

NP

Fachbereich Physik · Freie Universität Berlin

PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM FÜR NATURWISSENSCHAFTEN

Einsemestriges Praktikum für die Studiengänge Biologie, Biochemie, Chemie, Informatik, Mathematik, Geologie und für das Lehramtsstudium mit Chemie als Unterrichtsfach.



Physis ist die griechische Bezeichnung für die Natur. Früher war der *physicus* der allumfassende Naturgelehrte und auch der Arzt. Als die Kenntnisse umfangreicher wurden, bildeten sich die klassischen Arbeitsgebiete Physik, Chemie und Biologie heraus. Später die Verbindungsfächer physikalische Chemie, Biochemie und Biophysik. Heute fächern sich die naturwissenschaftlichen Arbeitsgebiete weiter auf und sind sowohl durch eine hochgradige Spezialisierung als auch durch eine starke interdisziplinäre Verkopplung gekennzeichnet. Dabei bilden die Phänomene der unbelebten Natur, d.h. der Physik im engeren Sinne, ein Fundament aller naturwissenschaftlichen Erscheinungen, und Kenntnisse in Physik gehören zu den unentbehrlichen Grundlagen in den Naturwissenschaften.

Das **Hauptziel des Praktikums** ist die Einführung in elementare Arbeitsmethoden der experimentellen Physik, d.h. in den Aufbau von Apparaturen und den Umgang mit Messgeräten (Messtechnik), die Dokumentation des experimentellen Ablaufs (Messprotokoll), die Auswertung unter Einsatz mathematisch-statistischer Auswerteverfahren (Fehlerrechnung), in die kritische Diskussion und wissenschaftliche Beurteilung der Ergebnisse und nicht zuletzt in die schriftliche Darstellung und Präsentation der durchgeführten Arbeit. Über die praktischen Inhalte hinaus liegt ein wichtiger Aspekt des Praktikums in der Hinführung zu wissenschaftlichem Denken, wobei es darum geht, aus den Beobachtungen und quantitativen Ergebnissen schließende Aussagen und Verständnis in Hinsicht auf die gestellten Fragen abzuleiten. Ergänzend dient das Praktikum einer vertiefenden Auseinandersetzung mit Physik im Rahmen ausgewählter Themen.

Das Praktikum stellt *physikalische Themen- und Fragestellungen* in den Vordergrund und soll exemplarisch die Herangehensweise und Methoden der Physik vermitteln, wobei Zusammenhänge und Bezüge zu den betroffenen Zielstudienrichtungen in den Vorgesprächen hergestellt werden.

Kernregeln

- Vorbereitung an Hand von Vorlesung und Lehrbüchern nach Angaben im Skript.
- Die Versuche beginnen s.t. und Verspätungen um mehr als 15 Minuten führen dazu, dass die Teilnahme am Versuch nicht mehr möglich ist.
- Vor Versuchsbeginn werden Kurzttest (10 min.) zum jeweiligen Versuchsthema geschrieben. Eine Zulassung zum Versuch erfolgt ab 50% der max. Punktzahl.
- Eine zweiseitige theoretische Einführung (als Teil des Protokolls) ist zum Versuchsbeginn vorzulegen.
- Die Betreuerin / der Betreuer weist in den Versuch ein und vergewissert sich dabei, ob die Vorbereitung ausreicht oder ein Wiederholungstermin anzusetzen ist.
- Zügige Durchführung des Versuchs und Dokumentation der Ergebnisse erfolgt unter Anleitung der Betreuerin / des Betreuers, wobei die Möglichkeit zur weiterführenden Diskussion des physikalischen Hintergrundes besteht.
- Die tabellarische und graphische Auswertung des Versuchs erfolgt nach ca. 3 Stunden in Wechselwirkung mit der Betreuerin / dem Betreuer; danach weitere Arbeit am Protokoll.
- Die 4 Zeitstunden sind voll zur Anfertigung des Protokolls auszunutzen und können nur dann verkürzt werden, wenn die Betreuerin / der Betreuer das Testat erteilt hat.
- Die volle Versuchszahl (in der Regel 11) ist innerhalb eines Praktikumsurses zu erbringen, wobei maximal 2 Versuche im Rahmen der Wiederholungstermine am Ende des Kurses nachgeholt werden können.

- Spätestens am letzten Tag des Praktikumsurses müssen für alle Versuche Testate vorliegen, da ansonsten das Praktikum insgesamt nicht bewertet werden kann und verfällt.

Einordnung in den Studiengang

Die Mitarbeit im Praktikum erfordert mathematische und physikalische Vorkenntnisse entsprechend den zugehörigen Vorlesungen (Physik für Biologen et al., für Naturwissenschaften, einführende Mathematikvorlesungen der betreffenden Studiengänge) und liegt zeitlich **im Anschluss** an diese Lehrveranstaltungen.

Durchführung

Semesterkurse (wöchentlich, 4stdg) und *Ferienkurse* (fünfwochig, 2-3 Termine wöchentlich, je 4stdg).

Kleingruppenpraktikum. Paarweise Gemeinschaftsarbeit (Durchführung und Ausarbeitung der Versuche). Anleitung von 8-er-Gruppen (4 Paare) an gleichen oder verwandten Versuchen durch Tutoren. Wichtig ist eine gute Vorbereitung an Hand der Anleitung. Überprüfung der Vorkenntnisse vor Versuchsbeginn anhand von Kurzttests. Zum Praktikumstermin wird eine etwa zweiseitige Einführung in die Themenstellung und in die physikalischen Grundlagen vorgelegt, die Teil der Ausarbeitung ist.

Praktikumstermin mit *Versuchsdurchführung*, Auswertung und in der Regel Beginn des Protokolls.

Ausarbeitung von *Berichten* mit Einführung in die Themenstellung und physikalischen Grundlagen (zur Vorbereitung erstellt), Darstellung der Auswertungen und einer Zusammenfassung und kritischen Diskussion der Ergebnisse.

Unterrichtsmaterial: Versuchsanleitungen (Skript) mit Aufgabenstellungen, zusammenfassenden Darstellungen der physikalischen Grundlagen und Hinweisen zur Versuchsdurchführung. Laborhefte zur urschriftlichen

Aufnahme sämtlicher Aufzeichnungen, die von den Praktikusteilnehmern selbst zu kaufen sind.

Bewertung

Übungsschein mit Bewertungsgraden nach ECTS (European Credit Transfer System). Punktesystem für die einzelnen Versuche. Keine Klausuren oder Abschlusscolloquien.

Versuche

Versuche mit unterschiedlichen Schwerpunkten: Von sehr einfachen, exemplarischen Versuchen zur Vermittlung methodischer Grundfertigkeiten über Versuche mit höherem messtechnischen Schwierigkeitsgrad und mit weitergehenden physikalischen Ansprüchen.

Anmerkungen

Die *Anwendung* erworbener Kenntnisse ist ein wichtiger Indikator für das Verständnis. Durch Auseinandersetzung mit Details und Anleitung zu kritischer Betrachtung sollen die physikalische Prinzipien und Zusammenhänge zwischen den Phänomenen aufgezeigt werden

Als Teil einer wissenschaftlichen Ausbildung will das Praktikum nicht bei der Vermittlung "mechanistischer" Fähigkeiten stehen bleiben, sondern soll zu *wissenschaftlichem Denken* hinführen, d.h. der wissenschaftlichen Beantwortung von Fragestellungen bzw. der Ableitung von Erkenntnissen oder Gesetzmäßigkeiten durch kritische Diskussion in Kleingruppen und schließende Bewertung der Beobachtungen und quantitativen Ergebnisse.

| INHALT | NP |
|--------|----|
|--------|----|

Allgemeiner Teil

| | |
|---|----|
| Inhaltlicher Ablauf des Praktikums..... | 1 |
| Auszug aus der Praktikumsordnung..... | 3 |
| Punktesystem..... | 3 |
| Bericht/Messprotokoll | 4 |
| Musterprotokoll | 5 |
| Standardlehrbücher | 14 |

Versuchsanleitungen

| | |
|--|----|
| KUG Kugelfallviskosimeter | 15 |
| SPW Spezifische Wärmekapazität | 17 |
| GAS Gasthermometer | 19 |
| FGS Freie gedämpfte Schwingungen..... | 21 |
| GLS Gleichstrom/Wechselstrom..... | 26 |
| RC-Kreise | 30 |
| RAZ Radioaktiver Zerfall | 34 |
| GAM Gamma-Spektroskopie..... | 38 |
| SPL Spezifische Ladung des Elektrons | 43 |
| POL Polarimetrie | 45 |
| MIK Mikroskop..... | 48 |
| OPS Optische Spektroskopie | 52 |

Anhang

| | |
|--|----|
| Anlage I Fehlerrechnung | 56 |
| Anlage II Grafische Darstellungen und Auswertung von Funktionen | 61 |
| Anlage III Physikalische Größen und Einheiten..... | 65 |
| Anlage IV Konstanten und Formelzeichen | 68 |
| Anlage V Kernstrahlungsdetektoren | 70 |
| Anlage VI Strahlenschutzanweisung | 73 |

Redaktionsschluss: 18.03.08

Bearbeitung: Schattat

PRAKTIKUMSORDNUNG

NP

Die §§ 1-9 regeln Geltungsbereich, Zulassung, allgemeinen Ablauf, Scheinvergabe und die Anerkennung anderweitig erbrachter Praktikumsleistungen. Die vollständige Praktikumsordnung ist im Praktikumsgebäude ausgelegt und abrufbar unter

www.physik.fu-berlin.de/~gp/np/.

§10 Organisatorischer und Inhaltlicher Ablauf des Praktikums

(1) Die Praktikumsdurchführung erfordert eigene Vorbereitung, Teilnahme und Mitarbeit an den Vorgesprächen, Durchführung und Auswertung der Messungen und Ausarbeitung der Berichte der nebenstehenden Versuche.

Der Termin- und Arbeitsplan wird durch Aushang im Praktikumsgebäude bekannt gegeben. Nicht ausreichend vorbereitete oder mehr als 15 Minuten verspätete Teilnehmerinnen oder Teilnehmer werden von der Versuchsdurchführung zurückgewiesen. Versäumte Versuche müssen nachgeholt werden.

(2) Zu jedem Versuchen wird zu Beginn des Praktikums ein 10minütiger, schriftlicher Test mit Fragen geschrieben, die sich auf elementares Grundwissen und den Inhalt der Praktikumsanleitung zu den jeweiligen Versuchen beziehen. Die Tests dienen der Überprüfung ausreichender Grundkenntnisse.

Das Bestehen der Begleittests gehört zu den Anforderungen an eine erfolgreiche Praktikumsteilnahme. Eine Wiederholung ist erforderlich bei Testergebnissen unter 5 Punkten (50%). Zusätzlich erfolgt eine Zurückweisung vom aktuellen Versuch wegen mangelnder Vorbereitung. Der Termin gilt als versäumt und muss nachgeholt werden. (Gemäß Praktikumsordnung dürfen nicht mehr als zwei Regeltermine versäumt werden.)

(3) In der Regel arbeiten je zwei Teilnehmer zusammen, die gemeinschaftlich für die Versuchsdurchführungen und den Abschluss der Versuche (Abschlusstest) verantwortlich sind.

(4) Die Berichte müssen bestimmten inhaltlichen und äußerlichen Anforderungen entsprechen (siehe Abschnitt BERICHT). Fehlende Teile eines Berichts müssen ergänzt, fehlerhafte Darstellungen und Auswer-

tungen korrigiert werden. Berichte, deren äußere Form ein Durchsehen nicht zulassen, werden zurückgewiesen. Die Messprotokolle und die Ausarbeitungen (Berichte) müssen in gebundene Hefte (Laborhefte) eingetragen werden. Geeignete Hefte für die Protokolle müssen von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern selbst gekauft werden. Geeignet sind karierte Hefte (keine Ringordner) mit ca. 50 Blatt, von denen jede Studentin / jeder Student mindestens zwei benötigt.

Die Berichte müssen am folgenden Versuchstag vorgelegt werden. Sie werden von den Betreuerinnen und Betreuern durchgesehen und mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern besprochen (Abschlussbesprechung). Die Erteilung eines Abschlusstests setzt die Teilnahme an der Abschlussbesprechung voraus.

(5) Die Teilnahme an den Praktikumsterminen und der Abschluss der Versuche werden von den Betreuerinnen und Betreuern im Laborheft und auf einer Testatliste abgezeichnet. Die Ausgabe der Übungsscheine erfolgt nur gegen Vorlage der vollständigen Testatliste

(6) Das Praktikum muss in der Woche nach dem letzten Regeltermin vollständig abgeschlossen werden. Ein über diesen Zeitraum hinaus nicht abgeschlossenes Praktikum verfällt insgesamt.

Eine wesentliche Voraussetzung für eine konstruktive und erfolgreiche Arbeit im Praktikum und den Lernerfolg ist eine intensive physikalisch-inhaltliche Vorbereitung auf den jeweiligen Themenkreis. Die Arbeitsmittel dazu sind Skript, Lehrbücher, Papier und Bleistift und ausreichend Zeit.

Als Ergebnis der Vorbereitung muss die (kurze) schriftliche Einführung in die Themen- und Aufgabenstellung (als Teil des Berichts) ausgearbeitet und zu Versuchsbeginn vorgelegt werden. Sie müssen dabei in der Lage sein, das Thema frei, strukturiert und im Zusammenhang darzustellen und Fragen zu beantworten bzw. die eigenen Fragen zu formulieren.

Das Praktikum hat spezifische Ausbildungsziele, wobei es physikalische Inhalte vertiefen und ergänzen soll. Es kann aber nicht die Aufgabe der elementaren Stoffvermittlung übernehmen, die auf eine gründliche Mitarbeit in Vorlesungen und Übungen aufbaut.

PUNKTESYSTEM

NP

Punktesystem im Grundpraktikum

Die Leistungen bei den einzelnen Versuchen werden durch Punkte bewertet. Die Punkte dienen der Beurteilung der Gesamtleistung nach den Regeln des ECTS-Systems (*European Credit Transfer System*).

Nach Abschluss aller Versuche werden folgende Grade vergeben (**in % der Maximalpunktzahl**):

90% ≤ A ≤ 100% A (Sehr gut = very good)
 75% ≤ B < 90% B (Gut = good)
 60% ≤ C < 75% C (Befriedigend = satisfactory)
 49% ≤ D < 60% D (Ausreichend = sufficient)
 E < 49% E (Nicht ausreichend = fail).

Es erfolgt eine Einzelbewertung der Versuche, wobei für jeden Versuch maximal 5 Punkte vergeben werden können. Die erfolgreiche Bearbeitung eines Versuchs setzt eine mindestens ausreichende Leistung (1 Punkt) voraus.

Für die Bewertung werden die Leistungen in folgenden Teilbereichen herangezogen (Wertungsbereiche):

- A: Physikalische Kenntnisse und Verständnis, Vorbereitung zum Versuch.
- B: Praktische und methodische Fähigkeiten (experimentelles Arbeiten und Versuchsauswertung).
- C: Wissenschaftliche Diskussion und Bericht (Bewertung des Experiments und der Ergebnisse, schriftliche Ausarbeitung)

Die erreichten Punkte werden von den Betreuerinnen und Betreuern im Laborheft, auf der Testatliste und auf der Karteikarte notiert.

