechend getauscht werden muss.

##### Messungen nach **Flammersfeld**

Zur Messung der Periodendauer sind eine Lichtschranke mit Zähler und eine Handstoppuhr vorhanden, mit der Perioden von  $100 \tau$  gemessen werden sollen (Serien von wenigstens 10 Messungen für die unterschiedlichen Gase).

Die Messung des Luftdrucks erfolgt mit einem im Arbeitsraum vorhandenen Barometer. Die apparativen Daten (Arbeitsvolumen, Kolbenmasse, Kolbendurchmesser) sind im Platzskript angegeben.

Es gibt drei Aufbauten, je eine für die Gase Argon, Stickstoff und Kohlendioxid. Durch zyklisches Tauschen kann jede Gruppe an jeder Apparatur arbeiten.

<b>SCHALLWELLEN</b>	<b>GPI</b>
---------------------	------------

Stichworte

Schallwellen; Schallausbreitung in Gasen und Festkörpern, Schallgeschwindigkeit. Stehende Wellen.

Ziele des Versuchs

Untersuchung der Schallausbreitung in Gasen (Luft) und Festkörpern. Zusammenhang zwischen Schallausbreitung und Materialkonstanten.

Messtechnische Erfassung transienter und periodischer Vorgänge und rechnergestütztes Experimentieren.

Literatur

[1]: Kapitel 4.2, 4.4, 4.5

[3]: 23.4, 24.3

Aufgaben

1. Messung der Schallgeschwindigkeit in Luft durch Laufzeitmessung.
2. Beobachtung der Resonanzen einer Luftsäule mit abgeschlossenem bzw. offenem Ende durch Variation der Anregungsfrequenz. Berechnung der Schallgeschwindigkeit und des Verhältnisses der spezifischen Wärmen  $c_p/c_v = \kappa$  von Luft (Isentropenindex, Adiabatenkoeffizient).
3. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Metallen aus der Laufzeit bzw. der Grundschwingungsfrequenz für zwei verschiedene Einspannungen des Stabes. Berechnung des Elastizitätsmoduls des Metalls.

Physikalische GrundlagenSchallwellen und Ausbreitungsgeschwindigkeit

In ausgedehnten, elastischen Medien führt eine zunächst lokale Erregung ("Störung", Auslenkung aus der Ruhelage, Druckschwankung) über die elastischen Kräfte zu einer Beeinflussung benachbarter Volumenelemente. So entsteht aus der Anregung eine Welle, die

sich räumlich ausbreitet (*Schallwelle*). Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  (Phasengeschwindigkeit, Schallgeschwindigkeit) wird dabei bestimmt durch die Rückstellkräfte (Rückstellkonstante  $D$ ) und durch die Trägheit der zu beschleunigenden Masse (Dichte  $\rho$ ).

$$(1) \quad c = \sqrt{\frac{D}{\rho}}$$

In einem Festkörper, wo jedes Volumenelement eine definierte Ruhelage besitzt, können sich longitudinale *Dichtewellen* oder transversale *Scherwellen* ausbilden, wobei die Rückstellkonstanten durch den Elastizitätsmodul  $E$  bzw. den Schermodul  $G$  gegeben sind.

In Gasen und Flüssigkeiten gibt es nur Dichtewellen (*Druckwellen*), und die Rückstellkonstante ist gleich dem Kompressionsmodul  $K$ .

Bei Gasen findet wegen den vergleichsweise kurzen Periodendauern von Schallschwingungen und der schlechten Wärmeleitfähigkeit praktisch kein Energieaustausch zwischen den einzelnen Volumenelementen statt, so dass für die Zustandsänderungen die Adiabatangleichungen (*Poisson-Gleichungen*) gelten. Aus der *Poisson-Gleichung*  $p(V;\kappa)$  folgt durch Ableiten für den Kompressionsmodul  $K$ :

$$(2) \quad p V^\kappa = \text{const}$$

und

$$(3) \quad K = V \frac{dp}{dV} = -\kappa p$$

wobei  $\kappa$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen  $c_p/c_v$  ist (*Isentropenindex* oder Adiabatenkoeffizient). Als Schallgeschwindigkeit erhält man damit:

$$(4) \quad c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = c(T)$$

Die Schallgeschwindigkeit ist unabhängig vom Druck, da Trägheits- und Rückstellgröße (Dichte und Kompressibilität) in gleicher Weise vom Druck abhängen. Sie ist aber temperaturabhängig wegen der zusätzlichen Temperaturabhängigkeit der Dichte.

Stehende Wellen

In einem begrenzten Volumen tritt durch Reflexion und Interferenz eine Folge (Ordnungszahl  $n$ ) stationärer Schwingungszustände auf (*stehende Wellen*), wenn die Wellenlänge  $\lambda$  in einem bestimmten Verhältnis zur Resonatorlänge  $\ell$  steht.

Für einen einseitig abgeschlossenen Resonator gilt:

$$(5a) \quad \ell = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$$

Für einen beidseitig abgeschlossenen Resonator:

$$(5b) \quad \ell = n \frac{\lambda}{2}$$

Bei bekannter Wellenlänge und Frequenz kann die Schallgeschwindigkeit dann mit der Fundamentalbeziehung für Wellen berechnet werden:

$$(6) \quad c = \lambda \nu$$

Die Resonanzen stellen die möglichen *Anregungszustände* des Systems dar, in die hinein auch bei einer impulsförmigen Anregung die Anregungsenergie übertragen wird. Eine Stoßanregung wird zunächst als Stoßwelle in dem Resonator hin- und herlaufen. Im Bild der Fourierzerlegung besteht sie jedoch aus einem ganzen Spektrum von Anregungsfrequenzen, wobei die unpassenden Frequenzen und die resonanten Oberschwingungen wegen der höheren Auslenkungsgeschwindigkeiten stärker gedämpft werden, so dass nach genügend langer Zeit allein die sinusförmige Grundschwingung übrig bleibt.

Durch zusätzliche Einspannung des Stabes erzeugt man zusätzliche Dämpfung für alle Eigenschwingungen, die an den Einspannstellen keine Schwingungsknoten haben. So kann man durch Einspannung an den Knoten der ersten Oberwelle erzwingen, dass asymptotisch die erste Oberwelle übrig bleibt.

Zu Aufgabe 2 können durch Wahl des Beobachtungszeitpunktes (Zeitfenster) das unterschiedliche Verhalten untersucht und beide Grenzfälle (Pulsausbreitung, Schwingungszustand) beobachtet werden. Kurz nach der Stoßanregung treten scharfe Impulse auf, deren Laufzeit gemessen werden kann. Einige Zeit nach der Anregung (hier: einige Sekunden) kann dann die sich ausbildende Grundschwingung beobachtet werden.

### Darstellung der physikalischen Grundlagen

(zur Vorbereitung als Teil des Berichts): Kurze Darstellung der Schallausbreitung in Gasen. Berechnung der Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit. Diskussion stehender Wellen und Resonanzen in begrenzten Medien bei unterschiedlichen Randbedingungen (Luftsäulen, unterschiedlich eingespannte Stäbe).

### Apparatur und Geräte

Mikrofon; Schallerzeuger (Patsche). Metallmaßstab.

Resonanzrohr fester Länge mit Lautsprecher und Mikrofon. Funktionsgenerator mit Zähler. Multimeter zur Messung des Mikrofon-Ausgangssignals.

Metallstab mit zwei Einspannvorrichtungen.

Speicheroszilloskop PCS100

### Versuchsdurchführung und Auswertung

#### Zu Aufgabe 1

Eine Klatsche mit eingebautem Kontakt wird über ein Kabel mit einem Mikrofon in einiger Entfernung verbunden und das Mikrofonsignal auf den Eingang des Speicheroszilloskops PCS100 geleitet. Die Klatsche erzeugt gleichzeitig mit dem Knall einen kurzen Triggerimpuls auf dem Mikrofonausgang. Da die elektrische Ausbreitungszeit im Vergleich zur Schallausbreitungszeit vernachlässigbar ist, misst man die Zeit vom Anfang des Trigger (=Anfang der x-Skala) bis zum Anfang des Knallsignals. Die zugehörige Entfernung ist der Abstand der Klatsche zum Mikrofon.

Variieren Sie den Abstand Klatsche-Mikrofon.

Prüfen Sie, ob Sie Schallreflexionen erkennen können (könnte man in einfachen Fällen in die Auswertung einbeziehen).

Charakteristik des Triggersignals: kurze ansteigende Flanke  $\ll 1\text{ms}$  und langsam abfallende schwach gekrümmte Flanke ohne Feinstruktur. Daraus folgt als geringster Messabstand Klatsche-Mikrofon  $\sim 30\text{cm}$ .

Charakteristik des Knallsignals: schnell ansteigende Oszillation ( $T \sim 1/4\text{ms}$ ) größerer Amplitude; Gesamtdauer beträgt wenige ms aber durch Reflexionen an der Wand oder Prellen des Kontakts kann diese evtl. verlängert sein.

Durchführung:

- Verbinden: Klatsche-Mikrofon-PCS100
- Einschalten: Mikrofon, PCS100, PC
- Symbol: OsciPcs100 doppelklicken  $\Rightarrow$  Setup-Fenster: Voreinstellungen (Oszilloscope: PCS100, FunctionGenerator: none, LPT Port Adress: 378 LPT1) mit OK bestätigen
- Oszilloskop Fenster: Einstellungen zunächst: [Oscilosc.]  $\Rightarrow$  [1ms]  $\Rightarrow$  [30mV]  $\Rightarrow$  [DC]  $\Rightarrow$  [TriggerOFF]  $\Rightarrow$  [RUN] Ergebnis: leichtes Rauschsignal
- Pfeifen dicht am Mikrofon  $\Rightarrow$  verrauschte Sinuswelle

Für Schallgeschwindigkeitsmessung in der Luft  $\Rightarrow$  [TriggerON],  $\Rightarrow$  [Single(shot)] Triggerlevel mit Cursor

eine volle vertikale Division nach oben schieben (Triggeraster=1/2 Div) dann immer Statuszeile unter [Single] beobachten Status=| stopped | triggered | Waiting for Trigger |, wenn das Ergebnis nicht gefällt  $\Rightarrow$  evtl. andere Einstellungen (Volts, Time, Triggerlevel)  $\Rightarrow$  [Single] == nächste Messung

Schallausbreitungszeit: 0 bis Anfang des Knallsignals (ACHTUNG für kurze Entfernungen Klatsche-Mikrofon ist das Knallsignal mit der abfallenden Triggerflanke überlagert, aber erkennbar) Klatsche beim Knallen nicht auf dem Tisch aufsetzen (Körperschall durch Tisch ist schneller als durch Luft).

Ist der Klinkenstecker der Klatsche nicht vollständig in die Mikrofonbuchse eingesteckt oder defekt, triggert nicht der Klatschenkontakt sondern der Knall, als Folge ist dann oft auch der Ruhepegel des Mikrofons nicht auf 0 sondern um mehrere „cm“ erhöht  $\Rightarrow$  neue Verbindung bzw. Klatsche oder Mikrofon tauschen. Zur Not kann auch ohne elektrische Verbindung Klatsche-Mikrofon gemessen werden, indem zwei Mikrofone an den Oszilloskop-Eingang geschaltet werden, der Triggerlevel so niedrig wie möglich eingestellt wird, und ein Mikrofon sehr dicht und eins weit entfernt von der Klatsche aufgestellt wird. Dabei sollte ein möglichst großer Abstand zu allen Schallreflektoren gewählt werden - die Signale erscheinen dann zwar auf demselben Kanal (vorn und hinten), können aber mit etwas Glück zugeordnet werden.

#### Zu Aufgabe 2

Mit einem Funktionsgenerator und einem Lautsprecher werden in dem Resonanzrohr (mit und ohne Abschlussdeckel) stehende Schallwellen angeregt und mit einem Mikrofon nachgewiesen. Die Mikrofon-Ausgangsspannung kann mit einem Multimeter gemessen werden.

Für Messungen am Resonanzrohr Klatschenstecker abziehen, Mikrofon dicht an die seitliche Öffnung am Rohr bringen und Mikrofonspannung mit Multimeter messen – parallel Messung mit Oszilloskop (Run-Modus) schadet aber nicht.

Der Funktionsgenerator muss auf Sinuswellenmodus und Symmetrieknopf auf aus stehen (ganz nach links), sonst werden Oberwellen erzeugt, die zu einer falschen Zuordnung der Resonanzen führen können.

Gemessen werden die Resonanzfrequenzen in Abhängigkeit von der Ordnungszahl. Zur Auswertung gemäß (5a,b) soll ein numerisches Auswerteverfahren entwickelt werden, um der hohen Genauigkeit der Messungen zu entsprechen.

Bei der Diskussion der Ergebnisse ist zu entscheiden, ob das durch den Lautsprecher begrenzte Ende des Rohres als offenes oder als geschlossenes Ende zu betrachten ist.

Zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit nach (3) muss die Temperaturabhängigkeit berücksichtigt werden, wobei Luft in guter Näherung als *ideales Gas* betrachtet werden kann. Die Temperatur kann im Versuchsraum gemessen werden.

### Zu Aufgabe 3

Die Experimente und Messungen werden zunächst an dem mittig eingespannten Stab durchgeführt. Mit einem sehr dicht vor die Stirnseite des Stabes gestellten Mikrophon kann die Auslenkung des Stabendes nach Anregung durch Anschlagen mit einem kleinen Hammer registriert werden. Beobachten Sie die zeitlichen Veränderungen der Schwingungsformen. Die Anfangsverteilung (Hin- und Herb-Oszillieren der Stabwelle) erhält man durch die PCS100 – Einstellungen [Trigger ON], [Single]-shot, [1ms], [30ms], oder [10mV] und Triggerlevel etwa 1 div über 0V.

Spätere Verteilungen erhält man im [RUN]-Modus durch geeignete Wahl des Triggerlevels: je niedriger der Triggerlevel, desto später die letzte Triggerung.

Die asymptotische Sinusverteilung erhält man im [RUN]-Modus mit [Trigger OFF] und [10mV] durch Beobachten des abklingenden Signals und Einfrieren des sinusförmigen Signals durch Anklicken von [RUN] (toggelt zwischen run und stop)

Die asymptotische Schwingung mit geringster Dämpfung ist die Grundschiwingung für Mitteneinspannung bzw. erste angeregte Welle bei  $1/4+3/4$  Einspannung.

### Störungen:

Wenn das Oszilloskop gar nicht mehr reagiert auch bei Triggerlevel 0 oder [Trigger OFF] und  $\Rightarrow$ [Run]: Reset:

einmal das PCS100 Programm schließen und wieder starten.

Sondereffekte: Hervorheben von reflektierten Schallwellen: Ausrichten des Mikrofons nicht auf die Klatsche sondern auf die Wand und Wahl einer günstigen=großflächigen Wand ohne zwischenliegenden Hindernisse.

Wie verändern sich die Schwingungsformen nach dem Anschlagen?

Wann tritt die Grundschiwingung deutlich hervor?

Drucken Sie charakteristische Diagramme für die Grenzfälle aus. Zum Ausdrucken der Signale des PCS100 wird ein zusätzlicher Rechner mit Drucker verwendet. Diese beiden Geräte befinden sich links vom Raumausgang (R. 2.08) und müssen eingeschaltet sein.

Das Drucken erfolgt durch Anklicken des File-Menüs im PCS100 Fenster und dann Print anklicken.

Beobachten und diskutieren Sie die Schwingungsbilder auch für eine (sinnvolle) zweifache Einspannung des Stabes.

Die Dichte des Stabes muss gemessen werden (Waage und Schiebelehre in Raum 2.05).

### Ergänzende Fragen

Warum werden höhere Frequenzen stärker gedämpft als niedrigere?

## RADIOAKTIVER ZERFALL

## GPI

Halbwertszeiten von  $^{108}\text{Ag}$  und  $^{110}\text{Ag}$ Stichworte

Kernaufbau. Radioaktiver Zerfall; Zerfallsschema, Energie (Quantenenergie), Energiespektrum. Zeitliches Verhalten des Zerfalls; Zerfallsgesetz, Lebensdauer und Halbwertszeit. Kernreaktionen. Zählstatistik; Strahlungsnachweis.

Ziele des Versuchs

Phänomenologische Betrachtung des Kernzerfalls. Einführung in Kernstrahlungsnachweis und -messtechniken.

Literatur

[4]: Kapitel 47, 49

Skript *STRAHLENSCHUTZANWEISUNG* im allgemeinen Teil dieser Praktikumsanleitung.

Aufgaben

1. Gemeinsame Aufgabe zur sofortigen Auswertung: Messung der natürlichen Ionendosisleistung und der Ionendosisleistung an der Außenseite des Neutronengenerators mit einem Ionendosisleistungs-Messgerät (*Hand-Monitor*). Umrechnung auf Äquivalentdosiswerte pro Jahr in mS/Jahr und mrem/Jahr.
2. Messung des mit dem Geiger-Müller-Zählrohr registrierten Nulleffektes.
3. Aktivierung der radioaktiven Isotope  $^{108}\text{Ag}$  und  $^{110}\text{Ag}$ . Messung der Zeitabhängigkeit der Zerfallsrate für verschiedene Aktivierungszeiten. Bestimmung der Zerfallskonstanten und der Halbwertszeiten der beiden Silberisotope.
4. Berechnung der Sättigungszählraten für die beiden Isotope und des Verhältnisses ihrer Wirkungsquerschnitte für Neutroneneinfangreaktionen. Vergleich mit dem Literaturwert (siehe Nuklidkarte am Versuchsplatz).

Physikalische GrundlagenDosimetrie

Siehe Skript *STRAHLENSCHUTZANWEISUNG* in Anlage VII dieser Praktikumsanleitung.

Aktivierung durch Kernreaktionen

Natürliches Silber besteht zu 51,83 % aus Ag-107 und zu 48,17 % aus Ag-109 (*natürliches Isotopengemisch*). Die Aktivierung der beiden instabilen, radioaktiven Isotope Ag-108 und Ag-110 erfolgt durch  $(n, \gamma)$ -Reaktionen, wonach sich die Silberisotope durch  $\beta$ -Zerfall in Cadmium-Isotope umwandeln:



Der Stern (\*) an den Isotopen bezeichnet, dass sich die Kerne in einem angeregten Zustand befinden.

Die zur Aktivierung erforderlichen langsamen Neutronen werden mit einer Americium-Beryllium-Neutronenquelle (*Neutronengenerator*) erzeugt. Die  $\alpha$ -Strahlung eines radioaktiven Am-241-Präparats löst durch eine  $(\alpha, n)$ -Reaktion mit Beryllium hochenergetische Neutronen aus, die durch elastische Stöße innerhalb eines Paraffinmoderators abgebremst werden:

Radioaktives Gleichgewicht (Mutter-Tochter-System)

Während der Aktivierung werden mit annähernd konstanter Rate radioaktive Kerne erzeugt, da die Zahl der stabilen Ausgangskerne  $N$  sehr groß gegen die Umwandlungsprozesse und damit praktisch konstant ist. Der gleichzeitig einsetzende Zerfall dagegen hängt von der Zahl der momentan vorhandenen radioaktiven Kerne  $n(t)$  ab und nimmt zunächst zu. Für die Anzahl radioaktiver Kerne gilt insgesamt:

$$dn = dn|_{\text{Reaktion}} + dn|_{\text{Zerfall}}$$

$$(3) \quad = \sigma \phi N dt - \lambda n dt$$

wobei  $\sigma$  der Wirkungsquerschnitt der Kernreaktion,  $\phi$  die Neutronenflussdichte und  $\lambda$  die Zerfallskonstante sind. Die Integration von (2) liefert:

$$(4) \quad n(t) = \frac{\sigma \phi N}{\lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda t})$$

Für die sich während der Aktivierung aufbauende Aktivität  $A(t) = \lambda \cdot n(t)$  erhält man:

$$(5) \quad A(t) = \sigma \phi N (1 - e^{-\lambda t}) = A_s (1 - e^{-\lambda t})$$

Für große Zeiten stellt sich ein Gleichgewicht zwischen Erzeugung und Zerfall ein. Die dabei erreichbare Aktivität  $A_s$  wird Sättigungsaktivität genannt.

Aktivität nach der Aktivierung

Nach Abschluss der Aktivierung verläuft der Zerfall nach dem einfachen Zerfallsgesetz, wobei die momentane erreichte Aktivität (5) die Anfangsaktivität darstellt.

Strahlungsnachweis

Zum Nachweis der Zerfälle werden die nach (1a,b) freigesetzten, hochenergetischen  $\beta$ -Teilchen mit einem dünnwandigem *Geiger-Müller-Zählrohr* und einem nachgeschalteten Zählgerät registriert. Zur Funktion des Zählrohrs siehe Skript *KERNELEKTRONIK* im allgemeinen Teil dieser Praktikumsanleitung.

Fehler von Zählgrößen beim radioaktiven Zerfall

Für den Fehler  $\Delta n$  einer Anzahl  $n$  von Ereignissen eines stochastischen Prozesses gilt (siehe Skript *STATISTIK* im allgemeinen Teil dieser Praktikumsanleitung):

$$(6) \quad \Delta n = \sqrt{n}$$

Apparatur und Geräte

Geiger-Müller-Zählrohr in Bleiabschirmung mit Zählgerät.  
Silberzylinder. Am-Be-Neutronengenerator. Stoppuhr.

Versuchsdurchführung und Auswertung

**Zur Versuchsdurchführung ist die STRAHLENSCHUTZANLEITUNG im allgemeinen Teil dieser Praktikumsanleitung zu beachten!**

Zu Aufgabe 1 (Dosisleistung)

Es ist ein integriertes Messgerät mit einem Geiger-Müller-Zählrohr vorhanden (*Hand-Monitor*), mit dem die Ionendosisleistung gemessen werden kann. Zur Umrechnung in die Äquivalentdosisleistung sind die Grundlagen zur Dosimetrie zu berücksichtigen (siehe STRAHLENSCHUTZANWEISUNG).

Zu Aufgabe 2 (Nulleffekt)

Der Strahlungsnachweis an den Silberzylindern geschieht mit einem Geiger-Müller-Zählrohr. Zur Messung der Zählrate (Ereignisse pro Zeitintervall) ist ein automatischer Zähler vorhanden, der periodisch Messungen in 10-s-Intervallen durchführt: Nullsetzen des Zählers (Reset); Messung während etwa 9 s; Anzeige des Messwertes für etwa 1 s. Die Messung besteht dann in einer laufenden Beobachtung und Notierung der Messwerte.

Vor Beginn der Messung ist über einen geeigneten Zeitraum der Nulleffekt ohne zusätzliche radioaktive Quelle zu bestimmen, der bei den späteren Messungen als Korrektur berücksichtigt werden muss.

Zu Aufgabe 3 (Zerfallkurven)

Für zwei verschiedene Aktivierungszeiten (1 min und 12 min) wird der Silberzylinder in einem der zentralen Kanäle des Neutronengenerators aktiviert. Mit dem Herausnehmen des zu Ende der Aktivierungszeit wird der Zählzyklus an dem Zählgerät gestartet und der Silberzylinder über das Zählrohr gebracht (Hinweise zur Bedienung des Zählers im Platzskript).

Die Synchronisation zwischen Ende der Aktivierung und Start des Zählers (der Zeitachse) ist genau einzuhalten, da anderenfalls die beobachtete Anfangsaktivität wegen der kurzen Halbwertszeit von Ag-110 stark verfälscht wird.

Die Messzeit ist bei allen Aktivierungszeiten über 12 min zu erstrecken, auch wenn sich bei der kurzen Aktivierungszeit der (täuschende) Eindruck ergibt, dass die Aktivität schon nach kürzerer Zeit bis auf den Nulleffekt abgeklungen ist. Die Halbwertszeit des langlebigen Isotops Ag-108 beträgt etwa 2<sup>1/2</sup> Minuten, und für eine eindeutige Festlegung des Funktionsverlaufs mit der Trennung der beiden Komponenten ist eine Beobachtung über etwa 5 Halbwertszeiten erforderlich.

Zur Auswertung werden die Messwerte um den Nulleffekt korrigiert und einfachlogarithmisch dargestellt. Im Kurvenverlauf ergeben sich dabei zwei Komponenten entsprechend den unterschiedlichen Zerfallskonstanten der beiden Isotope. Für große Zeiten kann angenommen werden, dass die kurzlebige Komponente praktisch vollständig abgeklungen ist. Dieser Bereich wird direkt durch Festlegung einer Ausgleichsgeraden ausgewertet, anhand der die Zerfallskonstante und die Sättigungsaktivität  $A_s = A(t=0)$  für Ag-108 bestimmt werden können.

Anschließend wird von den Messwerten für kleine Zeiten der zugehörige langlebige Anteil entsprechend den Werten der Ausgleichsgeraden für Ag-108 subtrahiert und anschließend ebenfalls einfachlogarithmisch ausgewertet. (Die Kurven für die beiden Aktivierungszeiten können in gemeinsamen Diagrammen dargestellt werden).

Literaturwerte

(*Seelmann-Eggebert, Pfennig, Münzen*; NUKLID-KARTE; Kernforschungszentrum Karlsruhe. Siehe auch Exemplar der Nuklidkarte im Versuchsraum).

Halbwertszeiten

$$(7a) \quad T_{1/2}(\text{Ag-108}) = 2,41 \text{ min}$$

$$(7b) \quad T_{1/2}(\text{Ag-110}) = 24,6 \text{ s}$$

Wirkungsquerschnitte

$$(8a) \quad \sigma(\text{Ag-107} \rightarrow \text{Ag-108}_{\text{Grundzustand}}) = 34,2 \text{ b (Barn)} \\ = 34,2 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$$

$$(8b) \quad \sigma(\text{Ag-109} \rightarrow \text{Ag-110}_{\text{Grundzustand}}) = 89 \text{ b}$$

## GAMMA-SPEKTROSKOPIE

## GPI

Stichworte

Kernaufbau. Radioaktiver Zerfall; Zerfallsschema, Energie (Quantenenergie), Energiespektrum. Wechselwirkung von  $\gamma$ -Strahlung mit Materie; Photoeffekt, *Comptoneffekt*, Paarbildungseffekt. Zählstatistik. Strahlungsnachweis.

Ziele des Versuchs

Einführung in die Phänomene des Kernzerfalls und der unterschiedlichen radioaktiven Strahlungsarten. Einführung in zugehörige Messtechniken.

Literatur

[4]: Kapitel 47, 48

Skripte *STATISTIK*, *KERNSTRAHLUNGSDETEKTOREN*, *DOSIMETRIE* und *STRAHLENSCHUTZANWEISUNG* im allgemeinen Teil dieser Praktikumsanleitung.

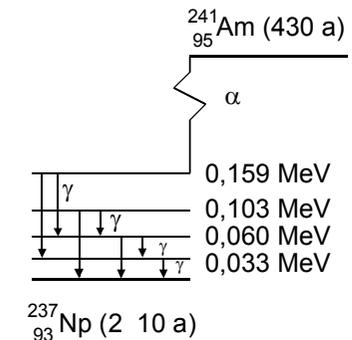
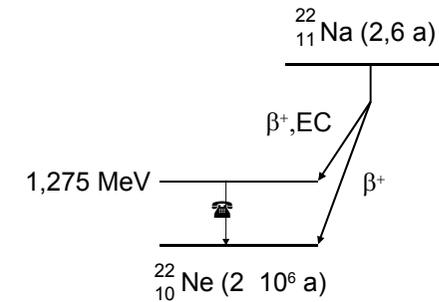
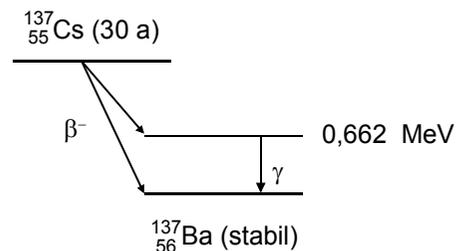
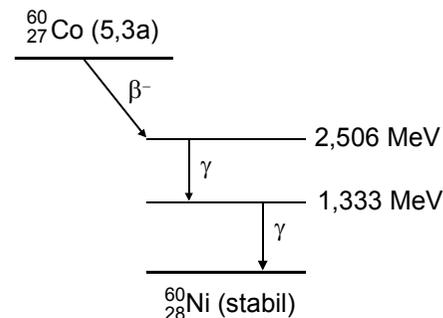
Aufgaben

- Aufgabe zur sofortigen Auswertung: Messung der natürlichen Äquivalentdosisleistung und der Dosisleistung des  $^{60}\text{Co}$ -Präparates in 0,5 m Abstand mit einem integrierten Äquivalentdosisleistungsmessgerät. Umrechnung auf die Äquivalentdosiswerte pro Jahr in Sv/a und mrem/a.
- Aufnahme der  $\gamma$ -Spektren von  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{22}\text{Na}$  und  $^{241}\text{Am}$  und Kalibrierung des Spektrometers (Kalibrierkurve).
- Bestimmung der Energie der  $e^+e^-$ -Vernichtungsstrahlung und Vergleich mit der *Einsteinschen Beziehung* ( $E=mc^2$ ).
- Bestimmung des Auflösungsvermögens des Spektrometers für die  $\gamma$ -Linie von  $^{137}\text{Cs}$ .

- Bestimmung der maximalen Übertragsenergie beim *Compton-Streuprozess (Compton-Kante)* für die  $\gamma$ -Linie von  $^{137}\text{Cs}$  und Vergleich mit dem theoretischen Wert aus der Streuformel.
- Überprüfung des Absorptionsgesetzes und Bestimmung der Schwächungskoeffizienten und Halbwertsdicken für Eisen und Blei für die 0,662 MeV- $\gamma$ -Strahlung von  $^{137}\text{Cs}$ .

Physikalische GrundlagenDosimetrie

Siehe Skript *DOSIMETRIE und STRAHLENSCHUTZANWEISUNG* im allgemeinen Teil dieser Praktikumsanleitung.

Zerfallschemen der verwendeten StrahlungsquellenWechselwirkung von  $\gamma$ -Strahlung mit Materie

Unter der Voraussetzung, dass die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit der durchstrahlten Schichtdicke  $dx$  proportional ist, und dass ein Strahlungsquant bei einer Wechselwirkung dem Strahlungsfeld verloren geht, ergibt sich ein Exponentialgesetz für die Intensität:

$$(1) \quad I = I_0 e^{-\mu x}$$

Der Absorptionskoeffizient  $\mu$  (*linearer Schwächungskoeffizient*) hängt dabei im Wesentlichen von der Energie der Strahlung und der Dichte des Absorbermaterials ab. Die Größe  $\mu/\rho$  (Dichte  $\rho$ ) ist bei vorgegebener Strahlungsenergie in etwa konstant und wird als *Massenschwächungskoeffizient* bezeichnet.

Für die Absorption sind hauptsächlich drei Prozesse verantwortlich:

Photoeffekt

Beim Photoeffekt wird das  $\gamma$ -Quant durch ein Elektron (der inneren Schalen) eines Atoms gestoppt, und dessen Energie vollständig auf das Elektron übertragen. Das Elektron verlässt den Atomverband.

Das Atom selber reorganisiert sich durch einen elektronischen Übergang in das Loch in der inneren Schale unter Aussendung von charakteristischer Röntgenstrahlung.

Compton-Effekt

Der *Compton-Effekt* (ARTHUR HOLLY COMPTON; 1892-1962; am. Physiker) ist eine inelastische Streuung von  $\gamma$ -Quanten an freien oder schwach gebundenen Elektronen. Die an das Elektron übertragene Energie  $T$  ist dabei vom Streuwinkel  $\Theta$  abhängig:

$$(2) \quad T = \frac{E_0}{1 + \frac{m_0 c^2}{(1 - \cos \Theta) E_0}}$$

wobei  $E_0$  die Energie der einfallenden  $\gamma$ -Quanten ist. Der maximale Energieübertrag findet bei Rückwärtsstreuung statt ( $\Theta = 180^\circ$ ).

Paarbildungseffekt

Beim Paarbildungseffekt materialisiert sich Strahlung entsprechend der *Einsteinschen Beziehung* (Albert Einstein; 1897-1955; dt./am. Physiker):

$$(3) \quad E = m c^2$$

Die Paarbildung geschieht bei ausreichender Energie durch Wechselwirkung mit dem Feld eines Atomkerns, wobei ein Elektron-Positron-Paar entsteht.

Die Paarbildung ist der Gegenprozess zur Umwandlung eines Elektron-Positron-Paares in Strahlungsenergie (Vernichtungsstrahlung), wobei aus Erhaltungsgründen zwei  $\gamma$ -Quanten entstehen. Diese Vernichtungsstrahlung kann an  $\beta^+$ -Strahlern, wie z.B. Na-22, beobachtet werden.

Strahlungsnachweis und Spektrometer; Auflösungsvermögen

Siehe Skript KERNSTRAHLUNGSEKTEKTOREN in Anlage VI dieser Praktikumsanleitung.

Fehler von Zählgrößen beim radioaktiven Zerfall

Für den Fehler  $\Delta n$  einer Anzahl  $n$  von Ereignissen eines stochastischen Prozesses gilt (siehe Skript STATISTIK in Anlage VIII dieser Praktikumsanleitung):

$$(4) \quad \Delta n = \sqrt{n}$$

Apparatur und Geräte

NaJ-Szintillationsspektrometer mit Hoch- und Hilfsspannungsversorgung. PC-gestützter Vielkanalanalysator.

Eisen- und Bleiabsorber unterschiedlicher Dicke.

Versuchsdurchführung und Auswertung

**Zur Versuchsdurchführung ist die STRAHLENSCHUTZANWEISUNG im allgemeinen Teil der Versuchsanleitung zu beachten!**

Zu Aufgabe 1 (Ionendosisleistung)

Zur Messung der Ionendosisleistung ist ein analoges Ionendosisleistungsmessgerät vorhanden (*Hand-Monitor*). Führen Sie die Messungen über einen bestimmten Zeitraum aus, um den Fehler der Messung abschätzen zu können. Die zugehörigen Auswertungen sollen gleich nach der Messung und durch die gesamte Gruppe durchgeführt werden.

Spektrometer und Vielkanalanalysator

Zur Inbetriebnahme des Spektrometers müssen die Hochspannung (des Sekundärelektronenvervielfachers), das Netzgerät des Analog-Digital-Wandlers (*Peak-Detector-Interface*) und der PC eingeschaltet werden.

Die Hochspannung (Grobeinstellung) muss auf den markierten Wert eingestellt sein (ca. 700 V).

Das Vielkanal-Programm auf dem Rechner startet selbsttätig nach dem Einschalten, die Mess- bzw. Programmfunktionen sind intuitiv verständlich. Zusätzliche Erläuterungen sind im Platzskript angegeben. Machen Sie sich vor Beginn der Messungen ausgiebig mit den Funktionen des Vielkanalanalysators vertraut.

Die Verstärkung des Systems wird am Peak-Detector-Interface mit dem Schiebeschalter ( $1\times$ ) und dem Drehknopf (2..6) so eingestellt, dass die 1,33-MeV-Linie von Co-60 gerade noch am rechten Rand des Spektrums erfasst wird.

Zu Aufgabe 2 und 3 (Kalibrierung des Spektrometers;  $e^+e^-$ )

Zur Kalibrierung des Spektrometers und Bestimmung der Energie der  $e^+e^-$ -Vernichtungsstrahlung (am Na-22 Präparat) werden die Spektren der Präparate einzeln aufgenommen und die Lagen (Kanalnummern  $k$ ) der jeweiligen  $\gamma$ -Linien bestimmt. Die statistisch genaue

Lage einer Linie ist durch ihren Schwerpunkt  $\bar{k}$  gegeben (Mittelwert, 1. Moment):

$$(5) \quad \bar{k} = \frac{\sum n(k)k}{\sum n(k)}$$

wenn  $n(k)$  der jeweilige Kanalinhalt ist (Ereigniszahl). Die Messungen sind mit der 662-keV-Linie von Cs-137 zu beginnen. Für diese Linie soll der Schwerpunkt über einige Kanäle in der Umgebung des Maximums berechnet und mit der Lage des Maximums selbst messbegleitend verglichen werden.

Als Kalibrierkurve des Spektrometers werden die gemessenen Kanalnummern der Linien über der Energie aufgetragen. Aus der Kurve kann dann die Energie der  $e^+e^-$ -Vernichtungsstrahlung abgelesen werden.

Um ein anschauliches Bild von einem Spektrum im Messprotokoll zu erhalten, soll zusätzlich der Verlauf des gesamten Spektrums von Cs-137 vom Bildschirm des Oszilloskops skizziert werden.

Zu Aufgabe 4 (Auflösungsvermögen)

Die gesamte 662-keV-Linie wird punktweise aufgenommen und später grafisch dargestellt. Die Messwerte

werden (mit einem Kurvenlineal) durch eine Glockenkurve ausgeglichen und daraus die volle Breite bei halben Maximum abgelesen. Das relative Auflösungsvermögen lässt sich unabhängig von der Kalibrierung direkt aus die Kanalnummern bestimmen.

Zu Aufgabe 5 (Compton-Kante)

Als Lage der *Compton-Kante* wird die Mitte der abfallenden Flanke nach dem *Compton-Plateau* geschätzt.

Zu Aufgabe 6 (Absorptionsgesetz)

Auch die Überprüfung des Absorptionsgesetzes geschieht an der 662-keV-Linie von Cs-137. Es sind verschiedene Eisen- und Bleiabsorber vorhanden, die zwischen Quelle und Detektor gebracht werden können. Bei diesen Messungen müssen Intensitäten berücksichtigt werden, die direkt mit der Funktion *Fläche* des Systems ermittelt werden können.

Bedenken Sie bei diesen Messungen mögliche systematische Verfälschungen, deren Minimierung und deren möglicher Einfluss auf das Ergebnis. Benutzen Sie bei den Messungen gegebenenfalls die Funktion *Impulsgrenze*.

Zur Auswertung der Schwächungskoeffizienten bzw. der Halbwertsdicken werden die Messungen einfachlogarithmisch dargestellt.

# ANLAGE I FEHLERRECHNUNG

GPI

Reale Größen- oder Wertausprägungen tragen aufgrund der Natur der Dinge einen zufälligen Charakter mit einem Streuverhalten, und die Erfassung (Messung) solcher Werte ist durch dies Verhalten selbst und durch zusätzliche, unvermeidbare Mängel jedes Messverfahrens nur näherungsweise möglich. Auch wenn Messwerte durch Zahlen dargestellt werden, so haben diese Maßzahlen nicht die Eigenschaft exakter Werte im mathematischen Sinn, sondern sie stellen lediglich zufällige Einzelwerte verteilter Größen dar.

In allen experimentellen Arbeitsgebieten führt dies zur Anwendung von Statistik bei quantitativen Untersuchungen, wobei die statistischen Methoden der Messtechnik und Physik als Fehlerrechnung bezeichnet werden. Im Rahmen des Physikalischen Grundpraktikums werden einführend sehr einfache Methoden der Fehlerrechnung betrachtet und vermittelt, die an ein grundsätzliches Verständnis der Fehlerrechnung und eine kritische, statistische Betrachtung von Messergebnissen heranführen sollen.

Die Fehlerrechnung gehört zu den elementaren Methoden des Physikers, und Diskussionen der Fehler und Voruntersuchungen zur erzielbaren Genauigkeit stehen stets am Anfang der Konzeption eines Experiments, da dessen Durchführung nur dann sinnvoll wird, wenn die Fehler genügend klein bleiben, um auf die gestellte Frage eine signifikante Antwort geben zu können.

## Statistische Situation und Grundlagen

### Statistische Grundsätze

Statische Betrachtungen und Methoden unterliegen zwei elementaren Grundsätzen:

- (1) Statistische Aussagen kennzeichnen Ensembleeigenschaften, wobei kein Schluss von einem Einzelfall auf die Gesamtheit möglich ist.
- (2) Statistische Aussagen sind Wahrscheinlichkeitsaussagen mit endlicher Genauigkeit und (damit korrelierter) endlicher Sicherheit.

### Empirische Situation

Die Unschärfe physikalischer Größen selbst und zusätzliche unvermeidbare zufällige und systematische Abweichungen durch die Messmethode führen dazu, dass Messwerte verteilt sind, wobei der Schwerpunkt der Messwerteverteilung nicht mit dem Schwerpunkt der Größenverteilung zusammenfallen muss. Messergebnisse können daher nur näherungsweise ermittelt werden, und die Bestimmung exakter Werte bleibt ausgeschlossen. Aus dieser Sicht werden die aus praktischen Daten nach Methoden der mathematischen Statistik gewonnenen Ergebnisse als Schätzungen bezeichnet, wobei vollständige Schätzungen durch Intervalle erfolgen (Intervallschätzungen), die sowohl die Lage (Wert) als auch die Streuung der verteilten Größe (Fehler) repräsentieren, und die darüber hinaus schließende Vergleiche ermöglichen (s.u.).