BERICHT

NP

Schriftliche Aufzeichnungen und Ausarbeitungen sind elementare Bestandteile wissenschaftlicher Arbeit. Sie dienen der Dokumentation und der Kommunikation. Erkenntnisse haben nur dann einen Wert, wenn sie nachvollziehbar, überprüfbar, und für Dritte verfügbar sind. Die Literatur ist der wichtigste Stützpunkt wissenschaftlicher Arbeit.

Die Praktikumsausarbeitungen (*Berichte*) dienen der Übung wissenschaftlich, schriftlicher Darstellungen. Sie sollen einerseits vollständig andererseits knapp und effizient verfasst werden. Diese Abwägung gehört zu den methodischen Lehrzielen des Praktikums. Bezüglich Darstellung und Umfang orientieren sie sich am Musterprotokoll im nächsten Kapitel.

Die Praktikumsberichte bestehen aus *Messprotokoll* und *Ausarbeitung*:

- Das Messprotokoll ist die Dokumentation des experimentellen Ablaufs.

Es muss sämtliche Angaben (Darstellung des experimentellen Aufbaus, Daten, Beobachtungen) enthalten, aus denen auch nach Abbau der Apparatur der Versuch vollständig nachvollzogen und ausgewertet werden kann.

- Die Ausarbeitung dient der Präsentation und Kommunikation.

Sie enthält eine kurze Darstellung der physikalischen Grundlagen und der Fragestellung, die Auswertungen und die Zusammenfassung und kritischen Diskussion der Ergebnisse und die daraus abgeleiteten wissenschaftlichen Schlussfolgerungen.

Die Inhalte und die äußere Form schriftlicher Arbeiten unterliegen hohen Anforderungen an Sorgfalt und Zuverlässigkeit. Versuchsprotokolle und Ausarbeitungen müssen von fachlich qualifizierten Lesern mit vertretbarem Aufwand nachvollzogen und verstanden werden können. Praktikumsberichte, die diesen Anforderungen nicht genügen, werden als nicht ausreichend zurückgewiesen.

Wichtiges Strukturelement schriftlicher Ausarbeitungen sind Gliederungen. Nachfolgend ist eine Standardgliederung beschrieben, die den Praktikumsberichten verbindlich zugrunde liegen muss.

Messprotokoll

Das Messprotokoll stellt eine sekundäre Quelle der durchgeführten experimentellen Arbeit dar. Es muss über lange Zeit vollständig und verfügbar bleiben. Handschriftliche Aufzeichnungen werden aus diesem Grund urschriftlich in gebundene Hefte (Laborhefte) ¹eingetragen (maschinenschriftliche Teile oder Ausdrucke werden auch hier eingeklebt), die auch im Praktikum zur Führung sämtlicher Aufzeichnungen vorgeschrieben sind. Ausdrucke von Schreibern o.ä. werden eingeklebt.

Gliederungsbestandteile des Messprotokolls sind:

Titel (Versuchsthema)

Namen; Datum

- Namen der Mitarbeiter und des Tutors; Datum des Versuchstags.

Physikalische Grundlagen

- Kurze und zusammenfassende, eigene Darstellung der physikalischen Grundlagen der Themen- und Fragestellung, der Meßmethode und der Messgleichungen (nicht zulässig sind wörtliche Abschriften aus der Literatur).
- Die Darstellung muss eine kurze, aber vollständige Übersicht über wesentliche Aspekte der untersuchten Größen und Gesetzmäßigkeiten geben. Nicht erforderlich sind lehrbuchartige Ausführungen.
- Thematisch verfehlt sind Beschreibungen der praktischen Versuchsdurchführung.

Experimenteller Aufbau und Geräte

- Skizze des Versuchsaufbaus; Auflistung der verwendeten Geräte mit den Gerätedaten.

Messwerte

- Datum, Beginn, Ende
- Größenbezeichnungen mit Maßzahlen, Werte, Fehlergrenzen und Maßeinheiten in unmittelbarer Form. Kommentare zu den Fehlerangaben. Strukturelement: Tabellenform.
- Sonstige Beobachtungen.

Auswertungen

- Zusammenfassende Darstellung der Auswertungen mit grafischen Darstellungen (auf Original-Netzpapier; an zugehöriger Stelle in den Text einkleben), ausgewerteten Funktionsparametern, Zwischenwerten, Ergebnissen und Fehlergrenzen. Kommentare zur Fehlerbetrachtung. (Strukturelement: Tabellenform).
- Die Auswertung muss die Herleitung der Ergebnisse einfach nachvollziehbar und überprüfbar machen. Sie darf keine Kladderatzel zur Rechendurchführung sein.

Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Knappe, zusammenfassende Darstellung:

- Was und wie wurde gemessen? (Messgrößen, Messmethode).
- Was ist herausgekommen? (Übersichtliche Aufzählung der Ergebnisse).
- Wie sind die Ergebnisse zu bewerten? (Kritischer, qualitativer und quantitativer Vergleich von Ergebnissen untereinander, mit theoretischen Erwartungen; mit Literaturwerten. Physikalische Bewertung und Schlussfolgerungen, Fehlerdiskussion)

¹ Es müssen mindestens zwei Laborhefte von ca. 50 Seiten, kariert (keine Ringordner), von den Studenten gekauft werden, und sie sind am ersten Praktikumstag mitzubringen.

| | | |
|-----|---------------|----|
| (1) | MUSTERBERICHT | NP |
|-----|---------------|----|

(2) FEDERPENDEL

Albert Ach, Paula Puh

(3) Physikalische Grundlagen

(4) Bei einer idealen Feder ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung (Hookesches Gesetz):

(A) $F = -D x$

(6) Der Proportionalitätsfaktor D heißt Federkonstante. In Aufgabe 1 wird dies Gesetz direkt überprüft.

Mit (A) folgt als Newtonsche Bewegungsgleichung, wenn m die gesamte bewegte Masse ist.

(B) $-D x = m \ddot{x}$

Lösungsansatz ist:

(C) $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \Phi)$

wobei x_0 die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und Φ eine Phasenkonstante sind. Für die Kreisfrequenz erhält man durch Einsetzen von (C) in (B):

(D) $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ und $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$

Die Beziehung (D) für die Schwingungszeit wird in Aufgabe 2 überprüft.

Gleichung (B) geht davon aus, dass die gesamte Masse die gleiche Beschleunigung erfährt. Das

gilt aber nicht für die Feder selbst. Am Aufhängepunkt sind die Amplitude und Beschleunigung Null, am freien Ende der Feder haben sie die Werte der angehängten Masse.

(1) Der nebenstehende Musterbericht zu einem (fiktiven) Versuch stellt ein *positives* Beispiel und einen Kommentar gegenüber. Er dient zusammen mit den Hinweisen zum Bericht (siehe Darstellung BERICHT) zur Orientierung hinsichtlich Form und Inhalt der im Grundpraktikum geforderten schriftlichen Niederlegung und Darstellung physikalisch-wissenschaftlicher Arbeit.

Sämtliche Teile des Berichts (Darstellung der physikalischen Grundlagen, Messprotokoll, Auswertung, Zusammenfassung und Diskussion) müssen urschriftlich in gebundene Laborhefte eingetragen werden.

Die Darstellung der physikalischen Grundlagen muss zur Vorbereitung vor Versuchsbeginn ausgearbeitet und vorgelegt werden. (Sollte dazu das Laborheft nicht vorliegen, muss die Niederschrift auf zusätzliche Blätter erfolgen, die später in das Laborheft eingeklebt werden).

(2) Zur besseren Übersicht beginnt jeder Bericht auf einer neuen Seite mit dem Titel des Themas.

(3) Der Bericht muss durch Überschriften deutlich abgesetzt gegliedert sein.

(4) Die Darstellung der physikalischen Grundlagen soll zusammengefasst eine kurze Einführung in das Thema und die Fragestellung des Versuchs geben:

Welche Phänomene oder Prinzipien werden untersucht?

Nach welchen Methoden soll gemessen werden?

(5) Die Darstellung muss sich auf die physikalischen Inhalte beziehen. Sie soll knapp, muss aber vollständig sein. Lehrbuchartige Ausführungen und mathematische Herleitungen von Formeln für elementare Sachverhalte sind nicht erforderlich.

(6) Die Darstellung muss eigenständig sein. Literaturhinweise allein oder wörtliche Abschriften oder Kopien des Skripts sind nicht zulässig.

(7)

Die Masse der Feder wird durch eine Ersatzmasse (effektive Federmasse) am Federende berücksichtigt, an der die gleiche Beschleunigungsarbeit geleistet werden muss, und die damit die gleiche kinetische Energie wie die Feder selbst besitzt.

Der Geschwindigkeitsverlauf an der Feder ist linear:

$$(E) \quad v(x) = v_0 \frac{x}{x_0}$$

Die Masseverteilung längs der Feder ist konstant, und für ein Federelement dx folgt:

$$(F) \quad dm = m_F \frac{dx}{x_0}$$

Daraus folgt für die gesamte kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} v^2 dm = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{x_0^2} \frac{m_F}{x_0} \int_0^{x_0} x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{x_0^2} \frac{m_F}{x_0} \frac{1}{3} x_0^3$$

$$(G) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} m_F v_0^2 \right]$$

(8)

d.h., die Feder muss mit einem Drittel ihrer Masse berücksichtigt werden.

Aufgaben

1. Berechnung der Federkonstanten einer Schraubenfeder durch Messung der Auslenkung der Feder.
2. Berechnung der Federkonstanten aus der Schwingungszeit als Federpendel.

(7)

Besondere Sachverhalte und Formeln müssen erläutert bzw. hergeleitet werden.

(8)

Die Wiederholung der Aufgabenstellung dient der Orientierung und dem Verständnis bei den folgenden Aufzeichnungen.

Messprotokoll

- (9) Paula Puh, Albert Ach;
Tutor: Peter Pi;
- (10) 3.3.1981; Beginn 10.15 Uhr, Ende 12.20 Uhr.
- (11) Geräte
- (12) Stativ mit Spiegelskala (300 mm; Teilung 1 mm).
- (13) Feder mit Marke und Schale (Apparatur 3).
Gewichtssatz ("5/10/20/20'/50 g").
Handstoppuhr (Ablesegenauigkeit 0,1 s).
Waage "Sartorius"; (Ablesegenauigkeit 0,05 g).
- Massen
- (14) ~~$m_5 = 4,99 \text{ g}$ (alle Massenfehler 0,05 g Auflösfehler)~~
 ~~$m_{10} = 9,92 \text{ g}$~~
 ~~$m_{20} = 19,92 \text{ g}$~~
(Messung wegen Nachjustierung des Nullpunkts verworfen).
- (15) $m_5 = 5,00 \text{ g}$
 $m_{10} = 9,90 \text{ g}$
 $m_{20} = 19,90 \text{ g}$
 $m_{20'} = 19,95 \text{ g}$
 $m_{50} = 49,90 \text{ g}$
- Feder Masse $m_f = 15,15 \text{ g}$
- (17) Masse von Marke und Schale $m_s = 8,50 \text{ g}$
- Zur Messung der Schwingungsdauer (Aufgabe 2)
- Amplitude ca. 30 mm.
Die Schwingungsdauer der unbelasteten Feder konnte nicht gemessen werden, da sie nicht gleichmäßig schwingt.
Die Zeiten wurden am Umkehrpunkt gestoppt. Messung von 10 T zur Reduzierung der Reaktionsfehler.

- (9) Die Namen der Autoren und der Betreuerin (des Betreuers) sind wichtig, um zu wissen, wem der Bericht gehört und wer dafür zuständig ist.
- (10) Das Datum ist eine Standardinformation. Die Zeit kann zur nachträglichen Diskussion von Störeinflüssen wichtig sein (Temperaturänderungen, Netzspannungsschwankungen, ...).
- (11) Für die Rekonstruktion des Experiments und die Interpretation der Daten (z.B. Fehlerinformationen) müssen zusammenfassend alle Geräte mit ihren wichtigen Nenndaten aufgeführt werden (Typ, Hersteller; Fehlerangaben).
- (12) Alle Geräteangaben müssen unmittelbar so notiert werden, wie sie angegeben sind (Messbereiche, Empfindlichkeitskoeffizienten, Skalenteilungen, Fehlerangaben, ...).
- (13) Die Angabe, an welchem Versuchsplatz bzw. mit welchen Bauteilen oder Proben gearbeitet wurde, ist zur späteren Rekonstruktion und zum Vergleich von Ergebnissen wichtig.
- (14) Verworfen Werte kenntlich machen (z.B. durchstreichen), aber lesbar erhalten. Keine Daten radieren oder sonst wie vernichten.
- (15) Auch Nullen sind Zahlen; z.B. die Messung nicht mit 5 g, sondern korrekt mit 5,00 g protokollieren. Die Anzahl der Ziffern eines Werts enthält implizit Information über die Genauigkeit und das Auflösungsvermögen des Werts.
- (16) Eine Skizze des Versuchsaufbaus ist anschaulich und hilft, Bezeichnungen der Geräte und Größen zu verstehen. Bei elektrischen Versuchen ist ein Schaltplan, bei optischen Experimenten der Strahlengang mit der Position der optischen Komponenten unerlässliche Voraussetzung auch zum physikalischen Verständnis der Messdaten.
- (17) Alle Überlegungen und sonstigen Informationen zu den Messungen auch niederschreiben.

(18) Ausdehnung der Feder unter Belastung (Aufgabe 1)

| Massen | Pos. Marke | M / g | x / mm |
|----------|------------|----------|--------|
| ohne | 2,5 | | 0 |
| 5 | 17,0 | 5,00(5) | 14,5 |
| 10 | 31,0 | 9,90(5) | 28,5 |
| 10+5 | 45,5 | 14,90(7) | 43,0 |
| 20 | 59,5 | 19,90(5) | 57,0 |
| 20+5 | 74,0 | 24,90(7) | 71,5 |
| 20+10 | 88,3 | 29,80(7) | 85,5 |
| 20+10+5 | 102,5 | 34,80(9) | 100,0 |
| 20+20' | 116,0 | 39,85(7) | 114,5 |
| 20+20'+5 | 131,5 | 44,85(9) | 129,0 |
| 50 | 145,5 | 49,90(5) | 143,0 |
| ohne | 2,5 | | |

(21) Schwingungsdauer als Federpendel (Aufgabe 2)

| Massen | 10 T / s | M / g | T ² / s ² |
|--------|----------|----------|---------------------------------|
| 10 | 5,4 | 9,90(5) | 0,29(4) |
| 20 | 6,2 | 19,90(5) | 0,38(4) |
| 20+10 | 7,0 | 29,80(7) | 0,49 |
| 20+20' | 7,9 | 39,85(7) | 0,62(5) |
| 50 | 8,7 | 49,90(5) | 0,76 |
| 50+10 | 9,0 | 59,80(7) | 0,81 |
| 50+20 | 9,7 | 69,80(7) | 0,94(6) |

AUSWERTUNG

Auslenkung in Abhängigkeit der Belastung

Siehe grafische Darstellung Auslenkung x gegen Auflagemasse m auf der Folgeseite. Es ergab sich die erwartete Nullpunktgerade mit dem Anstieg:

$$D \cdot g = (0,345 \pm 0,003) \text{ kg m}^{-1}$$

(18) Über jede Tabelle eine Überschrift setzen, damit zu sehen ist, um welche Messung es sich handelt.

(19) Längeneinheiten mm und cm nicht verwechseln. Viele Maßstäbe (Meßblatten, Lineale, Schiebelehren) sind in cm kalibriert. Diese Skala hatte eine mm-Teilung.