### Zufällige Fehler: Fehlerverteilung und Fehlerintervall

Messwerte sind durch die zufälligen Einflüsse normalverteilt; dies ist eine empirisch beobachtete Tatsache. Normalverteilungen sind durch zwei Parameter gekennzeichnet; der Erwartungswert  $\mu$  beschreibt die Lage und die Standardabweichung  $\sigma$  die Streuung der Verteilung, wobei in einem Intervall ( $\mu \pm \sigma$ ) um den Erwartungswert (zentrales Schwankungsintervall) 68 % aller Werte der Verteilung zu finden sind. Für einen beliebigen Wert der Verteilung, z.B. ein Messergebnis  $x_i$ , beträgt dann umgekehrt für ein gleich großes Intervall ( $x_i \pm \sigma$ ) die statistische Wahrscheinlichkeit ebenfalls 68 %, dass der Erwartungswert von diesem Intervall erfasst wird. Intervalle dieser Art werden als statistische Intervallschätzung für die Größe  $X$  bezeichnet und heißen Vertrauens- oder Fehlerintervalle.

Das Intervall ( $x_i \pm \sigma$ ) ist das vollständige Ergebnis einer Messung; der Intervallradius selbst heißt Fehler  $\Delta x$ . Er ist ein Maß für die zu erwartende Abweichung und repräsentiert damit eine Genauigkeit im Rahmen einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, der statistischen Sicherheit. Dabei besteht eine Art "Unschärferelation" zwischen der Genauigkeit und der Sicherheit: Je genauer eine Aussage getroffen, d.h. je kleiner das Fehlerintervall angesetzt wird, um so geringer wird die Sicherheit der Aussage, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das angegebene Intervall den Erwartungswert erfasst.

Zur Verdeutlichung sei wiederholt: in der Physik und Messtechnik wird die einfache Standardabweichung als Fehlermaß zugrunde gelegt, bei der die statistische Sicherheit 68 % ( $\approx 2/3$ ) beträgt, und bei der damit andererseits eine Irrtumswahrscheinlichkeit von immerhin 32 % ( $\approx 1/3$ ) verbleibt. (In anderen Fachgebieten ist dies aus besonderen Gründen nicht tragbar, und es werden höhere Sicherheiten zugrunde gelegt; wie in den Biowissenschaften und der Medizin, wo typischerweise die dreifache Standardabweichung herangezogen wird, die eine statistische Sicherheit von 99,7 % umfasst).

Die Fehlerintervalle als Ergebnisse von Messungen sind grundsätzlich als homogen zu betrachten, d.h. der Ergebniswert als Intervallmitte ist nicht wahrscheinlicher (und damit nicht besser) als irgendein anderer Wert des Intervalls.

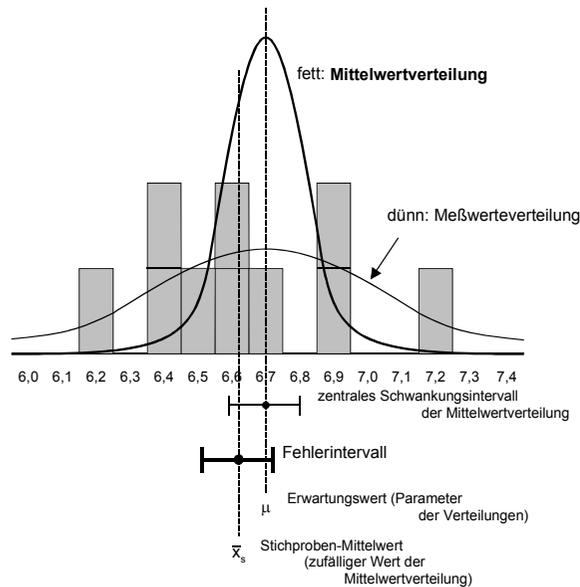
### Systematische Fehler

Neben zufälligen Fehlern treten systematische Einflüsse auf, die zu bestimmten, einseitigen Abweichungen von den tatsächlichen Werten führen, wie z.B. verbogene Zeiger, schiefstehende Waagen oder Kalibrierfehler. Systematische Fehler sind grundsätzlich vermeidbar, aber schwer erkennbar (die zufälligen Fehler offenbaren sich durch die Streuung). Im Rahmen des Grundpraktikums sollen zufällige und systematische Fehler nicht weiter unterschieden und gleich behandelt werden.

### Beispiel einer Messwertverteilungen

Grafische Darstellung des Histogramms (Rechteckflächen) einer Messreihe (Stichprobe) und der zugehörigen (hypothetischen) Verteilungsfunktionen.

Die dargestellten Verhältnisse zeigen ein Beispiel mit einem geringen Auflösungsvermögen im Vergleich zur Standardabweichung der Verteilungsfunktion, wie dies vielfach bei Messproblemen angetroffen wird, und einem sehr kleinen Stichprobenumfang (10 Messwerte). Dabei ist deutlich zu erkennen, dass eine derartig geringe Datenmenge kaum als Stichprobe im statistischen Sinn zu betrachten ist und nur eine sehr grobe Näherung der Verteilungsfunktion darstellt.



### Schließender Vergleich

Jede Schlussfolgerung aus Ergebnissen folgt durch quantitativen Vergleich: auf Abhängigkeiten bei Variation eines Parameters, zwischen Theorie und Experiment, durch Vergleich mit vorhandenen Daten (Literaturwerten). Im Sinne eines *statistischen Tests* sind drei Vergleichsergebnisse konventionell festgelegt:

Ergebnisse werden als (uneingeschränkt) gleich bewertet, wenn sich ihre (*einfachen*) *Fehlerintervalle* gegenseitig erfassen.

Ergebnisse werden als verträglich bewertet, wenn sie sich noch im Rahmen der *dreifachen Fehlerintervalle* erfassen.

Ergebnisse werden erst dann als signifikant unterschiedlich betrachtet, wenn die Abweichung über die dreifachen Fehlergrenzen hinausgeht.

### Auflösungsvermögen

Viele Messverfahren zeigen keine Streuung und liefern *stabile* Messwerte. Dies liegt daran, dass jedes Messverfahren und jede Zahlenrealisation (Skala, Anzeige) ein begrenztes *Auflösungsvermögen* besitzt, unterhalb

der Werte nicht mehr getrennt wahrnehmbar sind oder dargestellt werden. Alle realen Werte haben *diskreten* Charakter und zeigen sich stabil, wenn die Streuung unterhalb der dadurch gegebenen Auflösungsgrenze liegt.

Die Fehlerabschätzung muss hier die Skalenauflösung (Ablesemöglichkeiten) oder Zahlendarstellung (Digitalanzeigen) und gegebenenfalls zusätzliche Umstände der Messung berücksichtigen, und man spricht von einem *praktischen Schätzfehler*.

Bei *Analoganzeigen* (Skala/Zeiger) kann innerhalb der Skalenteile (Skalenteile) meist eine weitere *Schätzstelle* abgelesen werden, und der Fehler hängt von der Skalenausführung und den Parallaxeeinflüssen ab und muss subjektiv geschätzt werden:

Analoganzeige :  $\Delta_{\text{Schätz}} = 0,1 - 0,5 \text{ Skt}$  (Skalenteile)

Dabei stellen 0,5 Skalenteile eine Obergrenze dar, wenn das Schätzen eines Zwischenwerts nicht möglich ist, und ein ganzes Anzeigintervall als Fehlerintervall herangezogen werden muss.

Bei Digitalanzeigen ist der Schätzfehler wegen der Unkenntnis des Rundungsmechanismus mit ( $\pm$ ) 1 in der letzten Stelle der Anzeige anzunehmen:

Digitalanzeige :  $\Delta_{\text{Schätz}} = 1 d$  (Digit)

### Gerätevoraussetzungen: Nennfehler

Jedes Messgerät ist bauartbedingt mit Fehlern verbunden, die vom Hersteller untersucht und mit den Gerätedaten angegeben und vom Benutzer berücksichtigt werden müssen; sie werden hier als *Nennfehler* bezeichnet.

Typisch für Geräte mit beitragenden Nennfehlern im Praktikum sind elektrische Multimeter (*U/I/R/C/L*). Analogmultimeter werden durch ihre *Güteklasse* charakterisiert, die den absoluten Fehler als Prozentwert vom Messbereich angibt:

Güteklasse  $k$  :  $\Delta x = \frac{k}{100} \cdot \text{Meßbereich}$

Die Güteklasse ist (neben anderen Kennzeichen) als kleine Zahl (im Wertebereich von etwa 0,5 bis 3) zusammen mit der Stromart (= oder ähnlich für Gleich-

strom;  $\approx$  für Wechselstrom) mit auf der Skala der Geräte angegeben.

Bei Digitalmultimetern setzt sich der Fehler aus einem relativen Anteil in % vom Messwert (% v. M.) und einem absoluten Anteil in *Digits* ( $d$ ; Einheit der letzten Stelle) zusammen:

$p$  % v.M. +  $n d$ :

$$\Delta x = \frac{p}{100} \cdot \text{Meßwert} + n \text{ Einheiten in der letzten Stelle}$$

Im Praktikum sind die Nennfehler in den jeweiligen Platzskripten angegeben, sofern sie einen dominanten Beitrag darstellen, und müssen dann zu den Messergebnissen berücksichtigt werden.

### Fehlerbegriffe

Die anzunehmenden Abweichungen selbst werden genauer als *absolute Fehler* bezeichnet und allgemein mit einem großen griechischen Delta geschrieben; der absolute Fehler wird für den *Vergleich* von Größen herangezogen:

$\Delta x = \text{absoluter Fehler}$  (:= Vergleichsmaß)

Bei der *Fehlerfortpflanzung* (s.u.) wird der absolute Fehler bei additiven Verknüpfungen benötigt (+/-).

Als *Genauigkeitsmaß* wird zusätzlich der *relative Fehler* herangezogen, der den Fehler auf die Messgröße selbst bezieht. Der relative Fehler wird mit einem kleinen griechischen Delta geschrieben:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} = \text{relativer Fehler} \text{ (:= Genauigkeitsmaß)}$$

Der relative Fehler ist eine Verhältniszahl und dimensionslos. Im entsprechenden Wertebereich werden relative Fehler meist in % angegeben (1% = 0,01).

Bei kleinen Werten werden Zehnerpotenzen abgespalten ( $\delta x = 3 \cdot 10^{-5}$  für  $\delta x = 0,00003$ ).

Bei der *Fehlerfortpflanzung* (s.u.) wird der relative Fehler bei multiplikativer Verknüpfung benötigt ( $x/\pm$ ).

### Gliederung der Fehlerrechnung

Ein Experiment besteht im Allgemeinen aus den eigentlichen *Messungen* mit der Aufnahme der Messwerte und Bestimmung der Messergebnisse und der anschließenden *Auswertung* mit der arithmetischen Berechnung des Versuchsergebnisses oder der Auswertung funktionaler Zusammenhänge. Die zugehörige Fehlerrechnung gliedert sich dementsprechend in die Bestimmung der *Messfehler*, die Berechnung der Fehler bei arithmetischen Auswertungen, die als *Fehlerfortpflanzung* bezeichnet wird, und die *Fehlerbestimmung bei der Auswertung von Funktionen*.

### Messfehler

Die Fehler der Messwerte (Messfehler) lassen sich grob drei Kategorien zuordnen, wobei in der Praxis meist einer der Beiträge dominiert und allein weiter betrachtet werden kann (siehe ergänzender Absatz zu *beitragenden* und *nichtbeitragenden Fehlern*).

Zu einer Messung gehört oft eine vorhergehende *Einstellung* (Anlegen eines Maßstabs, Auslösen einer Stoppuhr, Justierung oder Einstellung an einer optischen Apparatur, Einstellung eines zusätzlichen "Parameters", wie z.B. einer Temperatur), wobei im Folgenden nicht unterschieden werden soll, ob der Fehler des Messwert nur aus dem Messverfahren oder zusätzlich aus erforderlichen Einstellungen herrührt.

### Kontrollmessung

Zum Erkennen des Streuverhaltens ist es grundsätzlich erforderlich, eine Messung zu wiederholen bzw. bei kontinuierlicher Messung einen Messwert über einige Zeit zu beobachten.

Zeigt die Messgröße eine (deutliche) Streuung, so muss aus statistischer Sicht eine *Stichprobe* erhoben, d.h. eine Messreihe aufgenommen und statistisch ausgewertet werden (siehe folgendes Kapitel).

Zeigt sich die Messgröße dagegen konstant, so wird die Streuung nicht aufgelöst, so muss aus dem Auflö-

sungsvermögen und aus den übrigen Messumständen ein Fehler abgeschätzt werden (siehe Kapitel *Auflösungsvermögen* oben).

### Stichprobenschätzung (Messreihe und Streufehler)

Aus einem (Einzel-) Messwert einer schwankenden Größe kann grundsätzlich keine (statistische) Aussage gewonnen werden, insbesondere auch nicht die Standardabweichung der zugehörigen Messwertverteilung als Fehlermaß. Aus einer Stichprobe (Messreihe) als Näherungsform der Verteilung können aber nicht nur Näherungswerte für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Verteilung selbst, sondern aufgrund innerer, statistischer Zusammenhänge auch die Standardabweichung der *Mittelwertverteilung* berechnet werden, so dass man als Ergebnis den (einzelnen) Mittelwert mit seinem Fehler angeben kann. Wenn  $x_s$  die Stichproben-Messwerte und  $n$  deren Anzahl sind, so ergibt sich als Ergebnis  $\bar{x}$  der Mittelwert zu:

$$\bar{x} = \bar{x}_s = \frac{1}{n} \sum x_s$$

Die Standardabweichung  $\sigma_{\bar{x}}$  der Mittelwertverteilung als Fehler hängt von der Streuung (Standardabweichung  $\sigma$ ) der Messgröße selbst und dem Umfang  $n$  der Stichprobe ab:

$$\Delta x = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Die Standardabweichung  $\sigma$  einer Verteilung ist die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung  $\sigma^2$  (*Varianz*), deren Konstruktion der des Mittelwerts (12) entspricht:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Da die Messreihe als Stichprobe nur eine Näherung der Verteilung wiedergibt, kann auch die Standardabweichung nur näherungsweise berechnet werden. Die übliche Kennzeichnung für den Näherungswert ist dabei ein tiefgestellter Index  $n-1$  an der Standardabweichung, da durch  $n-1$  statt durch  $n$  dividiert wird (Zahl der "überschüssigen" Messungen):

$$\sigma^2 \approx \sigma_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_s - \bar{x})^2$$

Als Fehler des Mittelwerts ergibt sich dann mit (13 und 15)

$$\Delta x \approx \sqrt{\frac{\sum (x_s - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

*Bei einfachen Standard-Messverfahren, wie sie im Grundpraktikum zur Anwendung kommen, werden Streuungen seltener beobachtet, und statistische Auswertungen nach (12) und (16) kommen nur vereinzelt vor.*

### Fehlerfortpflanzung

#### Linearkombination von Verteilungen

Die Fehlerverknüpfungen bauen auf die Verknüpfungsregeln von Verteilungen auf, wobei sich für die Streuung eine "kompensierende" Wirkung ergibt, wenn im Einzelfall positive und negative Abweichungen zusammen kommen und die Summenabweichung verringern. Im elementaren Fall einer Linearkombination zweier statistisch unabhängiger Verteilungen  $X_i$  und  $Y_i$  zur Summenverteilung  $(aX + bY)_i$  addieren sich die Mittelwerte und Varianzen (mittlere quadratische Abweichungen) entsprechend ihrer linearen Konstruktion:

$$a x_i + b y_i = a \bar{x} + b \bar{y}$$

und

$$\sigma_{ax_i+by_i}^2 = a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2$$

#### Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz

Eine Auswertbeziehung stellt den Ergebniswert  $z$  als Funktion der Messvariablen  $a, b, c, \dots$  dar:

$$z = f(a, b, c, \dots)$$

Zur Fehlerbetrachtung werden die Messfehler  $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$  als kleine Abweichungen von den Messergebnissen

$a_0, b_0, c_0, \dots$  betrachtet, und die Auswertefunktion näherungsweise in eine lineare Taylorreihe entwickelt:

$$z \approx z_0 + \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial f}{\partial c} \Delta c + \dots$$

Bei der Bildung der Standardabweichung nach (18) als Fehler  $\Delta z$  fällt  $z_0$  als konstanter Anteil heraus, und man erhält das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz*:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c} \Delta c\right)^2 + \dots}$$

Dabei stellen die partiellen Ableitungen nach den Messvariablen *Gewichtsfaktoren* für die Beiträge der einzelnen Messgrößen dar, und die Addition der Quadrate mit anschließender Wurzel berücksichtigt den Verteilungscharakter mit der Wahrscheinlichkeit der Kompensation von Abweichungen [der Gesamtfehler nach (21) ist kleiner als die lineare Summe der Komponenten].

Das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz setzt als wichtige Einschränkung voraus, dass die Messvariablen *statistisch unabhängig* und *nicht korreliert* sind.

### Elementarregeln

Die partiellen Ableitungen können die geschlossene Berechnung des Ergebnisfehlers nach (21) u.U. aufwendig machen, und bei arithmetischen Verknüpfungen kann es einfacher sein, die Fehlerfortpflanzung für die einzelnen Verknüpfungsschritte "von innen nach außen" paarweise abzuarbeiten, entsprechend dem Vorgehen bei der arithmetischen Berechnung des Ergebnisses selbst. Dabei ergibt sich aus (21) für die Rechenoperationen:

$$\Delta(a \pm b) = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}$$

d.h. bei Addition oder Subtraktion "addieren" sich (Fehlerquadrate und Wurzel) die absoluten Fehler. Für Multiplikation und Division folgt mit entsprechenden Umformungen:

$$\delta(a \times / \div b) = \sqrt{(\delta a)^2 + (\delta b)^2}$$

d.h., bei Multiplikation und Division "addieren" sich die relativen Fehler.

Bei Potenzen (Wurzeln) vervielfacht sich der relative Fehler um den Exponenten:

$$\delta(a^r) = r \delta a$$

Für Werte "höherer" Funktionen muss der Fehler nach (21) durch Ableitung berechnet werden. Voraussetzung auch für die Anwendung der Elementarregeln ist die statistische Unabhängigkeit der einzelnen Größen, so dass sie nur für Auswertebeziehungen geeignet sind, bei der jede Messgröße nur einmal eingeht.

### Maximalfehler

Kann die statistische Unabhängigkeit nicht vorausgesetzt, und müssen Messgrößen als korreliert angenommen werden, so gelten auch nicht die obigen Kombinationsregeln für Verteilungen. Es wird dann der ungünstigste Fall angenommen, dass alle Messgrößen in einer Richtung und bis an den Rand des Fehlerintervalls abweichen, und man erhält das Fehlerfortpflanzungsgesetz für den *Maximalfehler*:

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \Delta b + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| \Delta c + \dots$$

### Grenzwertabschätzung

Sind Auswertebeziehungen sehr komplex, so kann auch ein Grenzwert des Ergebnisses (Fehlergrenze) durch Einsetzen der Grenzen der Messwerte berechnet werden. Dabei muss berücksichtigt werden, in welcher Weise die Einzelgrößen in den Rechenausdruck eingehen (Summand/Subtrahend; Zähler/Nenner). Der Fehler ergibt sich dann als Differenz zwischen Grenz- und Ergebniswert:

$$\begin{aligned} \text{Ergebnis } z &= f(a, b, \dots) \\ \text{oberer Grenzwert } z_+ &= f(a_+, b_+, \dots) \\ \text{Fehler } \Delta z &= z_+ - z \end{aligned}$$

### Unmittelbare Messgleichung

Vor Beginn einer Fehlerfortpflanzungsrechnung muss die Auswertegleichung auf die unmittelbaren Messgrößen zurückgeführt werden, um irrtümliche Fehlerbeiträge durch redundante Größen in Zwischenwerten oder Korrelationen erkennen zu können. Trivialbeispiel:

Als Aufgabe sei das Verhältnis zweier Gewichtskräfte  $G = m \cdot g$  zu berechnen. Bei vorausgehender Einzelberechnung von  $G_1$  und  $G_2$  ginge in das Verhältnis  $G_1/G_2$  zweimal der relative Fehler der Fallbeschleunigung  $g$  ein, während die Fallbeschleunigung tatsächlich aus dem Verhältnis herausfällt.

### Grafische Auswertung von Funktionen

Die experimentelle Untersuchung und Auswertung von Funktionen umfasst die *qualitative* Beurteilung der Funktionsart und die *quantitative* Bestimmung der Parameter (Achsenabschnitt und Anstieg als Beispiel bei einer linearen Funktion). Für die qualitative Beurteilung ist stets eine grafische Darstellung erforderlich, die gleichzeitig ein leistungsfähiges Hilfsmittel für die quantitative Auswertung ist. Die Auswertung der Parameter kann bei Vorgabe eines Funktionstyps auch numerisch erfolgen (Lineare Regression für Geraden; Ausgleichsrechnungen für beliebige Funktionen), wobei der numerische Aufwand jedoch vergleichsweise hoch ist. Darüber hinaus vermittelt die grafische Auswertung von Funktionen praktische Erfahrungen bei der kritischen Bewertung von Funktionsverläufen.

Eine grafische Auswertung ist für lineare oder "linearierte" Funktionen möglich; die Methoden sind in einem gesonderten Abschnitt beschrieben (GRAFISCHE DARSTELLUNGEN UND GRAFISCHE AUSWERTUNG VON FUNKTIONEN).

Die Fehlerabschätzung ist dabei sehr einfach und geht vom oben beschriebenen Grenzwertprinzip aus. Neben der *Anpassungsgeraden* (Bestgerade) mit den Parametern  $a$  (Achsenabschnitt) und  $m$  (Anstieg) wird eine *Grenzgerade* konstruiert, die die Grenzwerte  $a_G$  und  $m_G$  der Parameter liefert, und damit entsprechend (26) auch die Fehler. Die Ergebnisse sind dann:

$$\begin{aligned} a &= (a \pm \Delta a) \text{ mit } \Delta a = a_G - a \text{ und} \\ m &= (m \pm \Delta m) \text{ mit } \Delta m = m_G - m \end{aligned}$$

Einzelheiten zur Konstruktion von Anpassungs- und Grenzgeraden, zur Linearisierung von Funktionen und zur rechnerischen Auswertung sind in der o.g. Darstellung zu finden.

## Methodische Ergänzungen

### Darstellung der Ergebnisse (Ergebnisintervalle)

Eine klare und übersichtliche Form der Darstellung der Ergebnisse als Ergebnisintervalle besteht in der Angabe der Intervallmitte (Ergebniswert) und dem Intervallradius (Fehler):

$$\text{(Beispiel) } I = (27,4 \pm 0,5) \text{ mA}$$

Diese Darstellungsart ist im Praktikum zu bevorzugen. Eine alternative Schreibweise besteht darin, den Fehler in Bezug auf die letzten angegebenen Stellen in Klammern an den Ergebniswert anzufügen; das Beispiel (28) lautete dann:

$$\text{(Beispiel) } I = 27,4(5) \text{ mA.}$$

Für Werte ohne Fehlerangaben aus sonst verlässlichen Quellen wird konventionsmäßig ein Fehler von 1 (einer Einheit) in der letzten angegebenen Stelle angenommen.

### Beitragende und nicht beitragende Fehler

Auch Fehler sind Schätzwerte, deren eigene Genauigkeit meist ein bis mehrere Größenordnungen unterhalb der der Ergebnisse liegt. Das Ziel einer Fehlerrechnung kann daher darauf beschränkt bleiben, den wesentlichen Anteil einer zu erwartenden Abweichung zu erfassen, wobei kleinere Beiträge vernachlässigt werden können; insbesondere auch unter dem Gesichtspunkt der Charakteristik des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes und zusätzlicher, systematischer Auf rundungen im Rechengang (siehe folgender Abschnitt).

*Kleine Fehlerbeiträge können bei der Fehlerfortpflanzung somit außer acht gelassen werden, was den Rechenaufwand verringert.*

Fehler sind als klein zu betrachten, wenn sie eine halbe Größenordnung (Faktor 3) oder mehr unter anderen Fehlerbeiträgen liegen.

### Rundung der Fehler

Aus den gleichen Gründen, d.h. wegen der geringen Genauigkeit der Fehlerwerte selbst, ist es auch nicht sinnvoll, in den Zahlenangaben die Fehler mit mehr als einer *zählende Stelle* anzugeben, womit die Genauigkeit der Fehler im ungünstigsten Fall auf einen Faktor 2

gleich 100 % reduziert wird (im Wertebereich zwischen 1 und 2).

Dabei darf jedoch nicht die Voraussetzung, d.h. die vorgegebene statistische Sicherheit verletzt werden:

Fehlerintervalle dürfen nur *aufgerundet* werden!

Werden Auswertungen nicht geschlossen durchgerechnet, sondern Zwischenwerte notiert und später wieder aufgenommen, so sollen Fehlerangaben zweistellig berücksichtigt werden, um ein beitragendes Anwachsen von Rundungsfehlern zu vermeiden.

### Zahlendarstellung der Ergebnisse

Letztlich darf auch die Zahlendarstellung der Ergebnisse keine unzutreffende Genauigkeit vortäuschen und keine höhere Auflösung besitzen, als durch die Fehler vorgegebenen wird. Durch Rechenschritte (Multiplikation/Division) ergeben sich oft *überschüssige* Stellen, die dann (hier "kaufmännisch") gerundet werden müssen:

Zahlenwörter der Ergebnisse und Fehler müssen in der gleichen Stelle (Zehnerpotenz) enden.

Eine konsistente Angabe nach der Berechnung eines Widerstandswertes [ $U = (9,13 \pm 0,06) \text{ V}$ ;  $I = (243 \pm 3) \text{ mA}$ ] wäre:

$$\text{(Beispiel) } R = (37,6 \pm 0,9) \Omega$$

Falsch wäre es, im Ergebnis mehr als eine Stelle nach dem Komma anzugeben, da diese Stellen im Rahmen des Fehlers alle beliebigen Ziffernwerte annehmen könnten, und somit ohne Aussage sind;

$$\text{(Beispiel) Falsch: } R = (37,5720 \pm 0,8) \Omega$$

Andererseits sind auch Nullen zählende und gleichberechtigte Ziffern und dürfen nicht unterschlagen werden, wenn sie zur Bezeichnung der *Zahlenauflösung* gebraucht werden. Ist eine Spannung bei einem Fehler von 0,06 V sehr korrekt auf 9,00 V eingestellt worden, so wäre es falsch, die Nullen nicht zu notieren:

$$\text{(Beispiel) Falsch: } U = (9 \pm 0,06) \text{ V}$$

## Schlussbemerkung

Fehler können *immer* abgeschätzt werden!

Nur gibt es oft Situationen, wo dies nicht rein schematisch geschehen kann, sondern eine differenzierende und kritische Betrachtung der Messumstände erfordert. Grundsätzlich falsch ist insbesondere die Behauptung, dass Fehler nicht abgeschätzt werden können, weil sie zu klein oder zu groß seien!

ANLAGE II	GPI
GRAFISCHE DARSTELLUNGEN	

und

GRAFISCHE AUSWERTUNG VON FUNKTIONEN

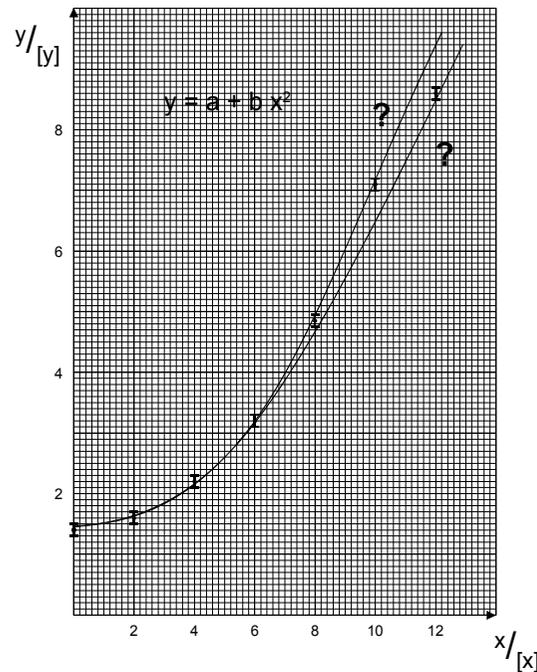
**Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte.**

Der Mensch besitzt ein sehr großes visuelles Aufnahmevermögen. Dies ist die Grundlage der Leistungsfähigkeit grafischer Darstellungen, mit denen Information in herausragender Weise veranschaulicht und vermittelt werden kann.

Grafische Darstellungen dienen der anschaulichen Darstellung von Messergebnissen, erlauben schließende Beurteilungen und Vergleiche, ermöglichen eine effiziente Auswertung der Parameter und stellen eine praktische Form der Darstellung numerischer Zusammenhänge als Tabellenersatz dar.

Grafische Darstellungen sind darüber hinaus nützliche Hilfsmittel zur augenblicklichen Kontrolle einer Messung. Es ist in vielen Fällen vorteilhaft, eine Messung nicht nur in Form der Zahlenwerte zu dokumentieren, sondern zusätzlich während der Messung grafisch darzustellen. Sprünge in einer sonst glatten Kurve machen dann auf etwaige Messfehler aufmerksam und ermöglichen eine unmittelbare Prüfung der Messumstände, die später nur aufwendig oder unter Umständen gar nicht mehr durchgeführt werden kann (Fehler beim Ablesen eines Instrumentes, Messbereichsumschaltungen, plötzliche Änderung der Messbedingungen, Defekt eines Gerätes; siehe nachfolgendes Beispiel). Die sofortige Beurteilung der Messung hilft darüber hinaus, Parameter des Experiments besser zu wählen, lässt die Streuung der Messwerte erkennen und macht schnelle Auswertungen von Zwischenergebnissen möglich.

Der Einsatz von Taschenrechnern und Computern kann grafische Darstellung nicht ersetzen, vielmehr sind grafische Darstellungen oft die Voraussetzung für den sinnvollen Einsatz von Rechnern. Modellselektion für die Anpassungen, Eliminierung von Ausreißern u.ä. sind Probleme, mit denen selbst Großrechner überfordert sein können, die der Mensch aber durch einen Blick auf eine grafische Darstellung lösen kann.



**Beispiel 1: Qualitative Überprüfung einer Potenzfunktion durch eine linearisierte Darstellung.**

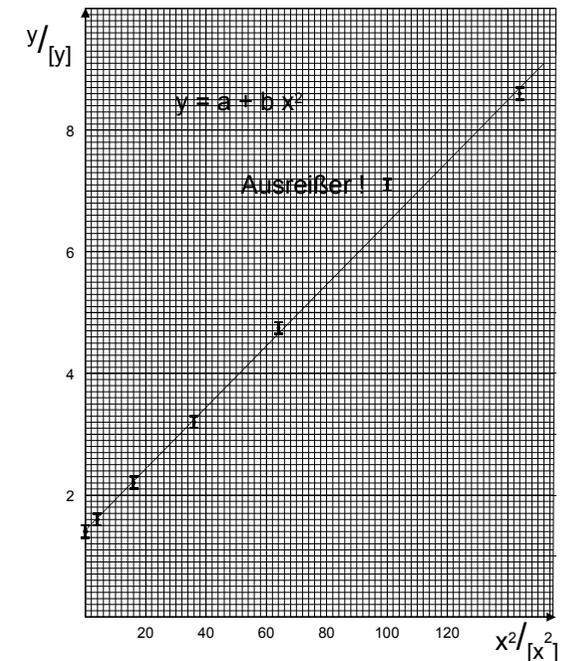
Die direkte Darstellung (oben) ermöglicht keine eindeutige Entscheidung über den gemessenen Kurvenverlauf.

Die linearisierte Darstellung (rechts) lässt dagegen den wahrscheinlichen Funktionsverlauf klar erkennen. Bei einer messbegleitenden Anfertigung der grafischen Darstellung hätte die vermutliche Falschmessung (Ausreißer) rechtzeitig erkannt und überprüft werden können.

Grafische Darstellungen

Die Aussagekraft grafischer Darstellungen hängt stark von ihrer inhaltlichen und äußeren Form ab.

Dazu gehören: die Wahl der *dargestellten Größen*, des *Koordinatensystems* (rechtwinklige Koordinaten, Polarkoordinaten), der *Achsenenteilung* (linear, logarithmisch), des *Achsenmaßstabes* und des dargestellten



Bereichs und nicht zuletzt eine *sorgfältige und saubere Ausführung* der Darstellung. Eine grafische Darstellung muss so ausgeführt werden, dass sie den Sachverhalt vollständig und korrekt wiedergibt. Durch die Art der Ausführung darf weder Information verlorengehen, noch z.B. eine zu große Genauigkeit vorgetäuscht werden.

Netzpapier

Die Arbeitsexemplare grafischer Darstellungen (im Praktikum gleichzeitig Ausführungen für den Bericht) müssen auf (Original-) Netzpapier mit geeigneten Achsenteilungen angefertigt werden:

- *mm-Papier* für lineare Darstellungen,
- *einfach- und doppelt logarithmisches Papier* für die Darstellungen von Exponential- und Potenzfunktionen,
- *Polarkoordinatenpapier* und *Wahrscheinlichkeitspapier* für Polarfunktionen und Normalverteilungen etc.

### Achsenmaßstäbe und Achsenteilungen

Die Achsenmaßstäbe und die dargestellten Intervalle müssen so gewählt werden, dass die durch die Messung gegebene Information vollständig und beurteilbar (übersichtlich) wiedergegeben wird.

Durch die Wahl des Maßstabes und des Ausschnittes dürfen im Rahmen der endlichen Zeichengenauigkeit weder Information noch Genauigkeit verloren gehen.

Zeigen die dargestellten Größen eine ausgeprägte Abhängigkeit voneinander, so sollte die zur Verfügung stehende Fläche voll ausgeschöpft werden. Wird das Verhalten einer mehr konstant bleibenden Größe dargestellt, so ist ein geeigneter Kompromiss zu wählen. Ein zu wenig gestreckter Maßstab würde mögliche Tendenzen nicht erkennen lassen, ein zu stark gestreckter Maßstab wegen der Streuung der Messwerte eine unübersichtliche und schlecht zu beurteilende Punktwolke ergeben ("Sternenhimmel").

Die Darstellung muss eine vollständige Beurteilung des Sachverhaltes ermöglichen.

So muss bei einer erwarteten Nullpunktgeraden der Nullpunkt in die Darstellung einbezogen werden, um den Verlauf der (u.U. extrapolierten) Ausgleichsgeraden am Nullpunkt beobachten und beurteilen zu können.

Die Teilung der Achsen soll einfach sein.

Z.B. ein, zwei oder fünf Einheiten pro cm des Netzpapiers bei linearen Darstellungen. Komplizierte Teilungen machen das Ablesen und Eintragen mühsam und sind häufige Ursache von Fehlern.

### Achsenbezeichnungen

Die Hauptteilstriche der Achsen müssen mit Maßzahlen versehen werden, die gesamten Achsen werden mit den durch die Einheiten dividierten Symbolen der dargestellten Größen bezeichnet.

Jeder Messwert ist ein Produkt aus Maßzahl und Einheit, so dass die durch die Achsen dargestellten Maßzahlen allein Quotienten aus Größe und Einheit darstellen. Zur Wahrung der Übersichtlichkeit wird empfohlen, Symbol und Einheitenzeichen (Zähler und Nenner) klar voneinander getrennt zu halten und nicht weiter miteinander zu verrechnen. z.B.:

$$\frac{v}{10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \text{und nicht} \quad 10^2 \frac{v}{\text{ms}^{-1}}$$

$$\frac{1}{T} / 10^{-3} \text{K}^{-1} \quad \text{und nicht} \quad \frac{10^3 \text{K}}{T}$$

Falsch ist es, Einheiten in eckige Klammern zu setzen.

Eckige Klammern werden um Größen zur Bezeichnung deren Einheit gesetzt, z.B. [p] = mmHg.

### Eintrag der Messwerte

Messwerte werden durch Punkte, Kreuze oder kleine Kreise markiert.

Die Fehler können direkt in Form von *Fehlerbalken* in die Darstellung eingetragen werden. Im Allgemeinen ist es ausreichend, nur einige, repräsentative Fehlerbalken einzuzeichnen.

### Kurven (Ausgleichskurven, Theoriekurven)

Durchgezogene Kurven in grafischen Darstellungen können (im Allgemeinen zwei) unterschiedliche Bedeutungen haben. Die genaue Bedeutung einer durchgezogenen Kurve muss deshalb in der Darstellung erläutert werden.

Zum einen können *Ausgleichskurven* (Anpassungskurven) zu den Messpunkten als durchgezogene Linien eingetragen werden. Als Ausgleichskurve bezeichnet man eine Funktionskurve, deren qualitative Form durch eine zugrunde gelegte Theorie bzw. ein Modell vorgegeben wird, deren quantitativer Verlauf aber (Parameter) möglichst gut (Minimum der quadratischen Abweichung) den Messwerten angepasst wird.

Zum anderen können auch rein theoretische Verläufe (*Theoriekurven*) durch durchgezogene Linien gekennzeichnet werden, wobei die Funktion qualitativ und quantitativ durch modellmäßige Überlegungen vorgegeben ist.

Nicht sinnvoll ist es, Messpunkte einzeln durch einen *Polygonzug* zu verbinden! Zum einen widerspricht das der statistischen Zufälligkeit der einzelnen Messwerte,

zum anderen verhalten sich, zumindest im makroskopischen Bereich, physikalische Vorgänge im Allgemeinen stetig differenzierbar, d.h. "glatt".

### Legende (Bezeichnungen)

Die gesamte Darstellung muss eine ausreichende und eindeutige Erklärung des dargestellten Zusammenhangs enthalten (Legende)!

Dazu gehören sowohl übergeordnete Bezeichnungen des dargestellten Sachverhaltes (z.B. "Drehbewegung; Winkel-Zeit-Gesetz") als auch Hinweise, die den Zusammenhang zum Protokoll herstellen oder die genaueren Messumstände beschreiben (z.B. "Messreihe II; ohne Zusatzgewichte").

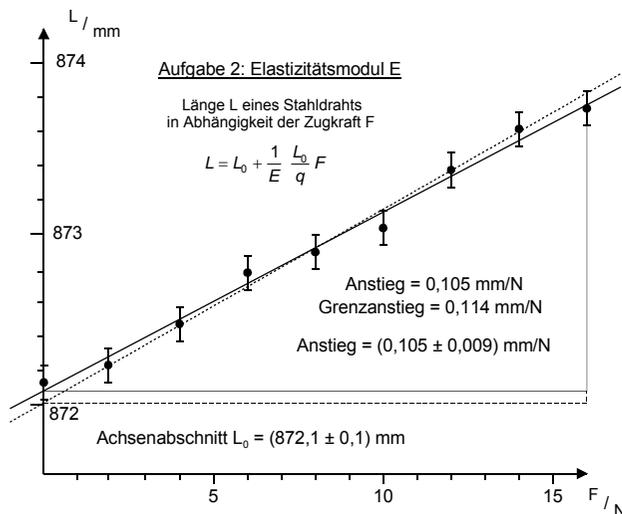
### GRAFISCHE AUSWERTUNG VON FUNKTIONEN

Die numerische Auswertung bzw. Anpassung einer Funktion an eine Stichprobe zufällig streuender Messwerte erfordert erheblichen rechnerischen Aufwand. Häufigste Aufgabe ist es, eine Ausgleichsgerade, d.h. eine lineare Funktion anzupassen (*lineare Regression*).

Dies kann einfach, anschaulich und mit sehr gutem Ergebnis mit Hilfe einer grafischen Darstellung durchgeführt werden, indem, unter kritischer Rücksichtnahme auf die Lage und Verteilung der Punkte, zu den Messwerten eine Ausgleichsgerade (Bestgerade) gewählt und (mit dem Lineal) eingetragen wird (siehe Beispiel 2 auf der Folgeseite).

Die Leistungsfähigkeit dieser "visuellen Mittelwertrechnung" wird deutlich beim Vergleich mit den aufwendigen Rechenausdrücke des numerischen Verfahrens (siehe Darstellung *LINEARE REGRESSION*).

Zusätzlich ist zu berücksichtigen, dass auch bei einer numerischen Auswertung die Anfertigung einer grafischen Darstellung zur Beurteilung der Anpassung unerlässlich ist, denn: das Rechenverfahren passt an jede vorliegende Punktemenge eine Gerade an, auch wenn die Werte keinem linearen Verlauf folgen.



**Beispiel 2: Grafische Auswertung einer linearen Funktion** (auf Darstellung eines mm-Netzes wurde aus wiedergabetechnischen Gründen verzichtet)

Konstante Fehler  $\Delta L = 0,1$  mm und  $\Delta F = 0,001$  N (Gewichtskraft  $m \cdot g$ ; Wägefehler 0,1 g). Der Fehler  $\Delta F$  kann im Rahmen von  $\Delta L$  und der Zeichengenauigkeit vernachlässigt werden. Qualitativ wird ein linearer Zusammenhang gut wiedergegeben. Die Streuung des Messpunkts stimmt mit den Fehlerbalken überein. Anstiegsquotienten:

$$\text{Anstieg} = \frac{(873,76 - 872,08) \text{ mm}}{(16 - 0) \text{ N}} = 0,105 \text{ mm/N}$$

$$\text{Grenzanstieg} = \frac{(873,84 - 872,02) \text{ mm}}{(16 - 0) \text{ N}} = 0,114 \text{ mm/N}$$

Auch höhere Funktionen können durch geeignete Linearisierungen grafisch angepasst werden (s.u.).