(20) Eine Skala kann durch Schätzung zwischen zwei Teilstrichen genauer als auf ein Skalenteil (Skt) abgelesen werden (Schätzstelle; hier die Nachkommastelle). Der Fehler ist aus den Ablesebedingungen zu ermitteln; hier wurde die Obergrenze von einem ganzen Skalenintervall angenommen ($\pm 0,5$ Skt).

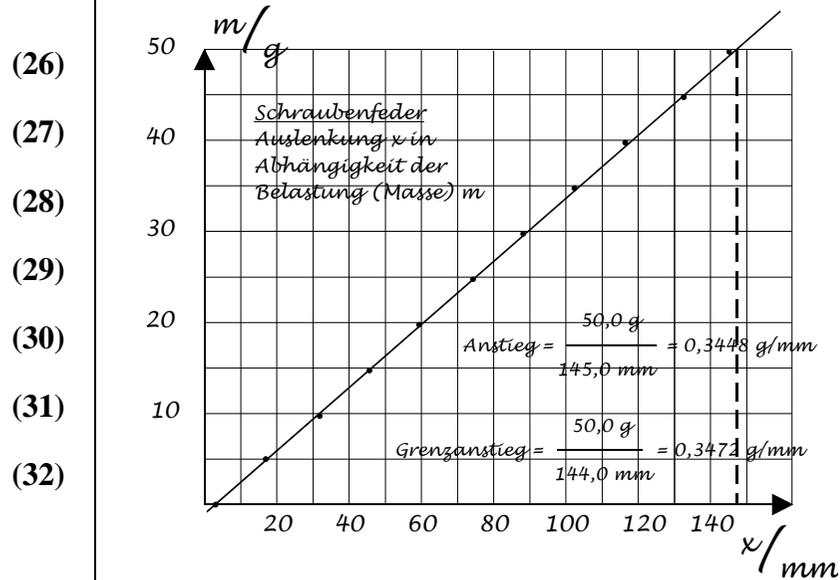
(21) Die letzte Messung wurde zur Kontrolle der Anfangswert (Nullpunkt) wiederholt.

(22) Berechnete Folgewerte zur besseren Übersicht in die Messtabelle integrieren.

(23) Alle Messungen unmittelbar so notieren, wie sie vorgenommen wurden; also nicht "15 g" oder nur den berechneten Wert 14,90 g schreiben, sondern welche Gewichtsstücke benutzt wurden.

(24) Fehlerrechnungen und Fehlerwerte nur dann ohne weitere Kommentare anführen, wenn sie rein formal nach den Fehlerfortpflanzungsgesetzen berechnet wurden und dabei alle Eingangsfehler erfassen.

(25) Zu Aufgabe 1: Auslenkung einer Feder unter Belastung



Zu Aufgabe 2: Schwingungsdauer einer Feder

(33) Schraubenfeder
Schwingungszeit T^2 in
Abhängigkeit der
Belastung (Masse) m

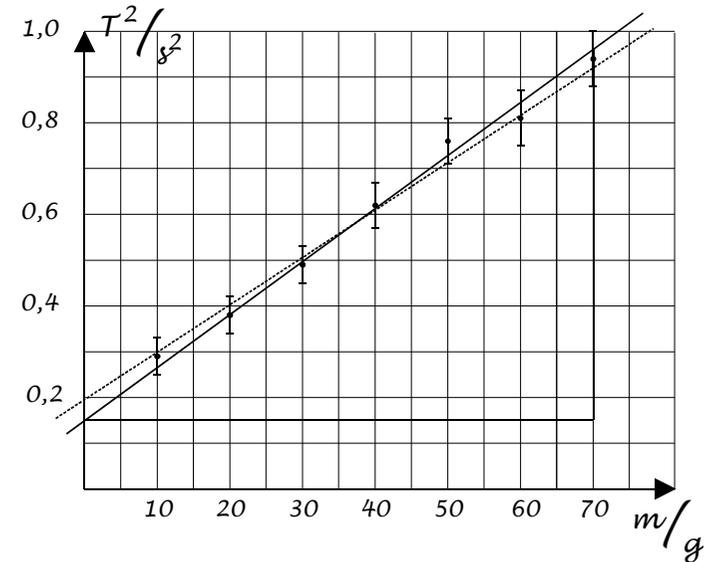
(34)

(35)
$$\text{Anstieg} = \frac{(0,96 - 0,15)\text{ s}^2}{70\text{ g}} = 0,012\text{ s}^2/\text{g}$$

$$\text{Grenzanstieg} = \frac{(0,92 - 0,20)\text{ s}^2}{70\text{ g}} = 0,010\text{ s}^2/\text{g}$$

(36)

(37)



(25)

Zur Ausführung von grafischen Darstellungen siehe Anleitung GRAFISCHE DARSTELLUNGEN UND AUSWERTUNG VON FUNKTIONEN hier im Skript.

(26)

Grafische Darstellungen sind auf Original-Netzpapier anzufertigen (mm-Papier, log-Papier; im Praktikum erhältlich). (In der nebenstehenden Abbildung musste aus darstellungstechnischen Gründen auf die korrekte Abbildung von Netzpapier verzichtet werden). Sie sind in den logischen Zusammenhang des Berichts fest einzufügen (einzukleben).

(27)

Zur Auswertung herangezogene Darstellungen dürfen aus Genauigkeitsgründen nicht zu klein gewählt werden; Standardfall im Praktikum ist formatfüllendes DIN A4.

(28)

Das Netz ist optimal auszunutzen, wobei hinsichtlich der Überprüfbarkeit die Achsenkalibrierung einfach sein und keine ungeraden oder komplizierten Teilungsmaße enthalten soll (1 Einheit pro 30 mm o.ä.).

(29)

Jede Darstellung muss eine Legende tragen (was ist unter welchen Bedingungen dargestellt).

(30)

Die Achsen müssen vollständig bezeichnet werden (Skalierung, Größen, Einheiten).

(31)

Es müssen sämtliche Messpunkte und Fehlerbalken eingetragen werden.
Ist die Streuung von Daten sehr gering, so muss eine empfindlichere Darstel-

- (32) lung oder ein numerisches Auswerteverfahren in Betracht gezogen werden. In Grenzfällen muss die Genauigkeit der Auflösung und der Einzelwerte zur Fehlerabschätzung herangezogen werden.
- (33) Werden Variablen transformiert, so ist dies bei der Achsenbezeichnung zu berücksichtigen.
- (34) Es ist ausreichend, nur eine der beiden möglichen Grenzgeraden zur Fehlerabschätzung zu betrachten. Die Fehler ergeben sich als Differenzen zwischen den Ausgleichs- und den Grenzgeraden.
- (35) Die zur Berechnung herangezogenen Anstiegsdreiecke sind zur Prüfung einzutragen. Sie sind möglichst groß zu wählen (Achsen Schnittpunkte), um Zeichen- und Ableseungenauigkeiten gering zu halten.
- (36) Zur Nachvollziehbarkeit sollen die berechneten Funktionsparameter mit in die Darstellung eingetragen werden.
- (37) Bei der Angabe der Parameter ist darauf zu achten, dass es sich im Allgemeinen um dimensionierte Größen handelt, die mit Einheiten anzugeben sind.

- (38) *Die Fehler Δm sind vernachlässigbar, die Fehler Δx liegen an der Grenze der Darstellungsmöglichkeit (Punkt Durchmesser). Zur Abschätzung einer Grenzgeraden wurde unter Berücksichtigung von Zeichengenauigkeit und Streuung ein Fehler von 1 mm bei der Auslenkung angesetzt.*
- (39) *Mit $g = 9,8128(1) \text{ m/s}^2$ (Angabe im Skript; Fehler vernachlässigbar) folgt für die Federkonstante:*

$$D = (3,383 \pm 0,024) \text{ N m}^{-1}$$

Aufgabe 2: Auslenkung einer Schraubenfeder unter Belastung

Mit der Masse von Schale und Marke m_s , der effektiven Feder Masse nach (G) und der variablen Anhängemasse m ist nach (D):

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{D} \left(m_s + \frac{1}{3} m_f \right) + \frac{4 \pi^2}{D} m$$

In der transformierten Darstellung von T^2 gegen m (siehe Vorseite) ergab sich die erwartete Gerade mit dem Anstieg:

$$\frac{4 \pi^2}{D} = (12 \pm 2) \text{ s}^2 \text{ kg}^{-1}$$

Daraus folgt für die Federkonstante:

$$D = (3,29 \pm 0,55) \text{ N m}^{-1}$$

Der Achsenabschnitt ist

$$\frac{4 \pi^2}{D} \left(m_s + \frac{1}{3} m_f \right) = (0,15 \pm 0,05) \text{ s}^2$$

Mit dem obigen Wert für die Federkonstante folgt als effektive Masse der Feder:

$$m_f = (13 \pm 13) \text{ g}$$

- (38) Die Fehlerrechnung (Fehlerfortpflanzung, Fehlerabschätzung von Funktionsparametern) ist integraler Bestandteil der Auswertung. Fehlerwerte und Kommentare zur Fehlerrechnung gehören direkt an die Ergebnisse selbst.
- (39) Eine Niederschrift rein formaler Fehlerberechnungen (Zahlenwertgleichungen zum Fehlerfortpflanzungsgesetz) ist nicht erforderlich. Dagegen müssen Fehlerwerte immer erläutert werden, wenn bei der Abschätzung besondere individuelle oder lokale Gesichtspunkte berücksichtigt wurden.
- (40) Fehler-Zwischenwerte im Auswerteteil sollen zweistellig berücksichtigt und notiert werden.

$$D = (3,38 \pm 0,03) \text{ N m}^{-1}$$

Die Genauigkeit der Bestimmung aus der Schwingungszeit hätte durch Messung einer größeren Anzahl von Perioden gesteigert werden können.

Die qualitative und quantitative Übereinstimmung der Messungen untereinander und mit dem erwarteten Verlauf zeigt die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes (A) und des Bewegungsgesetzes (C) mit (D).

Aus der Messung der Schwingungszeit in Abhängigkeit von der Anhängemasse ließ sich zusätzlich der Beitrag der Feder Masse selbst bestimmen. Das Ergebnis für die Feder Masse m_f mit $(13 \pm 13) \text{ g}$ steht dabei formal (noch) in Übereinstimmung mit dem auf der Waage ermittelten Messwert von $(15,15 \pm 0,05) \text{ g}$ und widerspricht zumindest nicht einem Ansatz einer effektiven Feder Masse von $1/3 m_f$. Der sehr große Fehler muss aber als unbefriedigend angesehen werden, da er an der anderen Grenze auch noch den Schluss zulässt, dass die Feder selbst keinen Anteil zur trägen Masse beiträgt.

- (41) Wobei der D-Wert wegen der besseren Genauigkeit aus Ausgabe 1 übernommen wurde. Der große Fehler resultiert zum einen aus den schlechten Messdaten (Fehler des Achsenabschnitts 34 %), wobei die Vergrößerung auf
- (42) 100 % sich aus der Differenzbildung in der Auswertebziehung ergibt.

- (43) Bei der Fehlerabschätzung müsste grundsätzlich berücksichtigt werden, daß der Anstieg und der Achsenabschnitt korreliert sind. Das kann hier jedoch außer Betracht bleiben, da der Fehler von D nicht beitragend
- (44) ist und ebenso wie der der Masse der Schale vernachlässigt wurde.
- (45)

(46) Zusammenfassung und Diskussion

- (47) Die Messung der Federkonstanten einer Schraubenfeder durch Auslenkung in Abhängigkeit der Belastung und durch Messung der Periodendauer eines Federpendels
- (48) ergab übereinstimmende Werte, wobei als Ergebnis der bessere Wert aus der Auslenkungsmessung herangezogen wird:
- (49)

- (41) Fehler müssen in besonderen Fällen diskutiert werden. Welches sind die stark beitragenden Fehler? Was beeinflusst die Fehlerfortpflanzung?
- (42) Bei korrelierten Größen muss zumindest der Maximalfehler berechnet werden. (Besser ist es, die Korrelation zu untersuchen).
- (43) Die Zusammenfassung und Diskussion muss Thema, Ziele und Ergebnisse des Versuchs übersichtlich und auf das Wesentliche bezogen darstellen: Was wurde untersucht? Wie oder nach welchen Methoden wurde gemessen? Welche Ergebnisse sind herausgekommen? Wie sind die Ergebnisse wissenschaftlich zu bewerten?
- (44) Die Ergebnisse sind qualitativ und quantitativ untereinander oder mit Literaturwerten zu vergleichen.
- (45) Werte stimmen überein, wenn sich die Fehlerintervalle überschneiden. Werte sind verträglich, wenn sich die dreifachen Fehlerintervalle überschneiden (Verträglichkeitsmaß). Werte werden erst dann als signifikant unterschiedlich betrachtet, wenn sich auch die dreifachen Fehlerintervalle nicht mehr erreichen.
- (46) Bei Ergebnissen mit unterschiedlichen Fehlern muss ein gewichteter Mittelwert gebildet werden. Bei Ergebnissen mit sehr unterschiedlichen Fehlern wird man den genaueren Wert als Endergebnis heranziehen.
- (47) Ergebnisse sind mit den absoluten Fehlern als Vergleichsgrundlage anzugeben. Der relative Fehler dient ergänzend der Genauigkeitsangabe.
- (48) Fehler von Endergebnissen sind aufgerundet einstellig anzugeben.
- (49) Auch die Fehler müssen in die Diskussion einbezogen werden. Wie könnte die Genauigkeit grundsätzlich apparativ oder methodisch verbessert werden?

STANDARDLEHRBÜCHER

NP

Die folgenden Lehrbücher werden verbreitet zur Vermittlung physikalischen Grundwissens herangezogen, wie es für die Vorbereitung der Praktikumsarbeit erforderlich ist. Eine Reihe von Lehrbüchern wurden in verschiedenen Auflagen bzw. Jahren herausgegeben, so dass auf eine Angabe des Erscheinungsjahrs verzichtet wurde. Alle Bücher sind in der Lehrbuchsammlung der Fachbereichsbibliothek Physik vorhanden.

GRUNDLITERATUR**Hellenthal;****Physik für Pharmazeuten, Mediziner, Biologen****Harten u.a.;**

Physik für Mediziner

Trautwein u.a.;

Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten

Ballif-Dibble;

Anschauliche Physik für Studierende der Ingenieurwissenschaften, Naturwissenschaften und Medizin

ZUSATZLITERATUR**Otten;**Repititorium der Experimentalphysik;
Springer-Verlag**Westphal;**Kleines Lehrbuch der Physik;
Springer-Verlag**Tipler;**Physik;
Spektrum Akademische Verlagsanstalt**Gerthsen-Kneser-Vogel;**Physik;
Springer-Verlag**Hänsel-Neumann;**Physik 1-3;
Spektrum Akademische Verlagsanstalt**Martienssen;**Einführung in die Physik (I: Mechanik,
II: Elektrodynamik, III: Thermodynamik,
IV: Schwingungen-Wellen-Quanten);
Akademische Verlagsgesellschaft

KUGELFALLVISKOSIMETER

NP

Verschieben sich Moleküle in einer Flüssigkeit gegeneinander, so versuchen die Nachbarpartikelchen durch die Bindungskräfte (Kohäsionskräfte) dies zu verhindern. Es tritt Reibung (innere Reibung) auf, die anschaulich als Zähigkeit der Flüssigkeit wahrnehmbar ist und quantitativ durch die Viskosität beschrieben wird. Die innere Reibung bzw. Viskosität spielt bei sehr vielen technisch-angewandten Prozessen eine wichtige Rolle. Die innere Reibung ist für das $1/r^4$ -Gesetz verantwortlich, wonach (bei gegebener Druckdifferenz) der Strömungswiderstand ($\Delta p / \dot{V}$) einer Rohrleitung mit kreisförmigem Querschnitt mit der vierten Potenz des Radius abnimmt (Hagen-Poiseuillesches Gesetz, $\dot{V} \sim r^4$ bzw. $\Delta p / \dot{V} \sim 1/r^4$). Organische Kreislaufsysteme regeln so in sehr effektiver Weise die Durchblutung (Blutstrom).