Nichtlinearisierbare Funktionen lassen sich nur numerisch auswerten, wobei der rechnerische Aufwand allerdings außerordentlich hoch ist. Grundlage aller Anpassungsverfahren ist die Methode der kleinsten Abweichungsquadrate.

### Grafische Parameterschätzung linearer Funktionen

Entsprechend der Fehlerstatistik sollte die zufällige Streuung von Messpunkten einer Normalverteilung folgen:

Die Ausgleichsgerade ist somit so zu wählen, dass die Messpunkte symmetrisch zu ihr liegen, wobei einzelne, weit entfernte Punkte unberücksichtigt bleiben dürfen, da sie eine große Irrtumswahrscheinlichkeit besitzen (Ausreißer).

Ist neben der zufälligen Streuung eine systematische Tendenz erkennbar (z.B. eine leichte Krümmung), so müssen dem physikalischen Problem oder der Messmethode angemessene zusätzliche Kriterien berücksichtigt werden (siehe ergänzende Hinweise).

Hervorragend geeignet zur Festlegung einer Ausgleichsgeraden ist ein Plexiglaslineal (durchsichtige Folie), das in der Mitte einen schwarzen Strich (Linie) ohne jede weiteren Markierungen oder Teilungen trägt.

Schätzwerte für die Parameter der Funktion (Achsenabschnitt, Anstieg) können dann durch die Ausgleichsgerade bestimmt werden:

Der Achsenabschnitt kann direkt am Schnittpunkt der Ausgleichsgeraden mit der y-Achse (die dann auch über der Stelle  $x = 0$  errichtet sein muss) abgelesen werden.

Zur Bestimmung des Anstieges wird ein Anstiegsdreieck festgelegt, und der Differenzenquotient berechnet.

Das Anstiegsdreieck soll möglichst groß gewählt werden, um Ablesefehler aus der Darstellung vernachlässigbar klein zu halten. Wegen der zufälligen Streuung der Messpunkte wird man selten Messpunkte selbst zur Berechnung des Differenzenquotienten heranziehen können. Zur Kontrolle der Auswertung soll das Anstiegsdreieck mit in die Darstellung eingetragen werden.

Bei der Bestimmung der Parameter ist zu berücksichtigen, dass die Variablen im Allgemeinen dimensionierte Größen sind, und auch Achsenabschnitt und Anstieg (Differenzenquotient) dementsprechend Einheiten tragen.

### Grafische Fehlerschätzung

Zur grafischen Bestimmung der Fehler wird zusätzlich eine *Grenzgerade* zugrunde gelegt und eingetragen.

Die Grenzgerade ist eine Gerade, die mit den Messwerten unter Berücksichtigung von Streuung und Fehlerbalken noch verträglich ist. Die Wahl der Lage der Grenzgeraden erfordert eine kritische Betrachtung der Messwerte unter Berücksichtigung von Streuung und Fehlerbalken. (Im Rahmen des Praktikums ist es für alle Fälle ausreichend, nur eine der beiden möglichen Grenzgeraden festzulegen).

Die Grenzgerade markiert auf der Ordinate (y-Achse) direkt das Fehlerintervall  $\Delta y$ . Als Fehler des Anstieges wird die Differenz zwischen Ausgleichsanstieg und Grenzanstieg herangezogen.

Im Sinne der Fehlerbetrachtung ist eine Messung als konsistent zu betrachten, wenn die Fehlerbalken und die mittlere Streuung von etwa gleicher Größe sind. Zu kleine Fehlerbalken lassen auf unberücksichtigte Fehlerquellen oder eine falsche oder knappe Fehlerabschätzung schließen. Zu große Fehlerbalken deuten wieder auf inkorrekte Fehlerabschätzungen oder auf zusätzliche systematische Fehler hin. Beispiel:

Misst man eine Spannung (z.B. in Abhängigkeit von der Belastungsstromstärke), so wird die Streuung der Werte wesentlich kleiner als der durch die Güteklasse des Messinstrumentes gegebene Fehler bleiben. Die Güteklasse beschreibt im Wesentlichen den systematischen Kalibrierfehler des Messwerkes. Für die Fehler der Parameter folgt, dass der Achsenabschnitt mit der vollen, durch die Güteklasse bedingten Unsicherheit behaftet ist. Der Anstieg kann jedoch mit einer besseren, aus der Streuung resultierenden Genauigkeit angegeben werden, da eine systematische Verschiebung der Punkte nach oben oder nach unten den Anstieg nicht beeinflusst.

Im allgemeinen kann die Wahl der Grenzgeraden aus den genannten Gründen mehr an der Streuung der Messpunkte orientiert werden, wobei als zusätzliches Kriterium die Anzahl der Messwerte berücksichtigt werden muss (entsprechend der Steigerung der Genauigkeit des Mittelwertes mit der Zahl der Messwerte). Aber:

Eine korrekte Berücksichtigung der Zahl der Messpunkte ist visuell jedoch nur schwer möglich, und grafische

Auswertung liefern in der Regel deutlich zu große Fehler.

Liegen höhere Anforderungen an die Vergleichbarkeit und Genauigkeit der Fehleraussagen vor, so muss auf eine numerische Auswertung zurückgegriffen werden.

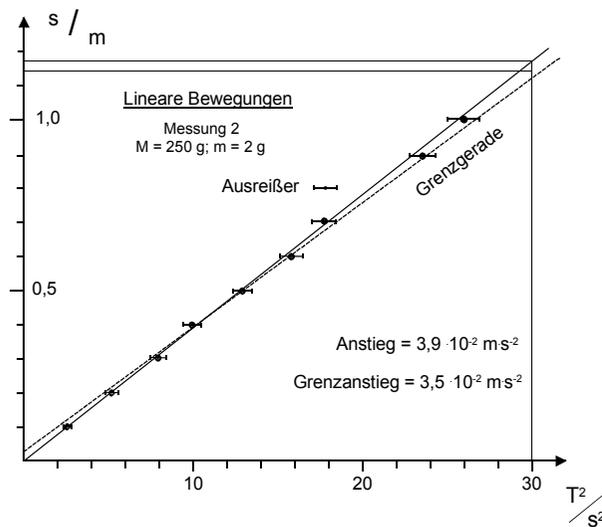
Auswertung nichtlinearer Funktionen

Offt müssen nichtlineare Funktion überprüft und ausgewertet werden, eine visuelle Beurteilung und grafische Auswertung ist jedoch nur für lineare Zusammenhänge möglich.

In vielen Fällen kann aber durch Wahl geeigneter Variablen (Substitution) oder durch eine rechnerische Umformung (Transformation) eine Linearisierung der Funktion bzw. der Darstellung erreicht werden.

Variablensubstitution

Die Parabel  $s = \frac{1}{2} a t^2$  wird linear, wenn  $s$  nicht gegen  $t$ , sondern gegen  $t^2$  aufgetragen wird (siehe folgende Beispiel). Die "Projektion"  $K = K_0 \cos \omega t$  wird (im Bereich für  $\omega t$  von 0 bis  $\pi/2$ ) linear, wenn  $K$  nicht gegen  $t$ , sondern gegen  $\cos \omega t$  aufgetragen wird.



Beispiel 3: Auswertung einer quadratischen Funktion durch linearisierte Darstellung

Konstante Messfehler  $\Delta s = 0,001 \text{ m}$  (vernachlässigbar) und  $\Delta t = 0,04 \text{ s}$ . Der Fehler von  $t^2$  beträgt  $\Delta t^2 = 2 t \Delta t$ . Da eine Nullpunktgerade erwartet wird und im Rahmen der Fehler offenbar auch vorliegt, werden Ausgleichsgerade und Grenzgerade durch den Nullpunkt gelegt.

$$\text{Anstieg} = \frac{(1,17 - 0) \text{ m}}{(30 - 0) \text{ s}^2} = 3,90 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$$

$$\text{Grenzanstieg} = \frac{(1,14 - 0) \text{ m}}{(30 - 0) \text{ s}^2} = 3,80 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$$

Einfachlogarithmische Darstellungen

Häufig sind Exponentialfunktionen (e-Funktionen) der Form

$$y = C e^{-kx}$$

auszuwerten. Eine Linearisierung von Exponentialfunktionen kann durch Logarithmieren der Funktionsgleichung erreicht werden:

$$\ln y = \ln C - k x \quad \text{oder} \quad \log y = \log C - k x \log e$$

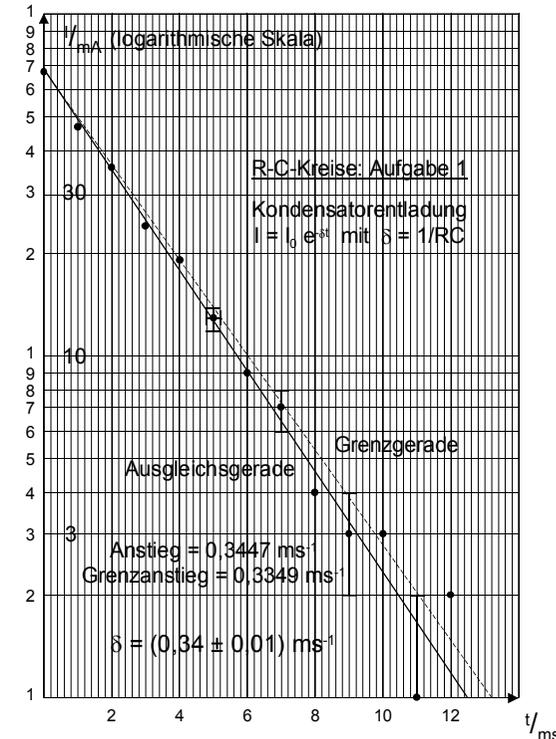
Formal ergibt sich daraus eine lineare Funktion, wenn zusätzlich  $\ln y$  (bzw.  $\log y$ ) als Variable substituiert wird.

Wegen der praktischen Bedeutung ist Netzpapier erhältlich, dessen eine Achse logarithmisch geteilt ist (einfachlogarithmisches Papier), so dass die  $y$ -Werte ohne Berechnung der Logarithmen direkt eingetragen werden können.

Dem Papier liegen üblicherweise dekadische Logarithmen zugrunde, wobei eine Einheit im logarithmischen Maßstab immer einer Dekade der Ausgangsgröße entspricht.

Die absolute Lage der logarithmischen Achse ist (genau wie bei linearen Teilungen) unbestimmt und muss in Zusammenhang mit der Größenordnung der Messwerte festgelegt werden.

Auswertung und Fehlerbestimmung erfolgen grundsätzlich wie vorstehend beschrieben. Auf zwei wichtige Punkte (Fehlerquellen!) soll jedoch hingewiesen werden.



Beispiel 4: Auswertung einer Exponentialfunktion durch einfachlogarithmische Darstellung.

Logarithmus des Stroms über der Zeit bei einer Kondensatorentladung. Die Messfehler der Strom- und Zeitwerte betragen einheitlich 1 mA bzw. 0,5 ms. Zur Berechnung des Anstiegs wurden jeweils die beiden  $I$ - und  $t$ -Achsenabschnitte herangezogen.

$$\text{Anstieg} = \frac{\ln 1 - \ln 68 = \ln \frac{1}{68}}{12,24 \text{ ms}}$$

$$\text{Grenzanstieg} = \frac{\ln 1 - \ln 68 = \ln \frac{1}{68}}{12,60 \text{ ms}}$$

Bei der Bestimmung des Differenzenquotienten muss berücksichtigt werden, dass das Logarithmieren der Variablen durch einen logarithmischen Maßstab ersetzt wurde, und die logarithmische Achse weiterhin die Zahlenwerte der Ausgangsgröße trägt.

Für die Berechnung des Differenzenquotienten können der Darstellung somit nur (zwei)  $y$ -Werte entnommen werden, die dann logarithmiert werden müssen. Da diese rechnerische Auswertung von der grafischen Darstellung unabhängig ist, wird man natürliche Logarithmen wählen um den Exponentialkoeffizienten ( $k$ ) direkt zu erhalten.

Auch die Konstruktion der Grenzgeraden erfordert eine besondere Betrachtungsweise:

Durch die "Streckung" des Maßstabes "nach unten" nehmen (bei konstanten Fehlern) die Streuung der Messwerte und die Größe der Fehlerbalken mit kleiner werdenden Werten stark zu. Der logarithmische Maßstab *wichtet* die Messpunkte mit ihren relativen Fehlern, also mit der Genauigkeit (im logarithmischen Maßstab werden durch gleiche Strecken gleiche Faktoren dargestellt). Entsprechend muss die Lage der Ausgleichsgeraden und der Grenzgeraden mehr an den größeren Messwerten mit ihrer besseren Genauigkeit (ihrem größeren Gewicht) orientiert werden.

#### Doppeltlogarithmische Darstellungen

Potenzfunktionen mit beliebigem Exponenten können durch eine doppeltlogarithmische Darstellung linearisiert werden.

#### Anzahl und Lage der Messpunkte

Als grundsätzliches Problem bei der experimentellen Überprüfung funktionaler Abhängigkeiten müssen Überlegungen über die Anzahl und Lage der Messpunkte getroffen werden, wobei die Maximalforderung (unendlich viele, infinitesimal dichte Messwerte) durch das Auflösungsvermögen und die zur Verfügung stehende Zeit eingeschränkt werden.

Bei einfachen Kurvenformen (lineare Funktion oder linearisierbare Funktionen) und geringerer Streuung kann eine (aus statistischer Sicht sehr geringe Anzahl) von zehn Messwerten ausreichend sein.

Für die Wahl der Lage der Punkte ist zu berücksichtigen, ob die Funktion noch qualitativ überprüft oder nur quantitativ ausgewertet werden muss. Für eine qualitative Überprüfung ist eine äquidistante Lage der Messwerte günstig. Muss (im anderen Fall) bei gesichertem linearen Verlauf nur noch der Anstieg einer Geraden bestimmt werden, so ist es besser, ein möglichst großes Intervall mit den Messwerten abzudecken, und jeweils die Hälfte der Messungen an der unteren und oberen Intervallgrenze durchzuführen.

#### Ergänzende Hinweise

In vielen Fällen ist eine formalistische und unkritische Anwendung der angegebenen Grundsätze nur bedingt möglich. Im Folgenden werden einige Sonderfälle diskutiert und Beispiele für Anpassungen von grafischen Darstellungen an spezielle Anforderungen gegeben.

In einem Experiment wird ein linearer Zusammenhang erwartet. Die Messung ergibt aber einen gekrümmten Verlauf der Messpunkte. Ist die Krümmung ausgeprägt systematisch, so muss angenommen werden, dass eine als konstant vorausgesetzte Größe eine Abhängigkeit von den Messgrößen zeigt. Sehr unsystematische Krümmungen sind schwieriger zu erklären und lassen zusätzlich auf Fehler bei der Messung oder Auswertung schließen.

Bei Messung einer Dampfdruckkurve wird (in einer geeigneten logarithmischen Darstellung) des Dampfdruckes in Abhängigkeit von der Temperatur eine Gerade erwartet, wobei die Verdampfungswärme als Konstante in den Anstieg eingeht. Da die Verdampfungswärme aber von der Temperatur abhängt, ergibt sich ein gekrümmter Kurvenverlauf. Für einen solchen Fall kann eine Tangente in einem Punkt gewählt werden, aus deren Anstieg sich die Verdampfungswärme für diese bestimmte Temperatur ergibt.

In anderen Fällen kann aber auch eine Ausgleichsgerade angemessen sein, die alle Messpunkte berücksichtigt, und damit eine Mittelung darstellt. Aus dem Anstieg werden entsprechend gemittelte Werte resultieren.

In beiden Fällen muss die spezielle Auswertung auch bei der Fehlerbestimmung berücksichtigt werden (bei der Mittelung z.B. durch eine Grenzgerade, die die gesamte Krümmung erfasst).

Unerwartete Kurvenverläufe machen eine kritische Diskussion der Messung notwendig. Sie haben immer einen Grund, der herausgefunden werden muss. Ein unkritisches Aufgeben der Auswertung ("es ist etwas Falsches herausgekommen") geht an der elementaren Problemstellung vorbei, aus Messung und Beobachtungen eine Aussage abzuleiten.

Es kann vorkommen, dass die Menge der Messpunkte klar in mehrere Bereiche unterteilt ist, die entweder verschiedene Anstiege haben, oder gegeneinander versetzt sind. Wieder ist abzuschätzen, ob die beobachteten Vorgänge selbst dafür verantwortlich sind (z.B. durch Überlagerung verschiedener Beiträge, die dann durch eine geeignete Auswertung auseinanderzuhalten wären), oder ob nicht berücksichtigte Einflüsse durch das Experiment (z.B. Messbereichsumschaltungen) oder Fehler in der Auswertung vorliegen. In jedem Fall muss das beobachtete Verhalten oder die vermuteten Fehler durch eine kritische Diskussion erklärt werden.

Grafische Darstellungen werden häufig zum Vergleich verschiedener Vorgänge herangezogen, die in einem gemeinsamen Diagramm dargestellt sind. Liegen die zu vergleichenden Punktemengen weit auseinander, so wird die Darstellung, bzw. der Vergleich unbefriedigend. Es müsste ein großer Maßstab verwendet werden, um die Messwerte gemeinsam darstellen zu können, der aber eine sehr geringe Empfindlichkeit für die einzelnen Messungen zur Folge hätte.

Beispiel: Für Wasser und eine bestimmte Glassorte soll der Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellenlänge dargestellt werden (Dispersion). Beide Größen sind nur wenig abhängig von der Wellenlänge, haben aber eine große Differenz untereinander. Eine geeignete Darstellung erhält man, indem man einen gestreckten Maßstab wählt, aber beide Messungen "übereinander schiebt", und jeder der Messungen eine eigene Achse einrichtet.

Übereinanderlegungen, Weglassen eines Teiles (Zwischenteiles) einer Achse oder Verändern von Maßstäben gehören zu den gebräuchlichen Methoden in vergleichenden grafischen Darstellungen.

## ANLAGE III

### Maße und Einheiten (SI)

GPI

#### Physikalische Größen

Ein Grundbegriff der Physik ist die *physikalische Größe*. Man bezeichnet damit eine zumindest prinzipiell beobachtbare und messbare Erscheinung, mit Hilfe der ein physikalischer Vorgang beschrieben werden kann. Einfache physikalische Größen sind Länge, Zeit, Geschwindigkeit, Kraft, Arbeit, elektrische Spannung, magnetische Feldstärke, Temperatur, u.s.w.

Man unterscheidet *Grundgrößen* (Basisgrößen), die axiomatisch festgelegt werden, und *abgeleitete Größen*, die sich durch physikalische Zusammenhänge aus den Grundgrößen darstellen lassen.

Alle Größen sind gleichberechtigt, und die Festlegung einer bestimmten Grundgrößen-Basis ist konventionell. Durch internationale Vereinbarungen ist ein System festgelegt (*SI; Système International d'Unites*), das auf folgende Grundgrößen aufbaut:

Länge  $L$   
Masse  $m$   
Zeit  $t$   
Ladungsstrom  $I$  (elektrische Stromstärke)  
Temperatur  $T$   
Stoffmenge  $\nu$   
Lichtstärke  $I$  (physiologische Zusatzgröße)

Auch für die Symbolbezeichnungen der Größen (Buchstabensymbole) gibt es ein internationales Reglement, an das sich im Praktikum und innerhalb der Vorlesungskurse weitgehend gehalten wird. Eine Zusammenstellung ist weiter unten aufgeführt.

#### Dimension und Einheit

Die physikalischen Größen haben sowohl qualitative Eigenschaften als auch quantitative Ausprägungen.

Die Qualität einer Größe wird durch ihre *Dimension* bestimmt. Die Dimension der Grundgrößen entsprechen den Begriffen selbst (Länge, Masse, Zeit, Stromstärke, Temperatur, Stoffmenge). Die Dimensionen der abgeleiteten Größen ergeben sich als Potenzprodukte der

Grunddimensionen. Die Dimension der Beschleunigung  $a$  ist demnach *Länge* durch *Zeit*<sup>2</sup>, die der Kraft  $F$  (= *Masse*  $\times$  *Beschleunigung*) *Masse* mal *Länge* durch *Zeit*<sup>2</sup>, die der Arbeit  $W$  (= *Kraft*  $\times$  *Weg*) *Masse* mal *Länge* durch *Zeit*<sup>2</sup>.