Bei den meisten Flüssigkeiten ist die Viskosität konstant oder nur von der Temperatur abhängig. Suspensionen dagegen, wie Blut, zeigen ein abweichendes Verhalten. Die Erythrozyten gleichen langgestreckten Ellipsoiden, die sich bei größer werdendem Druck zunehmend parallel zur Strömungsrichtung ausrichten und somit die innere Reibung bzw. Viskosität erniedrigen. Auch dies trägt konstruktiv zur Durchblutungssteuerung bei.

Viele hochpolymere Stoffe, wie Kautschuk, zeigen Bereiche verschiedener Elastizität. Bei sehr tiefen Temperaturen ist Gummi hochelastisch, vergleichbar den Metallen. Bei höheren Temperaturen dagegen werden die Elastizitätskonstanten sehr klein, und Belastungen folgen nicht mehr dem Hookeschen Gesetz. Verformungen in diesem Bereich setzen sich aus einem elastischen Anteil und einem inelastischen Anteil zusammen, bei dem das Material wie eine hochviskose Flüssigkeit fließt (Viskoelastizität). Der viskoelastische Zustand ist dadurch bedingt, dass bei höheren Temperaturen die Valenzbindungen von Makromolekülen rotieren können, d.h. dass alle Einstellungen der C-C-Bindungen auf einem Kegelmantel möglich sind. Die Makromoleküle können sich so gegeneinander verschieben und verformen. Bei tiefen Temperaturen dagegen werden die Van-der-Waals-Bindungskräfte dominant und führen zum "Einfrieren" der Rotationsmöglichkeiten.

Aufgaben

- (Viskosität): Messung der Viskosität η von Rizinusöl in Abhängigkeit von der Temperatur; Angabe des Viskositätswertes für 20 °C.
- (Kugelradien): Bestimmung der Radien r kleiner Stahlkugeln.

Physikalische Grundlagen

Innere Reibung und Viskosität

Materie wird durch molekulare und atomare Bindungskräfte (Bindungsenergien) zusammengehalten. Dem Zusammenhalt entgegen wirkt die von der Temperatur abhängige thermische Energie des Systems in Form der molekularen Bewegung. Aus dem Verhältnis von Bindungsenergie und thermischer Energie ergeben sich die unterschiedlichen Phasen von Materie, insbesondere die Aggregatzustände fest, flüssig und gasförmig.

In Flüssigkeiten gibt es bereits verhältnismäßig große Bindungskräfte, die eine Volumenbeständigkeit und Nahordnung herbeiführen. Jedoch können die Moleküle unter Einwirkung der thermischen Energie noch leicht Plätze tauschen, so dass Flüssigkeiten in sich beweglich bleiben. Bei gerichteten Bewegungen in der Flüssigkeit muss zur Überwindung der Bindungskräfte jedoch Arbeit aufgewendet werden, um die innere Reibung zu überwinden. Bei makroskopischen Systemen sind Reibungskräfte oft proportional zur Geschwindigkeit, und dem folgend wird auch die Reibungskraft F_R eines Körpers der Fläche A , der sich parallel zu dieser Fläche in der Flüssigkeit bewegt, proportional zum Geschwindigkeitsgefälle dv/dr angesetzt (relative Geschwindigkeitsdifferenz quer zur Bewegungsrichtung):

$$(1) \quad F_R = -\eta A \frac{dv}{dr}.$$

Der Proportionalitätsfaktor η heißt Koeffizient der inneren Reibung oder Viskosität (genauer: dynamische Viskosität). Die Viskosität ist eine Materialkonstante; ein anschaulicher Name ist Zähigkeit.

Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Die innere Reibung ist aufgrund der Konkurrenz zwischen Bindungsenergie und thermischer Energie stark temperaturabhängig. Sie folgt für Flüssigkeiten einer für

thermische Prozesse typischen Exponentialfunktion mit $1/T$ im Exponenten:

$$(2) \quad \eta = A e^{-\frac{B}{T}},$$

wobei auch die Parameter A und B charakteristische Materialkonstanten sind.

Messmethode

Bei Bewegungen durch ein kontinuierliches Medium (Flüssigkeit, Gas) erfahren kugelförmige Körper bei nicht zu großen Geschwindigkeiten eine Reibungskraft, die ihrer Geschwindigkeit, ihrem Radius und der Viskosität des Mediums proportional ist. Die Untersuchung der Bewegung kann als Methode zur Bestimmung der Viskosität herangezogen werden (Kugelfallviskosimeter).

Lässt man (Stahl-) Kugeln mit kleinem Radius ($r \approx 1$ mm) in einer verhältnismäßig zähen Flüssigkeit fallen (hier Rizinusöl), so beobachtet man, dass sich die Kugeln nach kurzer Zeit mit konstanter Geschwindigkeit bewegen und die Beschleunigung Null ist. Demnach erfolgt die Bewegung *kräftefrei* ($F = m a = 0$), d.h. die Summe aller an der Kugel angreifenden Kräfte muss verschwinden. Als Kräfte auf die Kugel wirken die *Schwerkraft* F_G , der *Auftrieb* F_A und die *Reibungskraft* F_R :

$$(3) \quad F_G + F_A + F_R = 0.$$

Die Schwerkraft (Gewicht) der Kugel beträgt:

$$(4) \quad F_G = m_K g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_K g,$$

wenn r der Kugelradius, ρ_K die Dichte der Kugel (Stahl) und g die Fallbeschleunigung ist ($g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$).

Der Auftrieb F_A eines Körpers ist gleich der Gewichtskraft der von ihm verdrängten Flüssigkeit oder des Gases (*archimedisches Prinzip*) und der Fallbeschleunigung entgegengerichtet:

$$(5) \quad F_A = -\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{Fl} g.$$

Auch die Reibungskraft F_R ist der Geschwindigkeit entgegengerichtet. Die genaue Abhängigkeit von der

Viskosität, dem Kugelradius und der Geschwindigkeit lautet (*stokessches Gesetz*):

$$(6) \quad F_R = -6 \pi \eta r v.$$

Wird die Geschwindigkeit v gemessen (Fallstrecke s und Fallzeit t), so kann die Viskosität η durch Einsetzen von (4, 5 und 6) in (3) berechnet werden.

Die Bestimmung unbekannter Radien r_x läuft auf *Vergleichsmessungen* zwischen Kugeln mit dem Radius r_x und einer Kugel mit bekanntem Radius r_0 hinaus. Die Auswertgleichung reduziert sich auf das Verhältnis der Fallzeiten t_0/t_x unter der Voraussetzung gleicher Fallstrecke s und gleicher Viskosität η , d.h. *gleicher Temperatur*. Man erhält sie durch Gleichsetzen der Beziehungen für η für unterschiedliche Radien, wobei sich aus der Formel bis auf die Radien und die Fallzeiten sämtliche anderen Größen herauskürzen.

Versuchsdurchführung

Es sind mit Rizinusöl gefüllte Standzylinder und Kugeln verschiedener Radien vorhanden. Der Zylinder trägt Ringmarken, deren Abstand mit einem Metallmaßstab gemessen werden kann. Die Bestimmung der Fallzeiten erfolgt mit Handstoppuhren. Die Kugeln sind vor jeder Messung gut zu reinigen, da an den Kugeln anhaftendes, altes Öl verharzt sein und damit den scheinbaren Radius der Kugeln vergrößern kann. Die Kugeln können mit einem Magneten wieder aus dem Zylinder entfernt werden.

Die Viskosität des Öles ist sehr stark temperaturabhängig. Schon die Änderung der Temperatur um 1 K führt zu einer deutlichen Viskositätsänderung. Die Einstellung und Konstanthaltung unterschiedlicher Temperaturen zur Messung der Temperaturabhängigkeit wäre wegen der thermischen Trägheit der Apparatur (Standzylinder mit Öl) sehr langwierig. Aus Vereinfachungsgründen werden deshalb die Standzylinder vor Versuchsbeginn abgekühlt (Kühlschrank), so dass man durch die Aufwärmung während der Versuchsdurchführung unterschiedliche Temperaturen erhält.

In Strenge ist dies inkorrekt, da die Temperatur als Zustandsgröße ein *thermisches Gleichgewicht* voraussetzt. Tatsächlich ergeben sich aber in dem Standzylinder während der Aufwärmung nicht nur räumliche Temperaturdifferenzen (*Temperaturgradienten*) sondern auch Konvektion innerhalb des Öles. Die Temperatur-

abhängigkeit der Viskosität kann dennoch qualitativ richtig beobachtet werden, wenn die Messungen unter gleichbleibenden Umständen durchgeführt werden (gleicher "Fallkanal" in der Mitte des Zylinders, gleiche Messstrecke, Thermometer an der gleichen Stelle belassen), so dass diese systematischen Fehler bei allen Messwerten in etwa gleich sind. Insbesondere darf nicht versucht werden, das Öl durch Rühren mit dem Thermometer zu "homogenisieren", da dies wegen der Zähigkeit des Öles und der Höhe des Standzylinders nicht gelingt und nur zu unsystematischen Verhältnissen führt.

Zur Versuchsdurchführung werden die Fallzeiten der verschiedenen Kugeln in Abhängigkeit von der Temperatur gemessen. Die Messungen müssen über einen Zeitraum von mindestens einer Stunde durchgeführt werden, um eine genügend große Temperaturänderung und ausreichend viele Messpunkte zu erhalten. Man geht zweckmäßigerweise so vor, dass man nacheinander und wiederholend in gleichbleibender Reihenfolge die Fallzeiten für die verschiedenen Kugeln und die zugehörigen Temperaturen aufnimmt.

Zu Aufgabe 1 (Viskosität)

Zur Auswertung werden die Fallzeiten t über $1/T$ (Temperaturen in Kelvin umrechnen!) einfachlogarithmisch dargestellt und die Messpunkte gemäß (2) durch (parallele) Geraden ausgeglichen. Das Diagramm ist so anzulegen, dass die Fallzeit bei 20 °C zur Berechnung des Vergleichswerts der Viskosität extrapoliert werden kann (siehe Abb. 1).

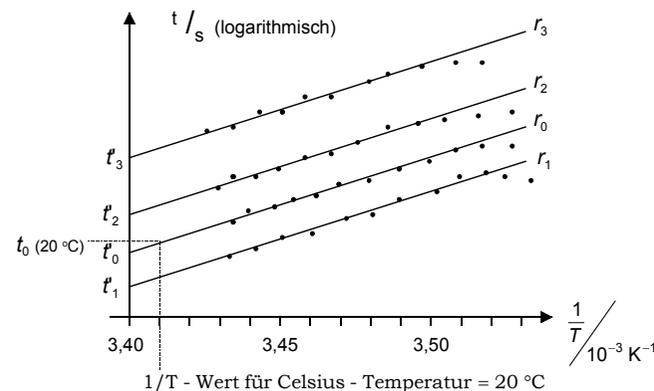


Abb. 1: Grafische Auswertung. Eintrag paralleler Ausgleichsgeraden (warum?) und Festlegung der extrapolierten Fallzeit zur Berechnung der Viskosität bei 20 °C und der unbekanntem Kugelradien.

Die Messpunkte am "rechten Rand" können dabei systematisch vom linearen Verlauf abweichen und sollen bei der Festlegung der Ausgleichsgeraden nicht mit berücksichtigt werden. Versuchen Sie den Effekt zu erklären.

Zu Aufgabe 2 (Kugelradien)

Zur Berechnung der unbekanntem Radien nach der Vergleichsmethode werden Fallzeiten gleicher Temperatur benötigt, für die keine direkten Messwerte vorliegen, die aber dem Schaubild als extrapolierte Ausgleichswerte (zum Beispiel an der Achse) entnommen werden können.

Literaturwerte

Technische Sollwerte der Kugeldurchmesser; Toleranz $\pm 0,01$ mm:

$$d_0 = 2 \text{ mm (zweitgrößte Kugel)}$$

$$d_1 = 1/16 \text{ " (Zoll)}, \quad d_2 = 1 \text{ mm}, \quad d_3 = 2,5 \text{ mm}.$$

Viskosität von Rizinusöl (KOHLEAUSCH; Praktische Physik; B.G.Teubner · Stuttgart):

$$\eta = 0,99 \text{ Pa s}$$

ohne Fehlerangabe. Als Naturprodukt ist für den Wert eine größere Schwankung anzunehmen. Die Dichten von Stahl und Rizinusöl sind im Platzskript angegeben.

SPEZIFISCHE
WÄRMEKAPAZITÄT

NP

Die Erklärung der Wärmephänomene stellte die Naturwissenschaften lange Zeit vor große Probleme, die erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts gelöst werden konnten. Die Schwierigkeit lag darin, dass sich die Wärme im Rahmen des klassischen, stofflichen Denkens der damaligen Zeit nicht erklären ließ und nur grundsätzlich neue Vorstellungen zu einem Verständnis führen konnten. So erklärt es sich auch, dass ein Arzt (ROBERT MAYER) als Nichtphysiker erheblichen Anteil an der Aufklärung der Wärme als Form von Energie haben konnte.

Die Temperatur ist eine sehr anschauliche und grundlegende physikalische Größe (Zustandsgröße). Sie kann vom Menschen mit seinem Tastsinn (in bestimmten Grenzen) direkt wahrgenommen werden. Die Temperatur ist für viele Prozesse, insbesondere der Chemie und aller Biowissenschaften, von großer Bedeutung. Die Reaktionswahrscheinlichkeit bzw. Geschwindigkeit chemischer Reaktionen hängt in erheblichem Maße von der Temperatur ab, was der Grund dafür ist, dass biologische Systeme ihre Temperatur in zum Teil engen Grenzen halten müssen. In der Physik können aus Untersuchungen des Wärmeverhaltens elementare Rückschlüsse auf die Struktur der Materie gewonnen werden.

Aufgaben

(Vorversuch): Bestimmung des Wasseräquivalentwertes m_A des Kalorimeters.

Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität c_W von Wasser.

Bestimmung der spezifischen Schmelzwärme I_E von Eis.

Physikalische Grundlagen**Temperaturskala**

Als Maßeinheit für die Temperatur ist 1 K (Kelvin; ohne "Grad"-Bezeichnung) definiert (siehe auch Versuch GASTHERMOMETER). Die physikalische Temperaturskala beginnt beim absoluten Nullpunkt der Temperatur und wird thermodynamische oder absolute Temperaturskala genannt. Im Alltag ist daneben die Celsius-Skala gebräuchlich. Die Temperatureinheit ist die gleiche (d.h.

1 K = 1 °C (Grad Celsius)), und die unterschiedlichen Bezeichnungen beziehen sich nur auf verschiedene Skalen, die gegeneinander verschoben sind. Der

Schmelzpunkt des Wassers als Nullpunkt der Celsius-Skala liegt bei 273,15 K, der Siedepunkt bei 373,15 K (bei dem Normaldruck von 1013 hPa).

Wärme und Temperatur

Wärme ist eine Form des Energieaustauschs. Führt man einem Körper Wärmeenergie zu, so erhöht sich entweder dessen Temperatur oder es kommt zu einer Phasenumwandlung bei dann gleichbleibender Temperatur. Bei einer Temperaturerhöhung wird die zugeführte Wärme ganz (bei konstantem Volumen) oder teilweise (bei konstantem Druck) in innere Energie des Körpers überführt. Dabei sind die Wärmezufuhr ΔQ und die Temperaturänderung ΔT proportional zueinander:

$$(1) \quad \Delta Q = C \Delta T = c m \Delta T .$$

Der Proportionalitätsfaktor C heißt Wärmekapazität des Körpers; der massenbezogene Wert $c = C/m$ spezifische Wärmekapazität (kurz auch spezifische Wärme). Die spezifische Wärmekapazität ist eine Materialgröße, d.h. sie hat für einen bestimmten Stoff einen bestimmten Wert. Die spezifische Wärme hat anwendungstechnische Bedeutung (Zitat aus: HARTEN; Physik für Mediziner; Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York):

Leben braucht Energie, setzt Energie um - und das nicht nur, wenn man läuft, also mechanische Arbeit produziert. Auch im Schlaf hat der Mensch noch einen Grundumsatz von etwa 7 MJ/Tag oder auch 80 Watt, erforderlich, um die lebenswichtigen Funktionen und die Körpertemperatur aufrechtzuerhalten. Der Mensch hat aber auch eine Wärmekapazität - da er im wesentlichen aus Wasser besteht, darf man bei 70 kg Körpermasse schreiben

$$C_{\text{Mensch}} \approx 0,3 \text{ MJ/K}$$

Das heißt nun wieder: Könnte man einen Menschen völlig wärmeisoliert lagern, so müsste ihn sein Grundumsatz mit einer Geschwindigkeit von etwa 1 K/h aufheizen. Schneller kann Fieber aus rein wärmetechnischen Gründen nicht steigen.

Bezieht man die Wärmekapazität auf die Stoffmenge (molare Wärmekapazität) bzw. auf die Teilchenzahl, so zeigen sich für bestimmte Materieklassen (z.B. Gase oder Metalle) übereinstimmende Werte. Daraus folgt, dass die Wärmekapazität bzw. die innere Energie mit dem Teilchencharakter und der Struktur der Materie zusammenhängt. Besonders deutlich wird dies beim Verständnis der Gase mit Hilfe eines mechanischen Teilchenmodells (kinetische Gastheorie).

Die spezifischen bzw. molaren Wärmekapazitäten sind im Allgemeinen nicht konstant, sondern von der Temperatur abhängig. Die Abhängigkeit ist bei tiefen Temperaturen (nahe dem absoluten Nullpunkt) besonders stark, woraus Rückschlüsse auf den Quantencharakter der Materie gezogen werden können. Beim vorliegenden Versuch kann jedoch innerhalb der kleinen beobachteten Temperaturintervalle und wegen der relativ hohen Temperatur (Zimmertemperatur) die spezifische Wärme als konstant betrachtet werden.

Temperatenausgleich

Bringt man zwei Körper unterschiedlicher Temperaturen T_1 und T_2 in thermischen Kontakt miteinander, so findet ein Wärmeaustausch statt, bis sich eine gemeinsame (Misch-) Temperatur T_m eingestellt hat. Wegen der Energieerhaltung muss dabei die Wärme, die der heißere Körper abgibt, gleich der Wärme sein, die der kältere Körper aufnimmt:

$$(2) \quad c_1 m_1 (T_m - T_1) = c_2 m_2 (T_2 - T_m).$$

Schmelzwärme, Verdampfungswärme

Die auseinanderstrebende Wärmebewegung der Teilchen und die anziehenden Bindungskräfte sind gegenläufige Tendenzen, deren Verhältnis zueinander den Bindungszustand der Materie bestimmt, z.B. die Aggregatzustände (fest, flüssig, gasförmig), aber auch feinere Differenzierungen, wie unterschiedliche kristalline Strukturen (Graphit/Diamant, Modifikationen des Zinns usw.). Diese unterschiedlichen physikalischen Zustände eines chemisch einheitlichen Stoffes werden als Phasen und Zustandsumwandlungen als Phasenübergänge bezeichnet.

Zufuhr oder Abgabe von Wärme führt an Phasenübergängen zu einer Änderung der Phase. Dabei bleibt die Temperatur solange konstant, bis die gesamte Stoff-

menge in die andere Phase übergegangen ist. Aufgenommene Wärmeenergie wird z.B. benötigt, um Arbeit gegen die strukturellen Bindungskräfte der Materie zu verrichten; d.h. bei einem Schmelzvorgang die Kristallstruktur aufzubrechen oder bei der Verdampfung den Abstand zwischen den Molekülen genügend zu vergrößern. Die zur Umwandlung benötigte Wärme bezeichnet man als Umwandlungswärme oder *latente Wärme* (z.B. Schmelzwärme, Verdampfungswärme); die massenbezogenen Umwandlungswärmen werden *spezifische Umwandlungswärmen* genannt, die stoffmengenbezogenen molare Umwandlungswärmen.

Versuchsdurchführung

Für die Messungen wird ein *Kalorimeter* benutzt, ein thermisch isoliertes Gefäß, in dem Wärmeaustausch- oder Wärmezufuhrvorgänge unter Messung der Temperatur durchgeführt werden können (siehe Abb. 1). Zur Temperaturmessung sind elektrische Digitalthermometer (Auflösungsvermögen 0,1 K) vorhanden. Die Massen der verwendeten Wassermengen werden durch Wägung des leeren und des jeweils gefüllten Kalorimeters bestimmt. Eis ist in einer Kühlbox im Versuchsraum vorhanden.

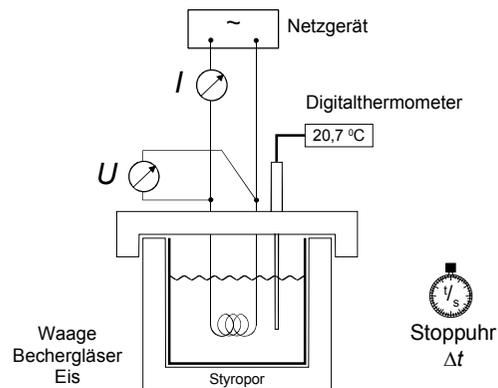


Abb. 1: Kalorimeter mit Heizwendel und Thermometer

Zu Aufgabe 1

(Vorversuch zum Wasseräquivalent)

Da das Kalorimeter an allen Austauschprozessen beteiligt ist, muss dessen Wärmekapazität berücksichtigt und in einem Vorversuch ermittelt werden. Dazu wird kaltes

Wasser ($m_W \approx 300 \text{ g}$, $T_1 \approx 0 \text{ °C}$) in das leere, auf Zimmertemperatur T_R befindliche Kalorimeter gefüllt. Aus der Temperaturerhöhung des Wassers auf den Wert T_m kann entsprechend (2) auf die Wärmekapazität des Kalorimeters C_K geschlossen werden:

$$(3) \quad C_K (T_R - T_m) = c_W m_W (T_m - T_1) .$$

Da die spezifische Wärme c_W des Wassers zunächst nicht bekannt ist, berechnet man das Verhältnis $C_K/c_W = m_A$. Dieser Wert repräsentiert die Masse einer fiktiven Menge Wasser, die die gleiche Wärmekapazität wie das Kalorimeter besitzt; sie wird *Wasseräquivalent* des Kalorimeters genannt. Diese Größe lässt sich in den folgenden Messgleichungen einfach verwenden, indem man sie bei der jeweiligen Massenbilanz berücksichtigt:

$$(4) \quad m = m_W + m_A .$$

Zu Aufgabe 2 (Spezifische Wärme von Wasser)

Es wird die noch im Kalorimeter befindliche Wasserprobe vom Vorversuch benutzt. Durch eine kleine elektrische Heizung kann der Wasserprobe eine bestimmte Wärmemenge ΔQ zugeführt werden. Für die Umwandlung elektrischer in thermische Energie (*Joulesche Wärme*, siehe Versuch *GLEICHSTROM/WECHSELSTROM*) gilt im Zeitintervall Δt :

$$(5) \quad \Delta Q = U I \Delta t ,$$

wobei I die Stromstärke und U die Spannung am Widerstand ist. Die Temperaturerhöhung soll aus Genauigkeitsgründen mindestens 10 K betragen. Anfangs- und Endtemperatur sollen symmetrisch zur Zimmertemperatur liegen um systematische Fehler durch Wärmeaustausch mit der Umgebung wegen unzureichender thermischer Isolation des Kalorimeters möglichst gering zu halten.

Zu Aufgabe 3 (Schmelzwärme)

Die Schmelzwärme wird aus der Abkühlung bestimmt, die schmelzendes Eis bei einer Wasserprobe verursacht. Bei Aufstellung der Messgleichung müssen drei Anteile am Wärmeaustausch berücksichtigt werden: für das Eis die Aufnahme der Schmelzwärme und die anschließende Aufwärmung von $T_0 = 273,15 \text{ K}$ ($= 0 \text{ °C}$)

auf die Mischtemperatur T_m und für die Wasserprobe die Abkühlung auf die Mischtemperatur.

Als Wasserprobe wird wieder das noch im Kalorimeter befindliche warme Wasser aus dem Heizversuch benutzt. Die Eismasse sollte etwa 50 g betragen (zwei große Würfel). Das Eis aus der Kühlbox muss eine Weile in einem Wasserbad gehalten werden, um die Temperatur 0 °C anzunehmen.

Literaturwerte

Spezifische Wärmekapazität von Wasser bei 20 °C :

$$c_W = 4,1818 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Spezifische Schmelzwärme von Wasser:

$$\Gamma_E = 333,7 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Spezifische Verdampfungswärme von Wasser bei

$p = 1,0132 \text{ bar}$ und $T = 373,15 \text{ K}$

$$\Gamma_{v1} = 2255,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Spezifische Verdampfungswärme von Wasser bei

$p = 1,0132 \text{ bar}$ und $T = 273,15 \text{ K}$

$$\Gamma_{v2} = 2500,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

(Quelle: KOHLRAUSCH; Praktische Physik 3; p.43 B.G.Teubner Stuttgart).

GASTHERMOMETER

NP

Der Versuch setzt sich mit grundlegenden Eigenschaften und Verhaltensweisen von Gasen als einfachstem Aggregatzustand und dem idealen Gas als einfachster Modellvorstellung auseinander.

Darüber hinaus verdeutlicht der Versuch am Beispiel der Temperaturskala in exemplarischer Weise das Problem der Definition und praktischen Realisierung einer Maßeinheit und Einheitenskala. Die Apparatur stellt einen Aufbau dar, mit dem direkt aus der Definition der Temperatureinheit Temperaturen gemessen werden können.

Temperaturen von $-30\text{ °C} \approx 243\text{ K}$ bedeuten nur für den Menschen und die biologische Umwelt Eiseskälte; physikalisch gesehen ist dies dagegen eine Temperatur, bei der das Verhalten physikalischer Systeme nicht grundsätzlich anders als bei 200 oder 300 K ist. Charakteristische Tieftemperatur-effekte (z.B. die Supraleitung) treten erst unterhalb von 160 K auf. Man kann sich heute dem absoluten Nullpunkt mit aufwendigen Apparaturen bis auf einige μK (Mikrokelvin) nähern. Ganz erreichen kann man ihn aber nie; das besagt der so genannte 3. Hauptsatz der Thermodynamik.

Aufgaben

- (Zimmertemperatur) Messung der Zimmertemperatur mit dem Gasthermometer und Vergleich mit der Anzeige eines Quecksilberthermometers.
- (Spannungskoeffizient) Bestimmung des Spannungskoeffizienten von Luft.

Physikalische Grundlagen

Zustandsgleichung des idealen Gases

Modellvorstellungen können durch ihre physikalischen Voraussetzungen oder durch die daraus folgenden (mathematischen) Gesetzmäßigkeiten charakterisiert werden. Ein *ideales Gas* ist formal dadurch definiert, dass der Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen Temperatur (T), Druck (p) und Volumen (V) der *Zustandsgleichung des idealen Gases* genügt:

$$(1) \quad pV = nRT,$$

wobei n die Stoffmenge und R die *allgemeine Gaskonstante* ist, eine für Gase universelle Konstante.

In der *physikalischen Vorstellung* besteht ein ideales Gas aus einer Menge von Massepunkten (d.h. Teilchen *ohne Eigenvolumen*), zwischen denen *keine Wechselwirkung* besteht (im Sinne damit verbundener potentieller Energie), und die bei ihrer Bewegung *elastische Stöße* untereinander und mit der Gefäßwand vollziehen (was gedanklich eine Wechselwirkung voraussetzt), so dass für die Teilchen insgesamt eine zufällige Bewegungsform entsteht.

Verwendet man an Stelle der Stoffmenge direkt die Anzahl $N = n N_A$ der Teilchen (mit $N_A = \text{Avogadro-Konstante} \approx 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$), so heißt die Zustandsgleichung des idealen Gases:

$$(2) \quad pV = N \frac{R}{N_A} T = NkT.$$

Dabei ist $k = R/N_A$ die universelle *Boltzmann-Konstante* ($k = 1,3806503 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$).

Bei kleinen Dichten und hohen Temperaturen erfüllen reale Gase in guter Näherung die Zustandsgleichung (1). Abweichungen von diesem Verhalten treten erst nahe dem Kondensationsbereich auf, bei dem wegen der hohen Dichte und engen Nachbarschaft der Teilchen das Eigenvolumen und die Wechselwirkung der Gasteilchen untereinander nicht mehr vernachlässigt werden können.

Temperatureinheit und Temperaturskala

Aus der Zustandsgleichung (1) ergibt sich, dass die Temperatur nur positive Werte annehmen kann und allenfalls ein Nullpunkt $T = 0$ mit $p = 0$ und $V = 0$ existiert. Die auf diesen Nullpunkt aufbauende Temperaturskala wird als absolute oder *thermodynamische Temperaturskala* bezeichnet.

Die Definition der Temperaturskala innerhalb des SI-Einheitensystems bezieht sich auf den absoluten Charakter der Temperatur, wobei aus praktischen Gründen die historische Einheit 1 °C (Grad Celsius) der gebräuchlichen, relativen Celsius-Skala übernommen wurde. Als Definitionspunkt wurde der *Tripelpunkt* des Wassers gewählt und zur Anpassung an die Celsius-Einheit auf $273,16\text{ K}$ festgelegt (Einheitenname 1 Kelvin (K) ohne Grad-Bezeichnung).

Das wissenschaftliche Temperaturmaß ist das Kelvin, während die im Alltag gebräuchlichen Thermometer in Celsius-Graden kalibriert sind, so dass praktisch beide Skalen nebeneinander verwendet werden. Die beiden *Einheiten* (1 °C bzw. 1 K) sind aber gleich, so dass Temperaturdifferenzen wegen

der Unabhängigkeit von der Skala stets in Kelvin angegeben werden; z.B.:

$$(3) \quad 26,7\text{ °C} - 16,4\text{ °C} = 10,3\text{ K}!$$

Der Zusammenhang zwischen den Skalen ist festgesetzt durch:

$$(4) \quad T/\text{K} = t/\text{°C} + 273,15,$$

(wobei zur Unterscheidung absolute Temperaturen mit T und relative Celsius-Temperaturen mit t geschrieben werden). Der Schmelzpunkt von Eis liegt dann bei 0 °C (bei dem Normaldruck von 1013 hPa) und der Tripelpunkt von Wasser bei $0,01\text{ °C}$.