Zur Bezeichnung der Dimension einer Größe (z.B.  $A$ ) schreibt man:

$$\dim A = \frac{\text{Masse Länge}}{\text{Zeit}^2}$$

Die quantitative Angabe einer physikalischen Größe erfolgt durch eine *Maßzahl* und eine *Einheit*. Die Einheit legt eine Vergleichsgröße fest, und die Maßzahl sagt aus, wie oft diese Einheit in der zu beschreibenden Größe enthalten ist:

$$\text{Größenwert} = \text{Maßzahl} \times \text{Einheit}$$

Die Einheiten besitzen Namen und werden ebenfalls mit Buchstabensymbolen bezeichnet. Die Einheit der Zeit ist die Sekunde (1 s oder kurz s). Zur Bezeichnung einer (beliebigen) Einheit einer Größe benutzt man eckige Klammern. Will man ausdrücken, dass ein Druck in mm Quecksilbersäule angegeben wird, so schreibt man

$$[p] = \text{mm Hg}$$

#### Système Internationale d'Unites

Ein *Einheitensystem*, das auf eine Basis unabhängiger Grundgrößen aufbaut, und die Einheiten aller weiteren Größen als abgeleitete Einheiten aus den Verknüpfungsgleichungen herleitet, wird als *kohärentes Einheitensystem* bezeichnet.

Im Jahre 1948 beauftragte die 9. Generalkonferenz für Maße und Gewichte (CGPM) mit ihrer Resolution 6 das internationale Komitee für Maße und Gewichte (CIPM) damit, "*die Schaffung einer vollständigen Neuordnung der Einheiten im Messwesen zu prüfen*". Das daraufhin entstandene und weiterentwickelte System "*praktischer Einheiten*" führt den Namen *Système Internationale d'Unites* oder kurz *SI* und hat sich zunehmend in allen Bereichen der Physik, insbesondere der experimentellen Physik, und in den Gesetzgebungen der National-

staaten über Maße und Gewichte durchgesetzt und wird auch im Praktikum (fast) ausschließlich verwendet.

Das SI besteht aus den *Basiseinheiten*, den sogenannten *Ergänzungseinheiten* und den *abgeleiteten Einheiten*. Im Folgenden ist eine kurze Übersicht über das SI mit den *Vorsätzen für Teile und Vielfache* und einer Auswahl abgeleiteter Größen zusammengestellt.

Die Grundeinheiten-Basis des SI wurde für den Bereich der Photometrie um eine Einheit für die physiologisch bewertete Lichtstärke mit der Einheit Candela erweitert. Diese Größe wäre für den Aufbau eines rein physikalischen Einheitensystems nicht erforderlich.

#### Definitionen der Grundgrößen

- 1 Meter ist gleich der Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während eines Zeitintervalls von 1/299792458 Sekunden durchläuft. (Damit ist das Meter eine implizite Basisgröße, die sich auf die eigentlichen Grundgrößen Zeit und Lichtgeschwindigkeit aufbaut).
- 1 Kilogramm ist die Masse eines im *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM) in Sèvres bei Paris aufbewahrten Zylinders von ca. 39 mm Durchmesser und gleich großer Höhe aus einer Legierung von 90 Teilen Platin und 10 Teilen Iridium (Massenprototyp).
- 1 Sekunde ist die Dauer von 9.192.631.770 Schwingungen der Strahlung des atomphysikalischen Übergangs in der Hyperfeinstruktur des Atoms <sup>133</sup>Cs, und zwar des ungestörten Überganges  $F=4, m_F=0$  nach  $F=3, m_F=0$  des  $2S_{1/2}$ -Grundzustands.
- 1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stroms, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 m voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern elektrodynamisch eine Kraft von  $2 \cdot 10^{-7}$  Newton je Meter Leiterlänge hervorruft.

- **1 Kelvin** ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser. (Der Nullpunkt der Celsiusskala wurde exakt zu 273,15 K definiert).

*Im Alltag wird weiterhin die Celsiusskala als Temperaturskala gebräuchlich bleiben. Für die Verwendung beider Skalen nebeneinander gilt:*

*Temperaturen können entweder in K oder in °C angegeben werden, wobei die Einheit Kelvin zu bevorzugen ist.*

*Zur Umrechnung gilt per Definition:  $T^{\circ}C = T/K + 273,15$ .*

*Temperaturdifferenzen sind grundsätzlich in K anzugeben (z.B.  $30,7^{\circ}C - 21,3^{\circ}C = 9,4 K$ ).*

- **1 Mol** ist diejenige Menge eines Stoffes, die genau so viel Teilchen enthält, wie in 12 Gramm des Kohlenstoff-Nuklids  $^{12}C$  enthalten sind. (Diese Anzahl wird Avogadro'sche Zahl genannt).
- **1 Candela** ist die Lichtstärke einer Strahlungsquelle, welche monochromatische Strahlung der Frequenz  $540 \cdot 10^{12}$  Hz in eine bestimmte Richtung aussendet, in der die Strahlungsstärke  $1/683$  Watt durch Steradian beträgt.

Ergänzungsgrößen

Winkel	$\alpha$	$\alpha = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}}$	$1 \frac{m}{m} = 1 \text{ (rad= Radiant)}$
Raumwinkel	$\Omega$	$\Omega = \frac{\text{Fläche}}{\text{Radius}^2}$	$1 \frac{m^2}{m^2} = 1 \text{ (sr = Steradian)}$

Vorsätze für Teile und Vielfache

$10^{-18}$	a- (Atto-)	$10^{-2}$	c- (Zenti-)	$10^3$	k- (Kilo-)
$10^{-15}$	f- (Femto-)	$10^{-1}$	d- (Dezi-)	$10^6$	M- (Mega-)
$10^{-12}$	p- (Pico-)			$10^9$	G- (Giga-)
$10^{-9}$	n- (Nano-)	$10^1$	D- (Deka-)	$10^{12}$	T- (Tera-)
$10^{-6}$	$\mu$ - (Mikro-)	$10^2$	h- (Hekto-)	$10^{15}$	P- (Peta-)
$10^{-3}$	m- (Milli-)			$10^{18}$	E- (Exa-)
			wissenschaftlich weniger gebräuchlich und zu vermeiden		

Mechanik, Wärme, Hydrodynamik

Geschwindigkeit	$v$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$1 \frac{m}{s} = 1 m s^{-1}$
Winkelgeschwindigkeit	$\omega$	$\omega = \frac{d\Phi}{dt}$	$\frac{1}{s} = 1 s^{-1}$

Beschleunigung	$a$	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$	$1 \frac{m}{s^2} = 1 m s^{-2}$
Winkelbeschleunigung	$\alpha$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\Phi}{dt^2}$	$\frac{1}{s^2} = 1 s^{-2}$
Frequenz	$\nu$	$\nu = \frac{1}{T}$	$\frac{1}{s} = 1 s^{-1} = 1 \text{ Hz (Hertz)}$
Kreisfrequenz	$\omega$	$\nu = \frac{2\pi}{T}$	$\frac{1}{s} = 1 s^{-1}$
Impuls	$p$	$p = m \vec{v}$	$1 \frac{kg m}{s} = 1 kg m s^{-1}$
Drehimpuls	$L$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$1 \frac{kg m^2}{s} = 1 kg m^2 s^{-1}$
Kraft	$F$	$F = m \vec{a}$	$1 \frac{kg m}{s^2} = 1 N \text{ (Newton)}$
Drehmoment	$M$	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	1 N m
Trägheitsmoment	$I$	$I = \int_v r^2 dm$	1 m <sup>2</sup> kg
Arbeit Energie	$W$ $E$	$W = \int F d\vec{s}$	1 N m = 1 J (Joule)
Leistung	$P$	$P = \frac{dW}{dt}$	$1 \frac{J}{s} = 1 W \text{ (Watt)}$
Dichte	$\rho$	$\rho = \frac{dm}{dV}$	$1 \frac{kg}{m^3} = 1 kg m^{-3}$
Druck	$p$	$p = \frac{F}{A}$ ältere Einheiten	$1 \frac{N}{m^2} = 1 Pa \text{ (Pascal)}$ 1 bar (Bar) = $10^5$ Pa 1 Torr = 1,333 hPa
Wärmekapazität	$C$	$C = \frac{dQ}{dt}$	1 J K <sup>-1</sup>
Spannungskoeffizient	$\beta$	$p = p_0 (1 + \beta t)$	1 K <sup>-1</sup>
Dynamische Viskosität	$\eta$	$F = \eta A \frac{dv}{dz}$ ältere Einheiten	$1 \frac{Nm}{m^2 m/s} = 1 Pa s$ 1 P (Poise) = 0,1 Pa s
Kinematische Viskosität	$\nu$	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ ältere Einheit	$1 \frac{m^2}{s} = 1 m^2 s^{-1}$ 1 St (Stokes) = $10^{-4} m^2 s^{-1}$

Elektrodynamik

Elektrische Ladung	<b>Q</b>	$Q = \int I dt$	1 A s = 1 C (Coulomb)
Elektrisches Feld	<b>E</b>	$\vec{F} = Q \vec{E}$	$1 \frac{N}{C} = 1 V m^{-1}$
Elektrische Spannung	<b>U</b>	$U = \int \vec{E} d\vec{s}$	$1 \frac{Nm}{As} = 1 V$ (Volt)
Magnetisches Feld (magnetische Erregung)	<b>H</b>	$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int \vec{j} d\vec{A}$	$1 \frac{A}{m} = 1 A m^{-1}$
Magnetisches Feld (magnet. Flussdichte)	<b>B</b>	$U_{ind} = -\frac{d}{dt} (\int \vec{B} d\vec{A})$ ältere Einheit	$1 \frac{Vs}{m^2} = 1 T$ (Tesla) 1 G (Gauß) = $10^{-4}$ T
Magnetischer Fluss	<b>Φ</b>	$\Phi = \int \vec{B} d\vec{A}$	1 V s = 1 W (Weber)
Widerstand	<b>R</b>	$R = \frac{U}{I}$	$1 \frac{V}{A} = 1 \Omega$ (Ohm)
Impedanz	<b>Z</b>	$Z = \frac{U_0}{I_0}$	$1 \frac{V}{A} = 1 V A^{-1}$
Kapazität	<b>C</b>	$I_C = -C \frac{dU}{dt}$	$1 \frac{As}{V} = 1 F$ (Farad)
Induktivität	<b>L</b>	$U_L = -L \frac{dI}{dt}$	$1 \frac{Vs}{A} = 1 H$ (Henry)

Radioaktivität

Abklingkonstante	<b>δ</b>	$A = A_0 e^{-\delta t}$	$\frac{1}{s} = 1 s^{-1}$
Aktivität	<b>A</b>	$A = \frac{\text{Zerfälle}}{\text{Zeit}}$ ältere Einheit	$\frac{1}{s} = 1 Bq$ (Bequerel) 1 Ci (Curie) = $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq

Empfohlene Formelzeichen für physikalische Größen

Raum und Zeit

<b>x, y, z</b>	Kartesische Ortskoordinaten	<b>T</b>	Zeit
<b>r</b>	Ortsvektor	<b>T</b>	Periodendauer
<b>L, s</b>	Weglänge	<b>v, f</b>	Frequenz
<b>A, S</b>	Fläche	<b>ω</b>	Kreisfrequenz
<b>V</b>	Volumen	<b>τ</b>	Abklingkonstante (Zeitkonstante)
<b>α, β, ...</b>	ebener Winkel	<b>V</b>	Geschwindigkeit
<b>..., Θ, Φ</b>		<b>ω</b>	Winkelgeschwindigkeit
<b>ω, Ω</b>	Raumwinkel	<b>a</b>	Beschleunigung
<b>k</b>	Kreiswellenzahl	<b>α</b>	Winkelbeschleunigung
<b>α, δ</b>	Abklingkonstante (Dämpfungskoeffizient)	<b>g</b>	Fallbeschleunigung
		<b>c</b>	Vakuumlichtgeschwindigkeit

Mechanik

<b>M</b>	Masse	<b>ε</b>	Dehnung
<b>ρ</b>	Dichte	<b>E</b>	Elastizitätsmodul
<b>P</b>	Impuls	<b>G</b>	Schubmodul
<b>L</b>	Drehimpuls	<b>μ</b>	Poisson-Zahl
<b>I, J</b>	Trägheitsmoment	<b>η</b>	dynamische Viskosität
<b>F</b>	Kraft	<b>ν</b>	kinematische Viskosität
<b>G</b>	Gewichtskraft	<b>E</b>	Energie
<b>M</b>	Drehmoment	<b>E<sub>p</sub>, V</b>	potentielle Energie
<b>p</b>	Druck	<b>E<sub>k</sub>, T</b>	kinetische Energie
<b>σ</b>	Normalspannung	<b>W, A</b>	Arbeit
<b>τ</b>	Schubspannung	<b>P</b>	Leistung

Thermodynamik

<b>Q</b>	Wärmearbeit	<b>β</b>	Spannungskoeffizient
<b>T</b>	Kelvin-Temperatur	<b>λ</b>	Wärmeleitfähigkeit
<b>t</b>	Celsius-Temperatur	<b>A</b>	Temperaturleitfähigkeit
<b>S</b>	Entropie	<b>C</b>	Wärmekapazität
<b>U</b>	Innere Energie	<b>c</b>	spezifische Wärmekapazität
<b>F</b>	Freie Energie	<b>κ, γ</b>	Isentropenindex $c_p/c_v$
<b>H</b>	Enthalpie		

Elektrizität und Magnetismus

<b>Q</b>	Ladung	<b>B</b>	magnetische Feldstärke (magn. Flussdichte)
$\rho$	Raumladungsdichte	$\Phi$	magn. Fluss
$\sigma$	Flächenladungsdichte	$\mu_0$	magn. Feldkonstante
<b>V, <math>\Phi</math></b>	Elektrisches Potential	$\mu$	Permeabilität
<b>U, V</b>	el. Spannung	<b>M</b>	Magnetisierung
<b>E</b>	el. Feldstärke	<b>X<sub>m</sub>, <math>\kappa</math></b>	magn. Suszeptibilität
<b>D</b>	Dielektrische Verschiebung	<b>J</b>	magn. Polarisierung
$\epsilon$	Dielektrizitätskonstante	<b>R</b>	Widerstand
$\epsilon_0$	el. Feldkonstante	$\rho$	Spezifischer Widerstand
<b>P</b>	el. Polarisation	$\gamma, \sigma$	Leitfähigkeit
<b>p</b>	el. Dipolmoment	<b>Z</b>	Impedanz
<b>I</b>	(Ladungs-) Stromstärke	<b>C</b>	Kapazität
<b>j</b>	Stromdichte	<b>L</b>	Selbstinduktionskoeffizient
<b>H</b>	Magnetische Feldstärke (magn. Erregung)	<b>S</b>	Poynting-Vektor
		<b>A</b>	magn. Vektorpotential

Atom- und Kernphysik

<b>e</b>	Elementarladung	<b>A</b>	Massenzahl
<b>N</b>	Hauptquantenzahl	<b>Z</b>	Ordnungszahl (Ladungszahl)
<b>L, l<sub>i</sub></b>	Bahndrehimpulsquantenzahl	<b>N</b>	Neutronenzahl
<b>S, s<sub>i</sub></b>	Spinquantenzahl	$\lambda$	Zerfallskonstante
<b>M, m<sub>i</sub></b>	Orientierungsquantenzahl (Magnetquantenzahl)	$\tau$	mittlere Lebensdauer
<b>J, j<sub>i</sub></b>	Gesamt-DrehimpulsQZahl der Elektronenhülle	<b>T<sub>1/2</sub></b>	Halbwertszeit
<b>I, J</b>	Kern-Spinquantenzahl	<b>A</b>	Aktivität
<b>F</b>	Gesamt-DrehimpulsQZahl eines Teilchens		

Das griechische Alphabet

Eine Reihe der großen und einige kleine Buchstaben ( $\iota, \omicron, \upsilon$ ) stimmen mit den lateinischen Buchstaben überein oder sind ihnen so ähnlich, dass sie als Symbole keine Verwendung finden.

A	$\alpha$	Alpha	I	$\iota$	Jota	P	$\rho$	Rho
B	$\beta$	Beta	K	$\kappa$	Kappa	$\Sigma$	$\sigma$	Sigma
$\Gamma$	$\gamma$	Gamma	$\Lambda$	$\lambda$	Lambda	T	$\tau$	Tau
$\Delta$	$\delta$	Delta	M	$\mu$	My	Y	$\upsilon$	Ypsilon
E	$\epsilon$	Epsilon	N	$\nu$	Ny	$\Phi$	$\phi, \varphi$	Phi
Z	$\zeta$	Zeta	$\Xi$	$\xi$	Xi	X	$\chi$	Chi
H	$\eta$	Eta	O	$\omicron$	Omikron	$\Psi$	$\psi$	Psi
$\Theta$	$\theta$	Teta	$\Pi$	$\pi$	Pi	$\Omega$	$\omega$	Omega

Physikalische Konstanten

Vakuum-Lichtgeschwindigkeit	$c =_{\text{Def}} 2,997922458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Gravitationskonstante	$\Gamma = 6,673(3) \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Avogadro'sche Zahl	$L = 6,0220921(62) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molvolumen	$V_M = 22,41383(70) \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$
Allgemeine Gaskonstante	$R = 8,31441(26) \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Boltzmannkonstante	$k = 1,380652(43) \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Elektrische Feldkonstante $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$\epsilon_0 = 8,854200352 \dots \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$
Magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$	$\mu_0 = 1,256637061 \dots \cdot 10^{-6} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Elementarladung	$e_0 = 1,6021829(22) \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Spezifische Elektronenladung	$e_0/m_e = 1,7588115(24) \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$
Planck'sches Wirkungsquantum	$h = 6,626124(13) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Ruhemasse des Protons	$m_P = 1,6726355(17) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Ruhemasse des Elektrons	$m_e = 9,1094634(99) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Klassischer Elektronenradius	$r_e = 2,8179378(70) \cdot 10^{-15} \text{ m}$

Fallbeschleunigung für das Praktikumsgebäude (1. Obergeschoss)

$$\beta = 52^\circ 27' 35(5)''; \quad h = 59(3) \text{ m} \quad g = 9,812777(5) \text{ m s}^{-2}$$

## ANLAGE IV KERNSTRAHLUNGSDETEKTOREN

GPI

Kernstrahlungsdetektoren und Messelektronik



### Geiger-Müller-Zählrohr (Auslösezählrohr)

Beim Durchgang radioaktiver Strahlung durch Materie werden durch inelastische Stöße Elektronen aus den Atomverbänden herausgeschlagen und die Atome ionisiert. Geschieht dies durch Anlegen einer Spannung innerhalb eines elektrischen Feldes, so werden sich die entstandenen freien Ladungsträger (Elektronen, Ionen) bewegen und einen Strom verursachen, der nachgewiesen werden kann.

Zählrohre sind gasgefüllte Elektrodensysteme mit koaxialer Elektrodenanordnung. Als Zählgase finden meist Edelgase Verwendung (Ne, Ar, He). Beim *Geiger-Müller-Zählrohr* (GM-Zählrohr; Hans Geiger, 1882-1945; dt. Physiker; Ernst-Wilhelm Müller, \*1911; dt. Physiker; 1951 Prof. an der FU Berlin) ist die angelegte Spannung so groß (typisch 500 V), dass die durch die Strahlung gebildeten primären Ladungsträger (*Primärionisation*) in dem elektrischen Feld sehr stark beschleunigt werden und weitere Atome des Zählgases ionisieren (*Sekundärionisation*). Es entstehen *Ladungslawinen*, deren Größe unabhängig von der Primärionisation, und damit allerdings auch unabhängig von der Energie des eingefallenen Strahlungsquants ist. Durch zusätzliche *Löschgase* wird erreicht, dass der Ionisationsprozess

wieder abbricht und zu keiner dauernd brennenden Gasentladung führt.

Der durch ein *Ereignis* ausgelöste, kurzzeitige Strom im Zählrohrkreis verursacht an einem Außenwiderstand  $R$  einen kurzzeitigen Spannungsabfall (Impuls), der über einen Kondensator ausgekoppelt wird. Die Impulse des GM-Zählrohrs sind wegen der hohen Gasverstärkung so groß, dass sie ohne weitere Nachverstärkung direkt einem Zählgerät zugeführt werden können.

Bei gleichbleibender Strahlungsintensität ist die Zählrate von der angelegten Spannung abhängig (Zählrohrcharakteristik). Die *Einsatzspannung* ist der untere, kritische Spannungsgrenzwert für die Lawinenbildung. Es schließt sich ein Bereich an, in dem die Zählrate nur wenig von der Spannung abhängt (*Zählrohrplateau*) und innerhalb dessen ein *Arbeitspunkt* für den Zählrohrbetrieb gewählt wird. Ein leichter Anstieg der Zählrate innerhalb dieses Plateaus wird durch eine Vergrößerung des effektiven Nachweisvolumens und durch eine mit der Spannung steigende Zahl von Fehl- und Nachentladungen verursacht. Mit noch größerer Spannung wird schließlich eine Dauerentladung ausgelöst.

Nach dem Nachweis eines Ereignisses kommt es kurzzeitig zu einer Abnahme der Feldstärke im Zählrohr durch die Abschirmung des negativen Potentials der Zählrohrwand, durch die nur langsam abwandernde Raumladungswolke der positiven Ionen und zusätzlich durch den Spannungsabfall am Außenwiderstand. Während dieser *Totzeit* kann kein weiteres Strahlungsquant im Zählrohr nachgewiesen werden.

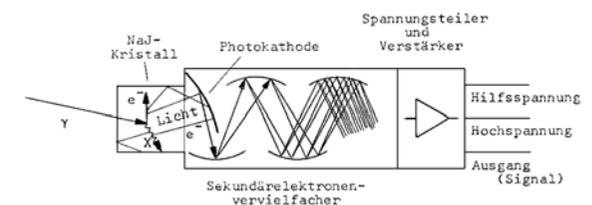
Der Vorteil des GM-Zählrohrs liegt im einfachen Aufbau und den großen Ausgangsimpulsen durch die hohe Gasverstärkung. Die Nachteile sind ein fehlendes *Energieauflösungsvermögen* und die Begrenzung auf kleine Zählraten wegen der vergleichsweise großen Totzeit.

### Natrium-Jodid-Szintillationsdetektor

Natrium-Jodid-Szintillationsdetektoren (NaJ-Detektoren) dienen dem Nachweis von  $\gamma$ -Strahlung und beruhen auf dem (inneren) Photoeffekt. In einem NaJ-Kristall wird das  $\gamma$ -Quant durch Photoeffekt gestoppt und die gesamte Quantenenergie auf ein Elektron übertragen (Primärelektron). Das Elektron wird freigesetzt und verursacht zusammen mit dem nachfolgenden Röntgenquant eine Kaskade weiterer elektronischer Anregungsprozesse,

an deren Ende durch deren spontanen Zerfall eine bestimmte Lichtmenge entsteht, die der primären - Energie äquivalent ist.

Der NaJ-Kristall wird in optischen Kontakt mit einem *Sekundärelektronenvervielfacher* gebracht (SEV; engl. Photomultiplier). An der Photokathode des SEV werden durch das Licht Elektronen im Vakuum ausgelöst, die elektrostatisch beschleunigt und an weiteren sogenannten *Dynoden* vervielfacht werden. Die dadurch entstehende Ladungsmenge wird schließlich elektronisch weiter verstärkt. Zum Prinzipaufbau eines NaJ-Detektors siehe folgende Abbildung.



Der gesamte Prozess ist linear, so dass am Ausgang des Systems ein Impuls erscheint, dessen Höhe der Energie des einfallenden  $\gamma$ -Quants proportional ist und eine *Linie* verursacht (*Photolinie*; *Photopeak*).

Neben dem Photoeffekt finden im Kristall auch Compton-Prozesse statt, bei denen das  $\gamma$ -Quant inelastisch gestreut wird. Für den Fall, dass das gestreute Quant den Kristall wieder verlässt, wird nur ein Teil der Energie auf das System übertragen und nachgewiesen. Wegen der Abhängigkeit von den mit statistischer Verteilung auftretenden Streuwinkeln erscheint dadurch ein zusätzliches *Compton-Plateau* im Spektrum, das bei der maximalen Übertragungsenergie bei einem Streuwinkel von  $180^\circ$  abbricht (*Compton-Kante*).

Umgekehrt finden Compton-Streuprozesse auch in der übrigen Materie des Detektors außerhalb des Kristalls statt, wobei aufgrund der geometrischen Verhältnisse hauptsächlich zurück gestreute  $\gamma$ -Quanten im Bereich der maximalen Übertragungsenergie in den Nachweis-kristall eintreten und dort eine breite, sogenannten *Rückstreulinie* verursachen (Backscatter-peak). Diese Linie ist in den Spektren hier im Praktikum deutlich zu beobachten.

Die Nachweis-Impulse eines NaJ-Detektors sind im wesentlichen durch die statistischen Prozesse im SEV vergleichsweise stark verbreitert. Für das Auflösungsvermögen von Kernstrahlungsmessgeräten ist es üblich, als Linienbreite die volle Breite bei halben Maximum zu berücksichtigen (engl. *FWHM* = Full Width at Half Maximum) und gegenüber der Begriffsbildung in der Optik den Kehrwert des Breite-Lage-Verhältnisses anzugeben:

$$(1) \quad \text{Auflösungsvermögen} = \frac{\text{FWHM}}{\text{Linienlage}}$$

Das Auflösungsvermögen von NaJ-Detektoren bewegt sich im Bereich einiger Prozent (5-10 %)

#### Auslösezähler

Einfache Detektoren ohne Energieauflösungsvermögen können eingesetzt werden, wenn es ausreichend ist, das integrale Spektrum zu registrieren, wobei die Weiterverarbeitung der Impulse digital durch Zähler (siehe Versuch *RADIOAKTIVER ZERFALL*) oder durch analoge Integration mit einer geeigneten Zeitkonstanten erfolgt. Dabei wird die Pulsfolge in eine der mittleren Pulsrate proportionale Spannung umgesetzt, die mit einem Voltmeter angezeigt oder mit einem Schreiber aufgezeichnet werden kann (Beispiel: Ionendosisleistungsmessgerät am Versuch *RADIOAKTIVER ZERFALL*).

#### Spektrometer

Energieauflösende Systeme mit Proportionalzählrohren, Szintillationsdetektoren oder Halbleiterdetektoren als Detektoren bezeichnet man als *Spektrometer*. Sie liefern für jedes im Detektor absorbierte Strahlungsquant ( $\alpha$ -,  $\beta$ -Teilchen, Röntgen- oder Gamma-Quant) einen elektrischen Impuls, dessen Höhe zu der im Detektor absorbierten Energie proportional ist. Die Breite und Form der Impulse (typisch 1  $\mu\text{s}$  bzw. einige Volt) wird durch die *Zeitkonstanten*-Bauglieder in den Verstärkerstufen des Systems bestimmt. Bestimmte Wechselwirkungsprozesse (z.B. der innere Photoeffekt) absorbieren die gesamte Quantenenergie, so dass die Impulshöhe direkt der Energie der Strahlung entspricht (Photolinie). Die Linien (Peaks) eines Spektrums sind dabei an der Häufung von Pulsen gleicher Amplitude zu erken-

nen. Andere Prozesse (z.B. der Compton-Effekt) absorbieren nur einen Teil der Quantenenergie und liefern kleinere Impulse einer bestimmten Verteilung, die einen zusätzlichen kontinuierlichen *Untergrund* im Spektrum verursachen. Es wird empfohlen, sich am Versuch *GAMMA-SPEKTROSKOPIE* die Impulse des Szintillationsdetektors auf dem Oszilloskop bei langsamer und bei schneller Zeitablenkung anzusehen.

Die Weiterverarbeitung der Impulse, in deren Impulshöhe die Information über die Energie liegt, kann nach unterschiedlichen technischen Methoden erfolgen.

#### Einkanalanalysator

Besteht die Aufgabe z.B. darin, die Zeitabhängigkeit eines bestimmten Übergangs, d.h. einer bestimmten Linie zu messen, so kann dies einfach durch einen *Einkanalanalysator* erfolgen (EKA; engl. SCA von Single-Channel-Analyzer). Ein EKA besitzt zwei einstellbare Spannungswerte (*Schwellen*) und gibt genau dann einen logischen Ausgangsimpuls ab (Rechteckimpuls fester Höhe und Länge), wenn die Impulshöhe am Eingang in das *Fenster* zwischen den beiden Schwellwerten fällt. Die Ausgangsimpulse können dann gezählt oder anders weiterverarbeitet werden. Ein Nachteil des EKA liegt darin, dass damit nur eine Linie beobachtet werden kann, und dass das Fenster den kontinuierlichen Untergrund mit erfasst. Die Aufnahme eines (differenziellen) Gesamtspektrums ist nur umständlich und zeitraubend vermittels Durchstimmen des EKA möglich (*Boxcar*-Prinzip).

#### Vielkanalanalysator

Einfacher und eleganter lässt sich die Aufgabe durch Verwendung eines *Vielkanalanalysators* lösen (VKA; engl. MCA von Multichannel-Analyzer). Ein VKA besteht aus einem *Analog-Digital-Wandler* (AD-Wandler; engl. ADC von Analog-Digital-Converter) und einer Vielzahl von nachgeschalteten Zählstellen (typisch 256 bis 4096 und mehr). Der ADC wandelt die Höhe eines am Eingang eintreffenden Impulses in eine Zahl um. In einem gängigen Verfahren wird durch den Impuls über eine Diode zunächst ein Kondensator aufgeladen und so die Peakhöhe fest gehalten. Danach wird der Kondensator bei konstantem Strom entladen, und die Zeit bis zur vollständigen Entladung durch Zählen von Uhrimpulsen bestimmt (typisch 100 Mhz), so dass die An-

zahl dieser Impulse der Peakhöhe und damit der absorbierten Strahlungsenergie entspricht. Diese Zahl wird als Adresse eines Zählers (Kanal) interpretiert, und dessen Inhalt um eins erhöht. Die Zählerinhalte liefern so die Verteilungsfunktion der Strahlungsintensität über der Energie, die z.B. auf einem Bildschirm dargestellt oder zur weiteren Auswertung auch numerisch ausgegeben werden kann. Weitere Bausteine eines VKA sind ein Rechenwerk zur Ablauf- und Zeitsteuerung und ein Digital-Analog-Wandler (DA-Wandler bzw. DAC) zur Umsetzung von Kanaladressen und -inhalten in analoge Spannungen zur Darstellung auf dem Bildschirm (oder einem Schreiber). Ein DAC steuert durch die Bits der digital kodierten Zahl elektronische Schalter und summiert Einzelströme zu einem Gesamtstrom, der dann an einem Widerstand eine der Zahl proportionale Spannung erzeugt.

Messungen und Auswertungen von Spektren werden durch einen VKA erheblich erleichtert. Intensitäten von Linien können durch numerische Integration der Peaks bestimmt werden, wobei Untergrundanteile aus dem Verlauf der Spektren außerhalb der Linien ermittelt werden können. Im Allgemeinen muss bei den Auswertungen zusätzlich die Nachweispfindlichkeit des Detektors berücksichtigt werden, die stark von der Energie der einfallenden Strahlung abhängig sein kann.

Der Einsatz von Vielkanalanalysatoren beschränkt sich nicht auf die Kernspektroskopie; sie werden in der modernen Messtechnik für viele Aufgaben verwendet. Einige Beispiele: Mit einem *TPHC* (Time-to-Pulse-Height-Converter) können Pulse erzeugt werden, deren Höhe proportional zum zeitlichen Abstand zwischen einem Start- und einem Stoppimpuls ist. Die Weiterverarbeitung in einem VKA liefert dann z.B. die Lebensdauer eines Zwischenzustands in einer Gamma-Kaskade (Start und Stopp: EKA auf den entsprechenden Peaks) oder eines angeregten Atomzustands (Start: Anregungs-Laserpuls, Stop: vom Atom emittierte Strahlung). Bei der *Sampling-Technik* werden mit einem schnellen Schalter Impulse aus einer kontinuierlich veränderlichen Spannung *herausgeschnitten*; der VKA liefert dann das zugehörige Amplitudenspektrum. Ebenso wichtig sind Anwendungen, bei denen der VKA nicht im bisher betrachteten PHA-Modus (Pulse-Height-Analysis), sondern im *MCS-Modus* (Modus betrieben wird (Multi-Channel-Scaling). Dabei werden eintreffende (Einheits-) Pulse für eine bestimmte Zeit in die einzel-

nen Kanäle gezählt, und damit die Abhängigkeit der Impulsrate von der Zeit oder von einer zeitlich modulierten Größe registriert. Breite Anwendung findet dies beim *Signal-Averaging-Verfahren*, wo zur Verringerung statistischer Fehler viele Messzyklen addiert werden. Als Beispiel seien *Sampling-Oszilloskope* erwähnt, bei denen die Sampling-Technik mit einem VKA in MCS Betrieb kombiniert wird. Die Echtzeit-Darstellung hochfrequenter Signale mit Oszilloskopen wird ab 50 MHz teuer und stößt bei 1000 MHz an technische Grenzen. Da es aber möglich ist, wesentlich schnellere Trigger- und Sampling-Schaltungen zu bauen, kann der Momentanwert eines periodisch wiederkehrenden Signals nacheinander für verschiedene Verzögerungen gegen einen Triggerzeitpunkt gespeichert werden. Die Darstellung der Kurvenform kann dann auf einem "langsamen" Oszilloskop erfolgen.

<b>ANLAGE V</b> <b>STRALENSCHUTZANWEISUNG</b> <b>und DOSIMETRIE</b>	<b>GPI</b>
---	------------

*Hinweise auf Gefährdungen durch ionisierende und radioaktive Strahlungen und mögliche Strahlenschutzmaßnahmen und Grundlagen der Dosimetrie.*

### Strahlenschutzanweisung

Von ionisierenden und radioaktiven Strahlen können große Gefahren für Gesundheit und Leben des Menschen ausgehen. Der Schutz vor derartigen Strahlungen ist in der *Strahlenschutzverordnung (StrSchV)* gesetzlich geregelt, die dem Schutz von Personen, Einrichtungen und der Umwelt dient. Eine formale Einhaltung von Strahlenschutzmaßnahmen ist deshalb besonders wichtig, weil der Mensch keine Sinnesorgane zur Wahrnehmung dieser Strahlungen besitzt.

### Strahlenwirkungen

Die wichtigsten Strahlungstypen sind  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -, Röntgen- (X-) und Neutronenstrahlen, die sich in ihren charakteristischen Eigenschaften, und damit hinsichtlich der Strahlenwirkungen und des Strahlenschutzes, stark unterscheiden.

$\alpha$ - und  $\beta$ -Teilchen unterliegen beim Durchgang durch Materie elektrostatischen Wechselwirkungskräften mit der Elektronenhülle und dem Atomkern. Sie werden dadurch stark abgebremst und ionisieren das Bremsmaterial. Neutronen sind ungeladen. Sie können sich relativ frei in Materie bewegen, bis sie schließlich durch einen Einfangprozess gebunden werden. Neutronen sind daher schwer abzubremsen und ionisieren auch nicht. Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlen sind elektromagnetische Wellen sehr kurzer Wellenlänge bzw. großer Frequenz und hoher Quantenenergie. Sie haben eine sehr große Reichweite und ionisieren ebenfalls.

Die gesundheitsschädigenden Wirkungen der Strahlungen liegen in Zerstörungen im Bereich der chemischen Beschaffenheit und damit der mikroskopischen Struktur organischer Substanzen (Atome, Moleküle, Zellen) und deren Folgen für den Organismus. Man unterscheidet *somatische Schädigungen* (Körperschäden) und *genetische Schädigungen*. Somatische Schädigungen können direkte Folgen tragen, wie Zerstörung von Zellen und Gewebe bis hin zu verbrennungsartigen Erschei-

nungen, oder auch indirekte Folgen, wie die Erzeugung krankhaft veränderter Zellen, die später Ursache von Krankheiten sein können (Krebs).

Von der Art der Einwirkung unterscheidet man zwischen äußerer Strahlenbelastung durch Exposition (Bestrahlung) oder Kontamination (äußere Verunreinigung) und innerer Strahlenbelastung durch Inkorporation (Inhalation, Einnahme über den Magen-Darm-Trakt oder andere Verabreichungsformen im Umfeld medizinischer Diagnose oder Therapie).

### Allgemeine Strahlenschutzgrundsätze

Wegen der großen Gefahren muss mit strahlungserzeugenden Einrichtungen und radioaktiven Stoffen besonders sorgfältig umgegangen werden. Die wichtigsten Grundsätze des Strahlenschutzes sind (28 StrSchV):

- jede unnötige Strahlenexposition oder Kontamination von Personen, Sachgütern oder der Umwelt zu vermeiden, und
- jede Strahlenexposition oder Kontamination von Personen, Sachgütern oder der Umwelt unter Beachtung des Standes von Wissenschaft und Technik unter Berücksichtigung aller Umstände des Einzelfalles auch unterhalb der in der Strahlenschutzverordnung festgesetzten Grenzwerte so gering wie möglich zu halten.

Die Hauptschutzmaßnahme gegen eine äußere Bestrahlung sind eine möglichst gute Abschirmung, ein möglichst großer Abstand von der Strahlungsquelle und eine möglichst kurze Aufenthaltsdauer im Bereich der Strahlung (die drei großen **A** des Strahlenschutzes).

$\alpha$ -Strahlung wird wegen der Größe und Ladung der Partikel stark abgebremst und hat eine sehr geringe Reichweite (typisch 40 mm in Luft und 0,03 mm in Aluminium). Die gesamte Energie der Strahlung wird damit jedoch auf einer sehr kurzen Bremsstrecke abgegeben und führt dort unter Umständen zu starken Schädigungen.  $\alpha$ -Strahler sind aus diesen Gründen relativ ungefährlich bei äußerer Einwirkung, da die Strahlung in den oberen, nicht vitalen Hornhautschichten abgebremst wird. Sie ist andererseits sehr gefährlich bei Inkorporation, da den inneren Organen entsprechende schützende Schichten fehlen.

$\beta$ -Strahlung hat ein vergleichbares Verhalten, jedoch mit deutlich größerer Reichweite (typisch 2 m in Luft

und 1 mm in Aluminium). Auch bei äußerer Einwirkung sind Strahlenschutzmaßnahmen erforderlich, wobei insbesondere die Augen eines besonderen Schutzes bedürfen, da die Augenlinse unter Einwirkung starker  $\beta$ -Strahlung getrübt wird. Jedoch lässt sich die Strahlung noch relativ einfach durch einige Millimeter Plexiglas oder Aluminium abschirmen.

Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlen haben dagegen ein großes Durchdringungsvermögen und lassen sich nur schwer abschirmen. Zudem ist keine vollständige Absorption möglich, sondern lediglich eine exponentielle Schwächung entsprechend der Absorberdicke. Zum Abschirmen eignen sich am besten spezifisch schwere Substanzen wie Blei oder Uran. Die Halbwertsdicke von Blei (Schwächung um 50 %) beträgt für die 1,2-MeV-Strahlung von Co-60 etwa 15 mm.

Neutronen sind besonders gefährlich. Als ungeladene Teilchen erfahren sie keine elektrischen Wechselwirkungskräfte und können Materie leicht durchdringen. Wegen der gleichen Masse ersetzen sie leicht Wasserstoffkerne durch Stoß und zerstören damit das Wasserstoffatom. Da Wasserstoff ein zentraler Baustein organischer Verbindungen ist, entstehen daraus folgenschwere Veränderungen des labilen, chemischen Gleichgewichts physiologischer Systeme. Schwerere Atomkerne haben große Wirkungsquerschnitte für Neutroneneinfangreaktionen, wobei es zu Kernreaktionen kommt, die ebenfalls stark schädigende Veränderungen der molekularen und chemischen Struktur zur Folge haben. Neutronen lassen sich nur schwer abschirmen; am besten noch mit gleich schweren Stoßpartnern, wie Protonen als Wasserstoffkerne in wasserstoffhaltigen Materialien wie Wasser oder Paraffin.

### Dosimetrie

#### Aktivität

Bei der Betrachtung von Strahlengefährdungen muss zwischen Ursache und Wirkung unterschieden werden. Ursache ist ein Strahlungsfeld, das bei radioaktiven Zerfallsprozessen als *Aktivität* mit der Zahl der Zerfälle pro Zeiteinheit definiert ist:

$$(1) \quad \text{Aktivität} A = \frac{\text{Zahl der Zerfälle}}{\text{Zeit}}$$

Die Einheit der Aktivität ist damit:

$$(2) \quad [A] = 1 \frac{\text{Zerfall}}{\text{s}} = 1 \text{Bq (Bequerel)}$$

### Energiedosis

Bringt man eine Probe, z.B. einen organischen Körper, in ein radioaktives Strahlungsfeld, so wird ein Teil der Strahlung absorbiert und verursacht physikalische oder physiologische Wirkungen. Ein anderer Teil dagegen durchläuft den Körper ohne Wechselwirkungen und damit ohne Strahlenschädigungen. Ein Maß für die Strahlenbelastung einer Probe bzw. eines Körpers ist die pro Masseneinheit absorbierte Strahlungsenergie. Diese Größe wird als *Energiedosis*  $D_E$  bezeichnet:

$$(3) \quad D_E = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{Masse Probekörper}}$$

Der Anteil der absorbierten Strahlungsenergie, d.h. die Dosiswerte, hängt von der Strahlenart und der Strahlungsenergie ab und bezieht sich damit immer auf einen bestimmten Stoff als Probensubstanz. Die Einheit der Energiedosis ist:

$$(4) \quad [D_E] = \frac{1 \text{Joule}}{\text{kg}} = 1 \text{Gy (Gray)}$$

(Eine ältere Einheit ist  $1 \text{ rad} = 0,01 \text{ Gy}$ ). Die pro Zeiteinheit empfangene Dosis heißt *Dosisleistung*.