Praktische Realisierung der Temperatureinheit

Wegen der Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunkts und wegen des nichtlinearen Verhaltens aller realen Thermometersubstanzen wurde zur praktischen Verwirklichung der Temperatureinheit die Definition durch weitere sogenannte *Fixpunkte* der internationalen praktischen Temperaturskala ergänzt. Einige sind die Siedepunkte von Wasserstoff ($20,28\text{ K}$), von Sauerstoff ($90,188\text{ K}$) und von Wasser ($373,15\text{ K}$) sowie die Schmelzpunkte von Silber ($1235,08\text{ K}$) und von Gold ($1337,58\text{ K}$), jeweils bei Normaldruck (1013 hPa).

Gasgesetze und Spannungskoeffizient

Gleichung (1) enthält vier freie Variablen (n, p, V, T). Bezieht man sich (sinnvollerweise) auf eine gleichbleibende Gasmenge ($n = \text{const}$) und hält zusätzlich eine weitere Variable fest, so ergeben sich die speziellen Gasgesetze, die (in der Literatur z.T. unterschiedlich bezeichnet) unter den Namen BOYLE-MARIOTTE, GAY-LUSSAC und CHARLES bekannt sind:

$$p \sim \frac{1}{V}; \quad V \sim T \quad \text{und} \quad p \sim T.$$

Die letzte Proportionalität besagt, dass (bei konstant gehaltenem Volumen) ein durch den Nullpunkt gehender, linearer Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur besteht. Die Transformation dieses Zusammenhanges in die Celsius-Skala verschiebt die Ordinate zu der Temperatur $T = 273,15\text{ K}$ mit $t = 0\text{ °C}$ als neuem Nullpunkt und p_0 als Achsenabschnitt. Für die Steigung der Geraden folgt daraus der Wert $p_0/(273,15\text{ K})$ (siehe Abb. 1).

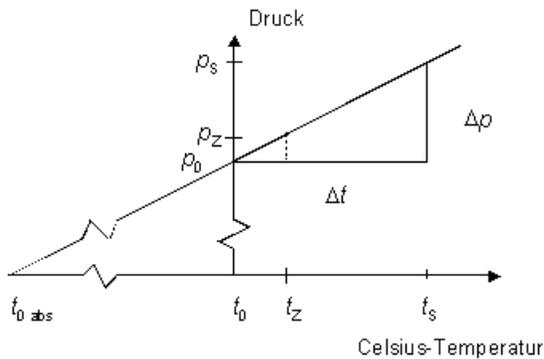


Abb. 1 p - t -Gesetz (t -Achse nach links nicht maßstäblich).

Der Schmelzpunkt (t_0, p_0) und der Siedepunkt (t_S, p_S) sind Fixpunkte und Messpunkte zur Festlegung der Temperaturskala. Der Punkt (t_Z, p_Z) gehört zur Zimmertemperatur. Die Versuchsauswertung basiert auf den eingetragenen Steigungsdreiecken.

Als transformierte Geradengleichung folgt damit:

$$p = p_0 + \frac{p_0}{273,15 \text{ K}} t$$

$$= p_0 \left(1 + \frac{1}{273,15 \text{ K}} t \right)$$

$$(5) \quad = p_0 (1 + \beta t).$$

Der Faktor β heißt *Spannungskoeffizient*. Er wird auch zur Beschreibung realer Gase oder anderer Substanzen herangezogen. Für ein ideales Gas beträgt sein Wert $1/(273,15 \text{ K}) \approx 3,66 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Versuchsdurchführung

Die Apparatur besteht aus einem abgeschlossenen Volumen (Messkugel aus Glas), das mit einem *offenen* Quecksilbermanometer verbunden ist, mit dem *Druckdifferenzen* Δp zum Außendruck gemessen werden können. (Die Druckdifferenz ist proportional zur Höhendifferenz der Quecksilbersäulen, d.h. zur Differenz der Quecksilber-Oberflächen in den beiden

Schenkeln.) Das Volumen in der Kugel wird konstant gehalten, indem man den offenen Schenkel des Manometers in der Höhe so einstellt, dass sich die Quecksilber-Oberfläche (*Meniskus*) in dem mit der Messkugel verbundenen Schenkel immer gleich auf eine durch eine Marke vorgegebene Höhe einstellt (oberste 35 cm-Ringmarke). Absolute Druckwerte p erhält man dann durch Addition des (atmosphärischen) Außendrucks, der mit einem elektrischen (Digital-) Barometer gemessen werden kann.

Zu Aufgabe 1: Zimmertemperatur

Die Versuchsdurchführung beginnt mit der Messung der Druckdifferenz in der Kugel Δp_Z zum Außendruck bei Zimmertemperatur, da sich die Apparatur zu Beginn noch insgesamt auf Zimmertemperatur befindet. Die Zimmertemperatur wird später (nach Messung des Eispunktes und des Siedepunktes) aus dem Verhältnisansatz zwischen den gemessenen Druckdifferenzen zu den zugehörigen Temperaturdifferenzen bestimmt (siehe Steigungsdreiecke in Abbildung 1), wobei sich die Druckdifferenzen ohne Berücksichtigung des Außendrucks direkt aus den Höhendifferenzen des Quecksilbermanometers ergeben.

Zu Aufgabe 2: Spannungskoeffizient

Zur Bestimmung des Spannungskoeffizienten werden die Druckdifferenzen in der Messkugel für zwei Fixpunkte gemessen, nämlich Δp_0 am *Schmelzpunkt* von Eis bei $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ und Δp_S am *Siedepunkt* des Wassers bei der Siedetemperatur T_S . Der Schmelzpunkt wird durch ein Eis-Wasser-Gemisch realisiert. Der Siedepunkt des Wassers ist vom Außendruck abhängig. Der Zusammenhang zwischen Druck und Siedetemperatur ist im Platzskript angegeben.

Zur Versuchsdurchführung kann die Messkugel in einem Becherglas mit einem Eis-Wasser-Gemisch bzw. durch Erwärmen auf einer Heizplatte mit siedendem Wasser umgeben werden. Bei der Messung mit dem Eis-Wasser-Gemisch muss zunächst das Becherglas um die Messkugel gebracht, und dann das Gemisch eingefüllt werden, um die Apparatur nicht zu beschädigen!

Der Spannungskoeffizient ist nach (5) die durch p_0 dividierte Steigung, der direkt aus dem Steigungsverhältnis durch die beiden Fixpunkte hervorgeht. Die Auswertung erfolgt *rein rechnerisch*; eine grafische Auswertung wäre hier falsch bzw. unangemessen, da die Messung auf den zwei Fixpunkten als Definitionsmenge einer Geraden beruht und nicht auf einer (statistischen) Überprü-

fung eines funktionalen Zusammenhangs durch eine Messreihe. (Grafische Auswertungen sind ein visuelles Verfahren zur ausgleichenden Auswertung statistischer Daten.)

FREIE GEDÄMPFTE
SCHWINGUNGEN

NP

Schwingungen sind elementare Erscheinungen in allen Bereichen der Natur. Sie spielen eine herausragende Rolle bei den Naturerscheinungen selbst als auch bei vielen Messverfahren und technisch-methodischen Anwendungen. Von den Zweigen im Wind bis zu den Molekülen und Atomen im Verband des Kristallgitters gibt es ungezählte Beispiele für schwingungsfähige Systeme. Selbst der aufrechte Gang des Menschen kann formal als Schwingungsvorgang verstanden werden. Er neigt zu kippen, merkt's sogleich, und fängt mit einer geschickten Bewegung das schwindende Gleichgewicht wieder auf. Für gewöhnlich geht diese Regelschwingung recht unauffällig gut und nimmt nur im Falle fortgeschrittenen Rausches dramatischere Amplituden an.

Mit diesem Versuch sollen die Eigenschaften eines schwingenden Systems am Beispiel eines elektrischen Schwingkreises untersucht werden, da die messtechnische Darstellung einschließlich der Dämpfung in diesem Fall besonders einfach ist.

Aufgaben

- (Vorversuch zur gemeinsamen Durchführung und sofortigen Auswertung durch die gesamte Gruppe): Aufbau eines Schwingkreises niedriger Frequenz aus einer Spule und einem Kondensator und einem Drehspulmessinstrument zum Nachweis der zeitlich periodischen Spannung am Kondensator. Messung der Schwingungszeit mit der Stoppuhr und der Amplitudenwerte am Messinstrument. Berechnung der Induktivität L aus der Kreisfrequenz (bei bekannter Kapazität) und des Verlustwiderstandes R aus der Dämpfungskonstanten.
- (Schwingkreis): Periodische Anregung eines Schwingkreises höherer Frequenz. Beobachtung und Messung des Schwingungsverlaufs mit dem Oszilloskop. Bestimmung der Parameter der Schwingung (Schwingungsdauer bzw. Kreisfrequenz und Dämpfungskonstante) und Vergleich mit den direkt gemessenen Daten der verwendeten Bauteile (Kapazität C des Kondensators, Induktivität L und Widerstand R der Spule).

Physikalische Grundlagen

Schwingungen

Damit ein physikalisches System schwingen kann, müssen bestimmte Voraussetzungen erfüllt sein. Es muss eine rücktreibende Größe geben (Federpendel: Federkraft; elektrischer Schwingkreis: Kondensatorspannung), durch die das System an eine Ruhelage gebunden ist, und es muss (wenigstens) zwei Erscheinungsformen für die Energie besitzen. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich ein zeitlich periodischer Vorgang, der als Schwingung bezeichnet wird. Charakteristisch für Schwingungsphänomene ist, dass der Energieinhalt des Systems ständig zwischen den beiden Erscheinungsformen hin- und herflutet.

Harmonische Schwingungen

Die mathematisch einfachsten periodischen Funktionen sind die Sinus- und die Kosinusfunktion. Schwingungen, die diesen Funktionen folgen, werden als *harmonische Schwingungen* bezeichnet. Sie ergeben sich, wenn die rücktreibende Größe proportional zur jeweiligen Auslenkung aus der Ruhelage ist. Diese Bedingung ist zum Beispiel gut bei einer mechanischen Feder erfüllt (*Hookesches Gesetz*). In Abb. 1 ist der Verlauf einer sinusförmigen Schwingung wiedergegeben.

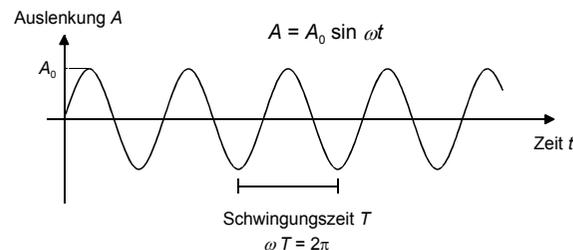


Abb. 1 Verlauf einer Sinusschwingung

Die zeitliche Periode der Schwingung ist die Schwingungsdauer T , ihr Kehrwert die Frequenz $f = 1/T$. Die Frequenz gibt die Zahl der Perioden pro Zeit an; ihre Einheit $1/s$ wird 1 Hz (Hertz) genannt. Der Parameter im Argument der Sinus- und Kosinusfunktion ist ein Stauchfaktor in Richtung der Zeitachse, der das Verhältnis der mathematischen Grundperiode (2π) zur jeweiligen physikalischen Periode T darstellt:

$$(1) \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Der Faktor ω heißt Kreisfrequenz. Alle drei Angaben, T , f und ω sind äquivalente, gleichwertige Angaben zur Charakterisierung der (zeitlichen) Periode der Schwingung. Der Faktor A_0 gibt die größte Auslenkung wieder; er wird als Amplitude der Schwingung bezeichnet.

Federpendel und Schwingkreis

Der einfachste mechanische Oszillator ist das Federpendel (Abb. 2). Lenkt man den an eine Feder gebundenen Körper der Masse m ein Stück aus, so gewinnt er gegenüber der Ruhelage aufgrund der elastischen Verformung potentielle Energie. Beim Loslassen bewegt sich der Körper in Richtung Ruhelage zurück, und die potentielle Energie wird in kinetische Energie übergeführt. Wegen der Trägheit bewegt sich der Körper weiter über die Ruhelage hinaus und wird dann von der Feder abgebremst (verlangsamt), bis die gesamte Energie wieder in potentielle Energie übergegangen ist.

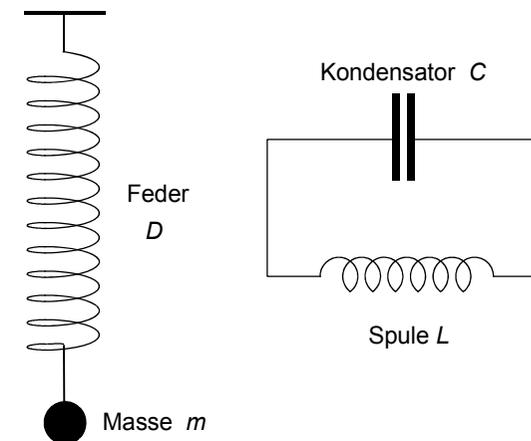


Abb. 2 Federpendel und elektrischer Schwingkreis

Der einfachste elektrische Oszillator ist ein Schwingkreis, der aus einer Spule und einem Kondensator besteht (Abb. 2 und 3). Ist der Kondensator aufgeladen, so bewirkt dessen Spannung einen Strom. Dieser baut in der Spule ein Magnetfeld auf, wobei die elektrische

Feldenergie des Kondensators in magnetische Feldenergie der Spule umgewandelt wird.

Nach dem Ladungsausgleich induziert das abnehmende Magnetfeld der Spule eine Spannung, die den Strom aufrechterhält und den Kondensator mit nunmehr umgekehrter Polarität wieder lädt. Bildhaft kann die Energie des Magnetfeldes wegen des zugrundeliegenden Stromes und der Eigenschaft, sich einer Stromänderung zu widersetzen, mit der kinetischen Energie und der Massenträgheit verglichen werden. Es ist jedoch zu beachten, dass dem nicht eine Trägheit der Bewegung der Elektronen zugrunde liegt, sondern die Eigenschaft von sich ändernden Magnetfeldern, der zugehörigen Stromänderung durch Induktion entgegenzuwirken.

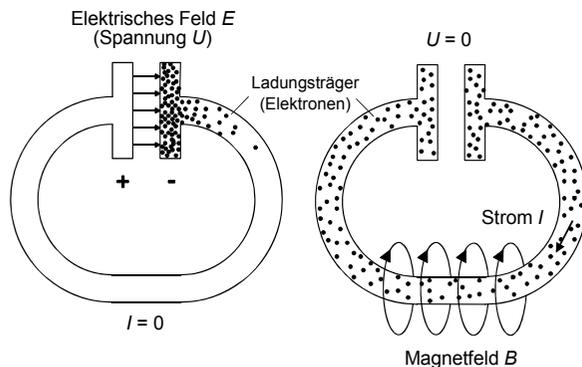


Abb. 3 Ladungsverteilungen in einem elektrischen Schwingkreis

Mathematische Behandlung (Differentialgleichung der Schwingung)

Ansätze der mathematischen Behandlung sind (u.a.) die *Newtonsche Bewegungsgleichung* ($F = m a$) beim Federpendel und die *Kirchhoffsche Regel* für Spannungen ($\sum U = 0$; "Maschenregel") beim Schwingkreis.

Die Kraft einer Feder ist ihrer Auslenkung x proportional (*Hookesches Gesetz*), der Proportionalitätsfaktor D wird *Federkonstante* genannt und beschreibt die Beschaffenheit der Feder:

$$(2) \quad F = - D x .$$

Die Ladung Q eines Kondensators ist seiner "Größe" (der Kapazität C) und seiner Spannung U_C proportional; $Q = C U_C$. Daraus folgt mit der Definition des Stroms $I = dQ/dt$ als Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Kondensator:

$$(3) \quad I_C = C \frac{dU_C}{dt} .$$

Durch Integration von (3) erhält man für die Spannung:

$$(4) \quad U_C = \frac{1}{C} \int I_C dt .$$

Der Spannungsabfall an einer Spule U_L ist der zeitlichen Änderung des Stromes durch die Spule proportional. Aufgrund der *Selbstinduktion* widersetzt sich die Spule einer Stromänderung durch eine Gegenspannung (*Lenzsche Regel*), $U_{\text{ind}} = - L \, dI/dt$, die kompensiert werden muss ($U_L = - U_{\text{ind}}$):

$$(5) \quad U_L = L \frac{dI_L}{dt} .$$

Der Proportionalitätsfaktor heißt *Selbstinduktionskoeffizient* L der Spule (oder kurz Induktivität).

Ausgehend von den obigen Zusammenhängen ergeben sich folgende Herleitungen der Schwingungsgleichungen für die beiden Systeme:

Federpendel:

$$F = m a$$

$$- D x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$(6) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{D}{m} x = 0 .$$

Schwingkreis:

$$U_C + U_L = 0$$

mit (4) und (5) und $I_C = I_L = I$:

$$\frac{1}{C} \int I dt + L \frac{dI}{dt} = 0$$

bzw. nach Ableitung nach t und Umstellung:

$$(7) \quad \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{L C} I = 0 .$$

Beide Differentialgleichungen (6,7) haben mathematisch die gleiche Form. Als Lösung wird eine Funktion $x = f(t)$ bzw. $I = f(t)$ gesucht, deren zweite Ableitung nach der Zeit gleich der Funktion selbst ist, aber mit umgekehrtem Vorzeichen (und bis auf einen konstanten Faktor). Diese Bedingung erfüllen die Sinus- oder Kosinusfunktionen:

$$(8) \quad \text{Federpendel : } x(t) = x_0 \cos \omega t ,$$

$$(9) \quad \text{Schwingkreis : } I(t) = I_0 \cos \omega t .$$

Durch Berechnung der zweiten Ableitungen und Vergleich mit (6) und (7) folgt, dass die Ansätze (8) und (9) genau dann Lösungen darstellen, wenn die Frequenzen bestimmte, durch die physikalischen Parameter D und m bzw. L und C gegebene Werte annehmen:

Federpendel:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin \omega t \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \cos \omega t = -\omega^2 x$$

woraus durch Vergleich mit (6) folgt:

$$(10) \quad \omega^2 = \frac{D}{m} .$$

Schwingkreis:

$$\frac{dI}{dt} = -\omega I_0 \sin \omega t \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} = -\omega^2 I_0 \cos \omega t = -\omega^2 I$$

woraus durch Vergleich mit (7) folgt:

$$(11) \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} .$$

Die Systeme schwingen demnach mit ganz bestimmten, durch die systembestimmenden Größen D und m beziehungsweise L und C gegebenen Frequenzen (*Eigenfrequenzen*). Die Amplituden dagegen sind grundsätzlich beliebig (einschließlich $x_0 = 0$ und $I_0 = 0$ für die ruhenden Systeme). Sie sind kein eigentliches Charakteristikum der Bewegungsform und gehen in die obigen Überlegungen zum Ansatz auch nicht ein.

Energieinhalt der Schwingung und Dämpfung

Das schwingende System besitzt einen bestimmten Energieinhalt. Einem Federpendel wird diese Energie z.B. durch die anfängliche Auslenkung der Feder zugeführt. Die dabei aufgewandte Arbeit ist (Kraft \times Weg):

$$(12) \quad dW = F dx \quad \text{bzw.} \quad W = \int_0^{x_0} D x dx = \frac{1}{2} D x_0^2 .$$

Danach ist die Amplitude ein Maß für den Energieinhalt der Schwingung (die Energie ist dem Quadrat der Amplitude proportional). Während der Schwingung findet eine laufende wechselseitige Umwandlung von potentieller Energie der Feder und kinetischer Energie der Masse statt. Für die Gesamtenergie gilt:

$$(13) \quad \frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \text{const} = \frac{1}{2} D x_0^2 .$$

Einem Schwingkreis wird die Energie z.B. durch die anfängliche Aufladung des Kondensators zugeführt. Die dabei aufgewandte Arbeit ist:

$$(14) \quad W = \frac{1}{2} C U_0^2 .$$

Hier findet die wechselseitige Energieumwandlung zwischen der elektrischen Feldenergie des Kondensators und der magnetischen Feldenergie der Spule statt. Für die Gesamtenergie gilt in diesem Fall:

$$(15) \quad \frac{1}{2} C U^2 + \frac{1}{2} L I^2 = \text{const} .$$

Verliert das System laufend Energie (durch Reibung beim Federpendel bzw. durch die Verlustwiderstände der Spule und der Verbindungsleitungen beim Schwingkreis), so nehmen die jeweiligen Amplituden ab. Dieser Vorgang wird als *Dämpfung* bezeichnet (Abb. 4). Die Abnahme der Amplitude ist im einfachsten Fall proportional zum Momentanwert (A) und zum Zeitintervall (dt), woraus eine Exponentialfunktion für das Abklingverhalten folgt:

$$(16) \quad dA = -\delta A dt \quad \Rightarrow \quad A = A_0 e^{-\delta t} .$$

Die vollständigen Schwingungsgleichungen mit den periodischen und den abklingenden Anteilen lauten dann:

$$(14) \quad \text{Federpendel:} \quad x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cos \omega t ,$$

$$(18) \quad \text{Schwingkreis:} \quad I(t) = I_0 e^{-\delta t} \cos \omega t .$$

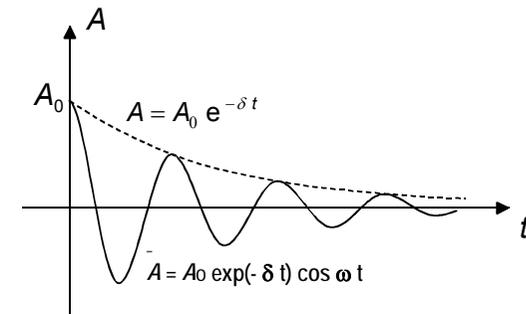


Abb. 4 Verlauf einer gedämpften Schwingung

Für den elektrischen Schwingkreis gilt folgender Zusammenhang zwischen der Dämpfungskonstanten δ , dem Verlustwiderstand R und der Induktivität L der Spule:

$$(19) \quad \delta = \frac{R}{2L} .$$

Oszilloskop (Elektronenstrahloszilloskop)

Das Oszilloskop ist ein wichtiges Instrument zur Beobachtung und Messung von zeitabhängigen, schnellen, wiederkehrenden elektrischen Signalen. Der vorliegende Versuch hat als ergänzendes Ziel die Einführung in dieses Gerät. Kernstück eines Oszilloskops ist eine Elektronenstrahlröhre mit einem Elektronenstrahl als praktisch trägheitslosem "Zeiger". Zur Auslenkung des Elektronenstrahls wird die zu untersuchende Spannung an die Platten eines Ablenkkondensators innerhalb der Röhre gelegt, wobei die Elektronen durch die Kraft $F = Q E$ im elektrischen Feld des Kondensators abgelenkt werden.

Oszilloskope besitzen zwei Ablenksysteme für die X- und für die Y-Richtung (Abb. 5). Zur Untersuchung von Spannung-Zeit-Verläufen wird das Signal über einen Eingangsverstärker an das Y-Ablenksystem gegeben. Zur Erzeugung einer Zeitachse besitzt das Oszilloskop

eine Zeitbasis, die periodisch eine mit konstanter Geschwindigkeit anwachsende Spannung erzeugt (*Sägezahnspannung*). Diese Spannung wird an das X-Ablenkensystem gelegt, wodurch der Strahl mit konstanter Geschwindigkeit über den Bildschirm läuft. Geschieht dies hinreichend schnell, so entsteht durch die Trägheit der Leuchtschicht des Bildschirms und des Auges eine durchgehende Linie. Ein Trigger-Netzwerk sorgt dafür, dass die Zeitbasis immer in dem Moment "angestoßen" wird, in dem das Signal am Y-Eingang erscheint und synchronisiert damit Signal und Zeitbasis. Für ein wiederkehrendes Signal erhält man auf diese Weise ein stehendes Bild auf dem Bildschirm des Oszilloskops.

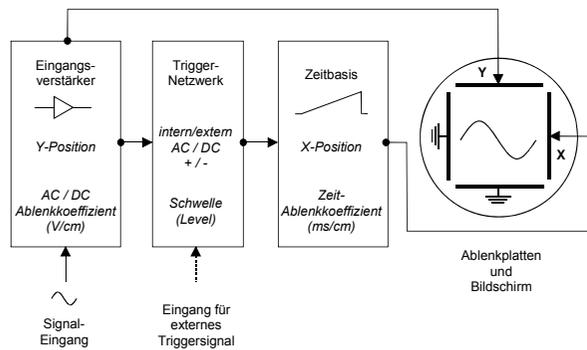


Abb. 5 Prinzipschaltbild eines Oszilloskops

Elementare Funktions- und Bedienelemente von Oszilloskopen

Bildschirm

- *INTENS.* und *FOCUS*: Regler zur Einstellung von Helligkeit und Schärfe des Bildpunktes (Achtung: eine zu große Helligkeit reduziert die Schärfe des Bildes).
- *cm-Netz (DIV.)* über dem Bildschirm zur quantitativen Ablesung der Messwerte.

Eingang (Eingangsverstärker)

- *Y-POS.*: Drehknopf zur Einstellung der horizontalen Lage des Bildes (oben/unten).

- *VOLTS/DIV.*: Drehschalter zur Einstellung der Eingangsempfindlichkeit (X-, Y-Ablenkoeffizienten).
- *VAR.*: Drehknopf zur kontinuierlichen Einstellung der Eingangsempfindlichkeit. **Achtung:** Die Kalibrierung *VOLT./DIV* gilt nur dann, wenn *VAR.* am rechten Anschlag steht (Rastposition).
- *DC-AC-GD*: Kopplungsschalter; DC (direct current) = direkte, gleichstrommäßige Kopplung; AC (alternating current) = kapazitive, "galvanisch" getrennte Kopplung, bei der Gleichspannungsanteile unterdrückt werden; GD zur Einstellung des Nullpunktes (Nulllinie).
- *VERT. MODE*: Schalter zur Wahl der Eingangs-Betriebsart (Grundeinstellung: Alle Taster gelöst.)

Zeitbasis

- *X-POS.*: Drehknopf zur Einstellung der vertikalen Lage (rechts/links).
- *TIME/DIV.*: Drehschalter zur Einstellung des Maßstabes der Zeitachse (Zeit-Ablenkoeffizient).
- *VAR.*: Drehknopf zur kontinuierlichen Einstellung der Zeitablenkung. **Achtung:** Die Kalibrierung *TIME./DIV* gilt nur dann, wenn *VAR.* am rechten Anschlag steht (Rastposition).

Trigger-Netzwerk

- *TRIG.*: Schalter zur Einstellung der Triggerart (DC / AC / HF = High- / LF = Low-Frequency / ~ = Netz-synchronisation / ± = Steigung der Triggerflanke).
- *EXT.*: Externe Triggerung durch ein zusätzliches Synchronisations-Signal an der TRIG.INP.-Buchse.
- *AT/NORM. – LEVEL*: Schalter für automatische bzw. manuelle Triggerung. Drehknopf für Ansprechschwelle bei manueller Triggerung.

Versuchsdurchführung

Zu Aufgabe 1 (Demonstrationsversuch an einem Schwingkreis niedriger Frequenz)

Aus einer Spule hoher Induktivität ($L \approx 600 \text{ H}$) und einem Kondensator großer Kapazität ($C = (250 \pm 50) \mu\text{F}$) wird ein Schwingkreis niedriger Frequenz aufgebaut ($f \approx$

0,3 Hz). Parallel zum Kondensator wird ein Voltmeter zum Nachweis der Spannung geschaltet. Der Aufbau entspricht Abb. 6.

Der Kondensator kann über einen Umschalter durch ein Netzgerät aufgeladen (ausgelenkt) werden. Nach Umschalten wird die Folge der Spannungsamplituden mit dem Voltmeter und die Schwingungsdauer (möglichst viele Perioden!) mit der Stoppuhr gemessen. Die Dämpfungskonstante erhält man aus dem Verhältnis aufeinanderfolgender Amplituden (gleicher Richtung). Berechnen Sie dazu das Verhältnis aufeinander folgender Amplituden für die Zeiten $t = t'$ und $t = t' + T$, und lösen Sie die dafür geltende Exponentialgleichung nach der Dämpfungskonstanten auf.

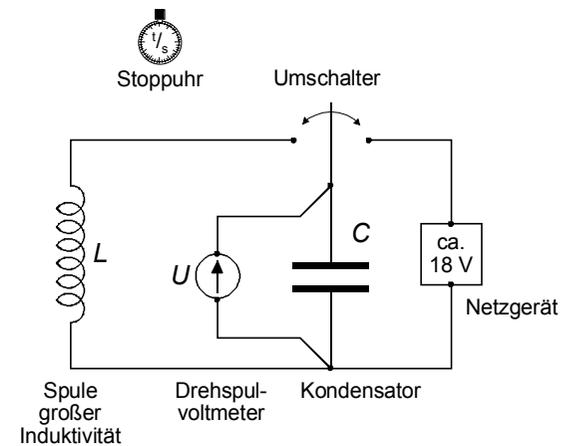


Abb. 6 Schaltung zu Aufgabe 1

Steckbrett

Zum Aufbau einer übersichtlichen Schaltung ist ein Experimentier-Steckplatinentensystem vorhanden (*Steckbrett*). Dabei ist eine belegte Buchse mit allen benachbarten Buchsen verbunden. Machen Sie sich vor Beginn der Messungen mit der Funktion des Steckbretts vertraut.

Zu Aufgabe 2 (Schwingkreis)

Mit Hilfe der Rechteckspannung eines Funktionsgenerators wird das Auslenken eines Schwingkreises und das Umschalten wie bei Aufgabe 1 periodisch und hin-

reichend schnell vorgenommen, so dass der Schwingungsverlauf bei höherer Frequenz als stehendes Bild auf dem Oszilloskop beobachtet werden kann.

Die Schaltung entspricht Abb. 7. Es ist zu beachten, dass der Funktionsgenerator und das Oszilloskop jeweils mit einem Pol auf Erdpotential ("Erde") liegen und dort zusammengeschaltet werden müssen, um einen Kurzschluss zu vermeiden. Hinweise zu den Einstellungen an den Geräten sind im Platzskript angegeben, insbesondere auch zur Trigger-Einstellung am Oszilloskop.