### Ionendosis

Die Energiedosis ist schwer messbar, da die relevanten Energiemengen sehr gering sind (eine letale Strahlendosis würde die Körpertemperatur des Menschen um etwa 2 mK erhöhen und entspräche der Wärmemenge eines Schluckes Kaffee). Als praktische Messgröße wurde deshalb die *Ionendosis*  $D_Q$  eingeführt, die die durch Ionisation der Strahlung in Luft erzeugte Ladungsmenge angibt:

$$(5) \quad D_Q = \frac{\text{durch Ionisation erzeugte Ladung}}{\text{Masse Luft}}$$

Die Einheit der Ionendosis ist damit:

$$(6) \quad [D_Q] = 1 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

Eine ältere Einheit für  $D_Q$  ist  $1 \text{ R (Röntgen)} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}$ .

Die Ionendosis kann direkt mit Hilfe von *Ionisationskammern* gemessen werden. Die Einheit der Ionendosisleistung ist  $1 \text{ C/(kg} \cdot \text{s)} = 1 \text{ A/kg}$ .

Der Zusammenhang zwischen Energiedosis und Ionendosis hängt generell von der Quantenenergie der Strahlung und vom Probenmaterial ab. Für Muskel- und Weichteilgewebe gilt jedoch in guter Näherung unabhängig von der Quantenenergie:

$$(7) \quad D_E = 40 \frac{\text{Gy}}{\text{C/kg}} D_Q$$

### Äquivalentdosis

Die biologischen Strahlenwirkungen und Strahlenschädigungen werden neben der Quantenenergie noch von der Strahlenart bestimmt, was durch einen zusätzlichen, dimensionslosen Faktor für die *relative biologische Wirksamkeit (RBW-Faktor)* ausgedrückt wird:

Strahlentyp	RBW-Faktor
$\gamma$ -, $\beta$ -Strahlung	1
langsame Neutronen	5
$\alpha$ -Strahlen, schnelle Neutronen	10

Das Produkt aus Energiedosis und *RBW-Faktor* ergibt die wirkungsrelevante *Äquivalentdosis*  $D_{\bar{A}}$ . Weil der RBW-Faktor dimensionslos ist, stimmen die Einheiten der beiden Größen überein, und zur Unterscheidung erhält die Einheit  $1 \text{ J/kg}$  für den Fall der Äquivalentdosis den Einheitenamen *Sievert*.

$$(8) \quad D_{\bar{A}} = \text{RBW} D_E \quad \text{und}$$

$$(9) \quad [D_{\bar{A}}] = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1 \text{Sv (Sievert)}$$

Eine ältere Einheit der Äquivalentdosis ist  $1 \text{ rem} = 0,01 \text{ Sv}$ .

### Typische Strahlenbelastungen

Es gibt eine *natürliche Strahlenbelastung* aus terrestrischer Strahlung (Strahlung aus natürlichen, radioaktiven Materialien der Erdkruste) und kosmischer Strahlung (Höhenstrahlung). Sie beträgt für die Bundesrepublik Deutschland im Mittel 1,1 mSv pro Jahr. (Der Anteil von *Fallout* aus Kernwaffendetonationen ist derzeit auf weniger als 1 % der natürlichen Strahlung zurückgegangen). In bestimmten Regionen des Schwarz-

walds liegt die natürliche Belastung bei etwa 2,7 mSv, und es gibt Gebiete auf der Erde, wo die natürliche Belastung aufgrund starker terrestrischer Strahlung mehr als 20 mSv pro Jahr beträgt. Es gibt umfangreiche Untersuchungen über die Strahlenwirkung auf die dort lebende Bevölkerung, wobei jedoch signifikante Auswirkungen nicht belegt werden konnten.

Die nach der gesetzlichen *Strahlenschutzverordnung* zugelassene Erhöhung der Belastung der allgemeinen Bevölkerung durch Strahlung erzeugende Einrichtungen (Röntgenanlagen, Reaktoren, Beschleuniger etc.) darf höchstens 0,3 mSv pro Jahr betragen.

Typische Strahlenbelastungen in der Röntgendiagnose sind ca. 1 mSv für eine einfache Röntgenaufnahme (Thorax) bis etwa 100 mSv für multiple Röntgen-Kontrastaufnahmen. Typische Teilkörper-Herdbelastungen bei der Strahlentherapie (Krebsbehandlung) gehen bis zu einigen zig-tausend Sv. Der gesetzliche Grenzwert für beruflich strahlenexponierte Personen beträgt 50 mSv pro Jahr für Ganzkörperbestrahlungen. Die letale Dosis (100 % Letalität) liegt bei etwa 8 Sv Ganzkörperbelastung.

An den Versuchsplätzen, an denen mit radioaktiver Strahlung umgegangen wird, sind Dosisleistungsmessgeräte zur Kontrolle der natürlichen Strahlung und der zusätzlichen Belastung durch die radioaktiven Quellen vorhanden.

ANLAGE VI  
STATISTIK

GPI

Statistische Schwankungen

Physikalische Vorgänge verlaufen aufgrund der quantelten Natur der Systeme stochastisch. Deterministisch werden Vorgänge in Strenge für den Grenzfall unendlich vieler oder praktisch bei einer großen Anzahl elementarer Beiträge; so dass die zu erwartenden Schwankungen gegen Null gehen. Dies ist die Situation der *makroskopischen* Physik, deren Aussagen sich z.B. auf "unendlich" viele Teilchen eines Gasvolumens oder auf "unendlich" viele schwingenden Ladungen einer strahlenden Antenne beziehen.

Für die Wertausrägungen von Systemen, die durch endlich viele oder eine vergleichsweise kleine Anzahl atomarer Systeme bestimmt wird, gib es keine streng deterministische Vorhersage; und die Ergebnisse zeigen (statistische) Schwankungen mit einer Verteilung der Werte.

Ist analog nicht die Zahl der mitwirkenden mikroskopischen Systeme, sondern die Zahl der Beobachtungen unendlich, so gibt es wieder eine strenge Vorhersage, jedoch nur für die *Parameter* der Verteilung, wie z.B. den Mittelwert oder die Standardabweichung (Schwankungsbreite).

Zusätzlich treten die Schwankungen experimentell nur in Erscheinung, wenn sie aus der Empfindlichkeit der Messapparatur herausragen. Eine reale Messreihe liefert dann eine Näherung der erwarteten Verteilungsfunktion.

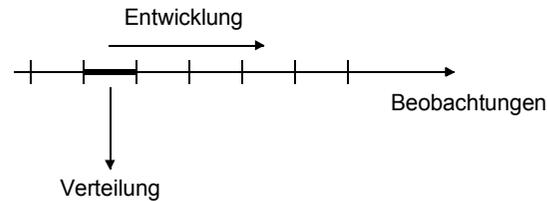
Klassische Beispiele auch aus dem Bereich des Grundpraktikums sind die Zerfälle angeregter atomarer oder Kernzustände, der radioaktive Zerfall oder die stochastische Wechselwirkung eines Teilchen- oder Strahlungsstroms mit Materie.

Typisch ist dabei die Betrachtung einer *begrenzten Beobachtung*, d.h. einer begrenzten Beobachtungszeit oder einer begrenzten Wechselwirkungsstrecke, für den dann der stochastische Prozess durch zeit- oder län-genbezogene Wahrscheinlichkeiten beschrieben wer-

den kann (Übergangswahrscheinlichkeit, Stoßwahrscheinlichkeit).

Mathematisch-statistisch stellt dies ein *Bernoulli-Experiment* mit zweiwertigem Ausgang dar: *Zerfall/Stoß* oder *nicht, JA* oder *NEIN, 0* oder *1, SCHWARZ* oder *WEISS, ADLER* oder *ZAHL*. In diesem Skript sollen Verteilungsfunktionen entwickelt werden, die sich im Zusammenhang mit derartigen *Bernoulli-Experimenten* ergeben.

Dabei gibt es zwei Fragestellungen. Einmal die Frage nach der Verteilung der Ergebnisse innerhalb einer solchen Beobachtung. Zum anderen die Entwicklung eines endlichen Ensembles aufgrund solcher Prozesse.

Exponentialentwicklung

Zunächst soll eine zeitliche Entwicklung am Beispiel des radioaktiven Zerfalls betrachtet werden (Versuch *RADIOAKTIVER ZERFALL*). Wenn die zeitbezogene Zerfallswahrscheinlichkeit (Übergangswahrscheinlichkeit) eines Kerns  $\lambda$  ist, so ergibt sich als mittlere Zahl der Zerfälle eines Ensembles von  $n$  radioaktiven Kernen in einem Beobachtungszeitraum  $\Delta t$ :

$$(1) \quad \bar{n} = p n = \lambda \Delta t n$$

Hinsichtlich einer endlichen Menge von Kernen stellt  $\bar{n}$  eine Abnahme dar. Näherungsweise soll die Menge als groß betrachtet, und  $n$  als kontinuierliche Variable aufgefasst werden. Dann ergibt sich aus (1) eine Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung des Ensembles:

$$(2) \quad dn = -\lambda n dt$$

mit der Lösung

$$(3) \quad n = n_0 e^{-\lambda t}$$

Dies ist das Zeitgesetz des radioaktiven Zerfalls, wobei man ein genau entsprechendes Ergebnis für den Fall

eines Absorptionsgesetzes von Strahlung durch Materie erhält, wenn man modellmäßig stochastisch verteilte

Strahlungsquanten und Stoßpartner und "singuläre" Stoßprozesse annimmt, bei denen ein Strahlungsquant endgültig aus dem Strahlungsstrom entfernt wird.

Binomialverteilung

Während im vorgehenden Fall die Anzahl der Ereignisse bei einer Beobachtung "integral" durch den Mittelwert beschrieben wurde, soll jetzt "differentiell" nach der Verteilung dieser Anzahl gefragt werden. Zur Verallgemeinerung wird die Zerfallswahrscheinlichkeit für einen Beobachtungszeitraum  $\lambda \Delta t$  als  $p$  geschrieben, so dass die Wahrscheinlichkeit des Komplementäreignisses  $(1-p)$  ist. Bei  $N$  "Durchführungen" des Einzelexperiments (bei  $N$  Kernen) folgt aus dem Multiplikationsgesetz für statistisch unabhängige Ereignisse als Wahrscheinlichkeit, dass in  $n$  bestimmten Fällen das Ereignis (der Zerfall) eintreten, und in den übrigen  $(N-n)$  Fällen nicht:

$$(4) \quad p^n (1-p)^{N-n}$$

Jedoch interessiert im Allgemeinen nicht, in welchen bestimmten Fällen das Ergebnis eintritt, sondern nur deren Gesamtzahl. Der Wert (4) ist dann mit der Zahl der Möglichkeiten zu multiplizieren, aus den  $N$  Experimenten  $n$  auszuwählen, in denen das Ereignis eintritt. Diese Zahl ist durch einen Binomialkoeffizient gegeben:

$$(5) \quad \binom{N}{n} = \frac{N!}{n! (N-n)!}$$

Als gesuchte Verteilung erhält man die *Binomialverteilung*:

$$(6) \quad B(n) = \frac{N!}{n! (N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Die diskrete *Zufallsvariable*  $n$  beschreibt die tatsächlich möglichen Ergebnisse, und die Verteilung (6) direkt deren Wahrscheinlichkeitswerte (z.B. für die Anzahlen von Kernzerfällen in einem Beobachtungsintervall).

Die Binomialverteilung entspricht dem *Normierungssaxiom* für Wahrscheinlichkeiten. Die Summation über alle möglichen Ereignisse, d.h. über alle  $n$ , stellt gerade die binomische Potenz mit  $p$  und  $(1-p)$  als Nomen dar:

(7)

$$\sum_{n=0}^N B(n) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = [p + (1-p)]^N = 1^N = 1$$

Verteilungsparameter

Die Werte eines Verteilungsmodells, oder die Daten einer beobachteten oder erhobenen Verteilung, stellen die umfassende, aber umfangreiche und damit unbequeme Information einer Verteilung dar. Es sind daher *statistische Maßzahlen* für Verteilungen definiert, mit denen die wichtigen Eigenschaften quantitativ repräsentiert werden können.

(8)	Diskrete Verteilung F(x <sub>i</sub> )	Verteilungsfunktion ρ(x)
Lage- maß	Mittelwert $\bar{x} = \sum x_i F(x_i)$	Erwartungswert $\mu = \int x\rho(x)dx$
Streu- maß	Mittlere quadratische Abweichung $s^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 F(x_i)$	Varianz $\sigma^2 = \int (x - \mu)^2 \rho(x)dx$

Die Bildung der quadratischen Abweichungen als Streumaß berücksichtigt die unterschiedlichen Vorzeichen der Abweichungen (die mittlere Abweichung selbst würde bei einer symmetrischen Verteilung verschwinden). Die *Standardabweichung* ist die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung bzw. der Varianz, die damit in die Ursprungsdimension der Verteilungsvariablen zurückkehrt.

Die Berechnung von Mittelwert und Varianz der Binomialverteilung ist auf direktem Weg algebraisch aufwendig, aber einfach unter Anwendung der (plausiblen) Summenregeln für die Maßzahlen:

(9)

$$\overline{(x_i + y_i)} = \bar{x}_i + \bar{y}_i \quad \text{und} \quad s^2(x_i + y_i) = s^2(x_i) + s^2(y_i)$$

Die zweiwertige *Bernoulli-Verteilung* als Grenzfall der Binomialverteilung mit n = 1 hat die Werte n = 0 mit der Wahrscheinlichkeit (1-p) und n = 1 mit der Wahrschein-

lichkeit p. Als Mittelwert und Varianz folgen damit nach den Definitionen (8):

$$\bar{n} = 0(1-p) + 1p = p \quad \text{und}$$

$$s^2 = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2p = (1-p)p$$

Und daraus mit (9) sofort für die Binomialverteilung mit N Ereignissen:

Poisson-Verteilung

Die *Bernoulli-Verteilung* ist praktisch unhandlich wegen der Binomialkoeffizienten, die schnell sehr große Werte annehmen. Für "seltene" Ereignisse mit kleinen Mittelwerten und kleiner Wahrscheinlichkeit, die häufig vorliegen, und für Werte in der Umgebung des Mittelwerts lässt sich eine bequemere Näherungsverteilung entwickeln. Die Annahmen bedeuten:

(11)  $\bar{n}, n \ll N \quad \text{und} \quad p \ll 1$

Aus dem Binomialkoeffizienten wird (N-n)! herausgekürzt und die verbleibenden Faktoren im Zähler von (N-n+1) bis N näherungsweise gleich N gesetzt:

(12)  $\frac{N!}{(N-n)!} \approx N^n \quad \text{und} \quad N^n p^n = \bar{n}^n$

Die Potenz (1-p)<sup>N-n</sup> wird als Exponentialterm geschrieben, und der benötigte Logarithmus in der Umgebung von 1 linear genähert:

(13)  $(1-p)^{N-n} = e^{\ln(1-p)^{N-n}} = e^{(N-n)\ln(1-p)} \approx e^{-pN} = e^{-\bar{n}}$

wegen

(14)  $\ln(1-p) \approx -p$

Die Bernoulli-Verteilung geht damit in die *Poisson-Verteilung* über, die nur noch durch den einen Parameter  $\bar{n}$  bestimmt wird:

(15)  $P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$

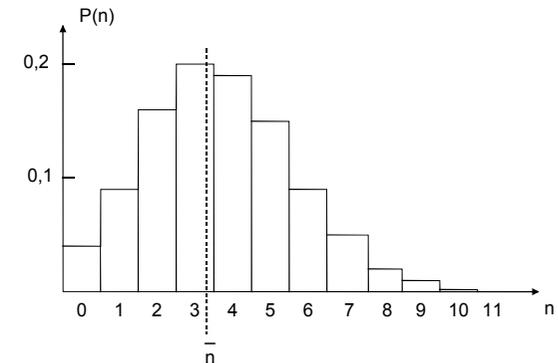
Auch die *Poisson-Verteilung* ist normiert:

(16)  $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1 \quad \text{wegen} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} = e^{\bar{n}}$

Dabei wird der Gültigkeitsbereich von (15) abweichend von der Ausgangseinschränkung für n → ∞ angenommen, was wegen des starken Abfalls der Funktion P(n) zu großen Werten hin berechtigt ist. Für den Mittelwert berechnet sich analog zu (9):

(17)  $\sum_{n=0}^{\infty} n P(n) = \bar{n}$

Die folgende Abbildung zeigt eine Poisson-Verteilung für  $\bar{n} = 3,8$ .



Die *Poisson-Verteilung* ist unsymmetrisch. Mit wachsendem  $\bar{n}$  geht sie aber in eine Verteilung über, die in der Umgebung von  $\bar{n}$  symmetrisch zu diesem Wert wird.

Gauß-Verteilung

Die *Bernoulli-* und die *Poisson-Verteilung* sind diskrete Verteilungen, wobei es in vielen Fällen praktisch vorteilhaft ist, mit einer kontinuierlichen Verteilungsfunktion arbeiten zu können.

Zur Entwicklung einer Funktion aus der *Poisson-Verteilung* soll die Forderung (11) dadurch ergänzt werden, dass der Mittelwert zwar klein gegen N, aber dennoch groß gegen 1 sein soll:

(18)  $\bar{n} \gg 1$

und die Überlegungen auf eine Umgebung von  $\bar{n}$  beschränkt werden, so dass:

$$(19) \quad |n - \bar{n}| \ll \bar{n}$$

Der Übergang zu einer kontinuierlichen Verteilungsfunktion geschieht durch Aufstellung eines Differenzenquotienten für die diskrete Poisson-Verteilung, die mit den Näherungsannahmen als Differentialgleichung aufgefasst werden kann:

$$(20) \quad \frac{P(n) - P(n-1)}{\Delta n = 1} = P(n) - P(n-1) = -\frac{n - \bar{n}}{\bar{n}} P(n)$$

Der rechte Ausdruck in (20) stellt wegen der Voraussetzung (18) eine mit  $n$  nur langsam variierende Größe dar, so dass  $n$  dann als kontinuierliche Variable aufgefasst (und deshalb jetzt mit  $x$  bezeichnet wird), und (20) als Differentialgleichung einer Verteilungsfunktion  $G(x)$  interpretiert werden kann:

$$(21) \quad \frac{dG(x)}{dx} = -\frac{x - \bar{x}}{\bar{x}} G(x)$$

Sie hat die Lösung:

$$(22) \quad G(x) = C e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\bar{x}}}$$

Das ist die *Gauß-* oder *Normalverteilung*. Die Integrationskonstante wird so bestimmt, dass die Funktion wieder normiert ist. Mit dem Integral:

$$(23) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad \text{folgt} \quad C = \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{x}}} \quad \text{bzw.}$$

$$(24) \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{x}}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \bar{x}}{\sqrt{\bar{x}}} \right)^2}$$

Durch den Übergang von einer diskreten zu einer kontinuierlichen Zufallsvariable werden die einzelnen ( $x$ -) Werte infinitesimal, und deren Wahrscheinlichkeiten gehen gegen Null. Tatsächliche Ereignisse werden jetzt durch Intervalle der Zufallsvariablen gebildet (mit einem durch die Breite bestimmten "Volumen"), deren Wahrscheinlichkeit dann durch die Fläche der Verteilung über dem Intervall beschrieben wird. Die Funktion (24)

stellt die *Wahrscheinlichkeitsdichte* der Zufallsvariablen dar.

#### Allgemeine Normalverteilung

Die Form (24) ist eine spezielle Normalverteilung mit nur einem Parameter, wobei  $\bar{X}$  Erwartungswert (in trivialer Weise wegen der Symmetrie der Verteilung) und Varianz gleichzeitig ist. Die allgemeine Form der Normalverteilung mit unabhängigen Werten von Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  lautet:

$$(25) \quad N(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

In der folgenden Abbildung sind zwei Normalverteilungen zum gleichen Erwartungswert ( $\mu = 5,0$ ), aber unterschiedlichen Varianzen bzw. Standardabweichungen dargestellt ( $\sigma = 0,5$  und  $S = 1,5$ ).