Als Messdaten werden Amplituden- und Zeitwerte direkt vom Bildschirm des Oszilloskops abgelesen. Zur Bestimmung der Frequenz wird die Zeit für eine größtmögliche Anzahl von Perioden abgelesen. Zur Bestimmung der Amplitudenwerte wird die Zeitachse zunächst soweit gestaucht, dass die Nulllinie nach dem Ausschwingen beobachtet und auf die unterste Linie des cm-Netzes des Bildschirms geschoben werden kann. Nach erneuter Streckung der Zeitachse kann dann das Bild in X-Richtung jeweils verschoben und die Amplitudenwerte an der feineren Skala in der Mitte des Bildschirmnetzes mit höherer Auflösung abgelesen werden. Zur qualitativen Dokumentation des gesamten Schwingungsverlaufs soll zusätzlich das Oszilloskopbild maßstäblich auf das Karo-Netz des Laborhefts übertragen werden.

Die Kapazität des Kondensators und die Induktivität der Spule sollen zum späteren Vergleich zusätzlich "direkt" mit einem digitalem R-C-L-Multimeter gemessen werden (VOLTcraft 4090). Der Widerstand der Spule darf nicht mit diesem Multimeter, sondern muss mit dem Digitalmultimeter METRA Hit 12S bestimmt werden.

Die Auswertung der Dämpfungskonstanten geschieht mit Hilfe einer logarithmischen Darstellung der Amplitudenwerte in Abhängigkeit von der Zeit.

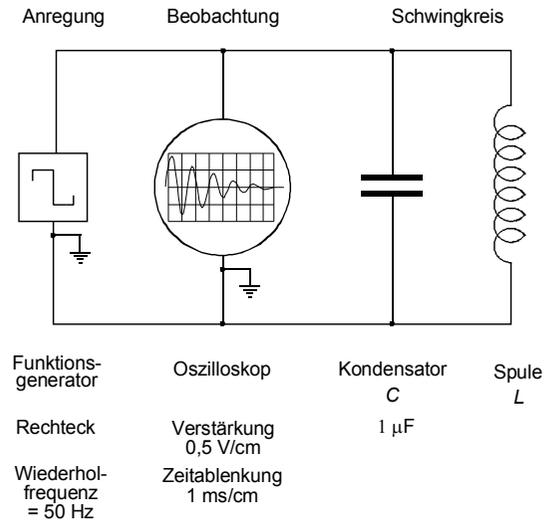


Abb. 7 Prinzipschaltbild zu Aufgabe 2

GLEICHSTROM /
WECHSELSTROM

NP

Die Anwendung der Elektrizität als Energie- und Nachrichtenträger bestimmt weitgehend wichtige "Werkzeuge" des Menschen ab dem 20. Jahrhundert. Insbesondere in den naturwissenschaftlich-technischen Arbeitsgebieten haben elektrische Schaltkreise über die physikalische Natur der Phänomene hinaus elementare Bedeutung für die Mess- und Regeltechnik (Signalstromkreise). Anwendungsbezogene Grundkenntnisse auf diesem Gebiet gehören daher zu den Standardqualifikationen jedes Naturwissenschaftlers.

Schwerpunkt des vorliegenden Versuchs ist die Einführung in wichtige Messgeräte und elementare Schalt- und Messtechniken sowie die Übung im praktischen Umgang und Einsatz der Geräte an einfachen Schaltungsbeispielen.

In Gleichstromkreisen sind Strom und Spannung von der Zeit unabhängig (englische Bezeichnung *dc* von *direct current*). Im Gegensatz dazu stehen Wechselstrom- (englisch *ac* von *alternating current*) und Impuls- kreise, die zeitabhängige Spannungen und Ströme verarbeiten; siehe dazu auch die auf diesen Versuch folgenden Themen R-C-KREISE und FREIE GEDÄMPFTE SCHWINGUNGEN (L-C-Kreise).

Aufgaben

- (Widerstandsmessung und Widerstandskombination): Bestimmung der Widerstandswerte zweier unbekannter Widerstände für Gleichstrom allein und in Reihen- und Parallelschaltung durch Strom-Spannungs-Messungen.

Bestimmung der Widerstandswerte für Wechselstrom durch Strom-Spannungs-Messungen.

Messung der Widerstandswerte im Widerstandsmessbereich eines Multimeters.

Vergleich der Ergebnisse untereinander und Überprüfung der Gesetze über Widerstandskombinationen.
- (Wechselspannung und Oszilloskop): Beobachtung einer Wechselspannung mit dem Oszilloskop und Bestimmung des Scheitelwertes U_0 , des Spitzenwertes V_{SS} und der Frequenz f der Spannung.

Messung des Effektivwerts U_{eff} mit einem Multimeter und Vergleich mit dem Scheitelwert.

- (Potentiometer): Aufnahme der Kennlinie eines Spannungsteilers (Potentiometer) in unbelastetem und belastetem Zustand und Vergleich mit den theoretischen Erwartungen.

Physikalische Grundlagen**Allgemeine Grundlagen**

Voraussetzung zur Versuchsdurchführung sind Kenntnisse der elektrischen Grundgrößen und elementarer Gesetzmäßigkeiten elektrischer Kreise, insbesondere zu:

- Spannung (U), Strom (I), Widerstand (R);
- Kirchhoffsche Regeln ("Maschenregel" für die Spannung, "Knotenregel" für den Strom);
- Gesetze über Widerstandskombinationen.

Diese Grundlagen werden in allen Lehrbüchern ausreichend beschrieben.

Definition des Widerstands

Als *Widerstand* R eines Leiters (Bauteil, Baugruppe) ist das Verhältnis zwischen Spannung und Strom definiert:

$$(1) \text{Def: } R = \frac{U}{I}, \quad \text{Einheit: } 1 \frac{\text{V}}{\text{A}} = 1 \Omega \text{ (Ohm)} .$$

Die Definition (1) stellt *keine Gesetzmäßigkeit* dar (d.h. keine Funktion $R(U)$ oder $R(I)$), sondern eine Rechenbeziehung für den Widerstand R unabhängig von einem (unter Umständen komplizierten) funktionalen Zusammenhang zwischen Spannung und Strom. Sie ist eine *Größendefinition*, nach der Widerstände für beliebige Spannungs-Strom-Zustände berechnet werden können und die als Rechenregel Bedeutung hat, wobei aus zwei gegebenen Größen durch Umstellung die dritte errechnet werden kann.

Ohmscher Widerstand und Ohmsches Gesetz

Einer der Widerstandsmechanismen kann als "*Strömungswiderstand*" verstanden werden, durch den elektrische Energie in Wärme umgewandelt wird (*joulesche Wärme*). Bei der Bewegung der Ladungsträger durch

einen Leiter kommt es zu Stößen mit den umgebenden Molekülen oder Atomen, wobei deren mittlere kinetische Energie erhöht wird. Dieser Widerstand ist materialabhängig und heißt *ohmscher Widerstand*. Er tritt sowohl bei Gleich- als auch bei Wechselstrom auf.

Für viele Materialien (z.B. die Metalle) ist dieser Widerstand unabhängig von U und I konstant, sofern die übrigen Parameter beibehalten werden (wie z.B. die Temperatur). Spannung und Strom sind dann proportional zueinander. Diese Gesetzmäßigkeit für den Widerstand heißt *Ohmsches Gesetz*.

Temperaturabhängigkeit und Kennlinien

Über die Gültigkeit des *Ohmschen Gesetzes* hinaus kann der Widerstand von anderen Größen abhängen, insbesondere von der Temperatur. Der Widerstand von Metallen nimmt mit steigender Temperatur zu, da sich die Stoßwahrscheinlichkeit mit zunehmender Amplitude der Gitterschwingungen erhöht. Der Widerstand von Halbleitermaterialien nimmt dagegen ab, da bei diesen durch thermische Anregung die Anzahl der freien Ladungsträger mit der Temperatur zunimmt. Der tatsächliche Zusammenhang von Strom und Spannung (auch an elektronischen Bauteilen oder Baugruppen) wird als *Kennlinie* oder *Charakteristik* bezeichnet. Bei Gültigkeit des *Ohmschen Gesetzes* ist die Kennlinie eine Gerade.

Spannungsteiler (Potentiometer)

Nach Gleichung (1) können durch Wahl geeigneter Widerstände Ströme und Spannungen in elektrischen Schaltkreisen festgelegt werden. Eine Standardbaugruppe ist der *Spannungsteiler*. In einer Kette von Widerständen ist der Strom für alle Widerstände gleich, so dass sich an den einzelnen Widerständen die Teilspannungen U zur Gesamtspannung U_0 wie die jeweiligen Teilwiderstände R zum Gesamtwiderstand R_0 verhalten:

$$(2) I = \frac{U}{R} = \text{const} \rightarrow \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R_0} \quad \text{oder} \quad \frac{U}{U_0} = \frac{R}{R_0} .$$

In Abb. 1 auf der folgenden Seite ist in Hinsicht auf die tatsächliche Versuchsdurchführung ein kontinuierlich veränderlicher Widerstand als Gesamtwiderstand R_0 skizziert, an dem ein beliebiger Teilwiderstand R "abgegriffen" werden kann (*Potentiometer* aus einer Widerstandsschicht oder einem Widerstandsdraht; *Abgriff* (Pfeil) durch einen Schleifer).

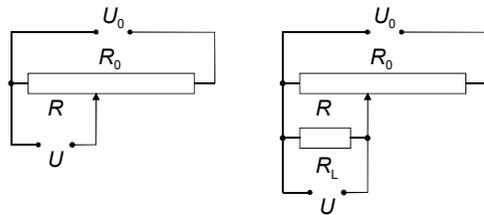


Abb. 1 Potentiometerschaltung ohne (links) und mit (rechts) zusätzlichem Belastungswiderstand R_L

Das einfache Verhältnis (2) gilt nur für den *unbelasteten* Fall, bei dem die Spannung an dem Teilwiderstand nicht durch einen weiteren Verbraucher belastet wird. Beim *belasteten* Spannungsteiler tritt als Teilwiderstand an Stelle von R eine Parallelschaltung aus R und einem zusätzlichen Belastungswiderstand R_L (Abb. 1, rechts). Es folgen als Teil- und als Gesamtwiderstand:

$$(3) R_{\text{Teil}} = \frac{R R_L}{R + R_L} \text{ und } R_{\text{Gesamt}} = \frac{R R_L}{R + R_L} + (R_0 - R)$$

und als Spannungsverhältnis analog zu (2):

$$(4) \frac{U}{U_0} = \frac{R}{R_0 + \frac{R(R_0 - R)}{R_L}}$$

Für $R = 0$ und $R = R_0$ ergeben sich $U/U_0 = 0$ bzw. 1 genau wie im unbelasteten Fall. Zwischen diesen Werten ist U kleiner als im unbelasteten Zustand, da die Parallelschaltung des Belastungswiderstandes den Teilwiderstand verringert. Durch die Belastung "bricht" die Spannung am Spannungsteiler (teilweise) "zusammen".

Wechselspannung und Wechselstrom

Als *Wechselspannung* bezeichnet man eine periodische Spannung mit sinus- bzw. kosinusförmigem Verlauf:

$$(5) U = U_0 \sin \omega t.$$

Die Wechselspannung verursacht an einem Bauteil oder einer Baugruppe einen *Wechselstrom*, der eine

zeitliche Versetzung t' (*Phasenverschiebung* δ) gegenüber der Spannung haben kann (Abb. 2):

$$(6) I = I_0 \sin \omega (t - t') = I_0 \sin(\omega t - \delta).$$

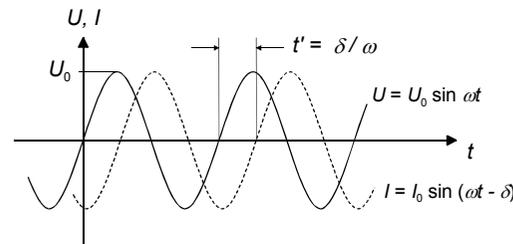


Abb. 2 Grafische Darstellung einer sinusförmigen Wechselspannung und eines in der Phase um t' verschobenen Wechselstroms

Wechselspannungen werden technisch meist durch *Induktion* erzeugt (Dynamogenerator). Wird eine Leiterschleife mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in einem homogenen Magnetfeld gedreht, so wird in dieser auf Grund des Induktionsgesetzes eine Wechselspannung induziert.

In Wechselstromkreisen gibt es unterschiedliche Angaben zur Charakterisierung der Größe von Spannung und Strom: die *Amplituden* oder Scheitelwerte (U_0, I_0), die *Effektivwerte* ($U_{\text{eff}}, I_{\text{eff}}$) und die *Spitze-Spitze-Werte* (V_{SS}):

- **Amplitude (Scheitelwert):** Die Amplituden geben die Maxima von Spannung oder Strom an; sie entsprechen dem Amplitudenbegriff der trigonometrischen Funktionen.
- **Effektivwert:** Die Effektivwerte von Spannung und Strom sind charakteristische Werte, deren Produkt (wie im Fall des Gleichstroms) die (mittlere) joulesche Wärmeleistung ergibt:

$$(7) \bar{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Bei zeitlich periodischer Änderung von Spannung und Strom kann die mittlere Leistung \bar{P} berechnet werden, indem die Stromarbeit als Integral über eine Periode T berechnet und anschließend durch die Periodendauer T dividiert wird:

$$(8) \bar{P} = U_0 I_0 \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2} U_0 I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

(Das Integral $\int \sin^2 x$ hat als Lösung $x/2 - (\sin 2x)/4 + C$.)

- **Spitze-Spitze-Wert:** In besonderen Fällen wird für Spannungen die Differenz zwischen größtem und kleinstem Wert als sogenannter Spitze-Spitze-Wert V_{SS} angegeben.

Die Amplituden und V_{SS} können auf dem Oszilloskop direkt beobachtet werden. Die Effektivwerte werden mit Multimetern gemessen, die für Wechselspannungen und -ströme einen eingebauten Gleichrichter enthalten und für diese Messbereiche in Effektivwerten kalibriert sind.

Wechselstromwiderstand

Analog zum *ohmschen Widerstand* R wird als *Wechselstromwiderstand* Z (Scheinwiderstand oder *Impedanz*) das Verhältnis der Amplituden von Spannung und Strom definiert:

$$(9) Z = \frac{U_0}{I_0} \left(= \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \right).$$

Bei *ohmschen Widerständen* stimmen Gleich- und Wechselstromwiderstand überein. Bei anderen Bauteilen, wie Kondensatoren und Spulen, ist dies nicht der Fall (siehe auch die *Versuche R-C-KREISE* und *FREIE GEDÄMPFTE SCHWINGUNGEN*).

Analogmultimeter

Klassische Geräte zur Messung von Strömen sind Drehspulmessinstrumente, bei denen die Kraftwirkung magnetischer Felder auf Ströme (*Lorentzkraft*; siehe Versuch *SPEZIFISCHE LADUNG DES ELEKTRONS*) ausge-

nutzt wird. Eine stromdurchflossene Spule erfährt in einem homogenen Magnetfeld ein Drehmoment, das dem durch die Spule fließenden Strom proportional ist. Das Drehmoment wird durch eine Feder mit einem linearen Drehmomentgesetz kompensiert. Ein an der Spule befestigter Zeiger liefert somit einen dem Strom proportionalen Ausschlag.

Der Messbereich eines solchen Messwerks kann durch einen *Nebenwiderstand* (*Shunt*) erweitert werden. Schaltet man parallel zum Messwerk einen geeigneten Widerstand, so dass $9/10$ des zu messenden Stroms über diesen Widerstand fließt und nur noch $1/10$ durch das Messwerk, so erhält man eine Messbereichserweiterung um den Faktor 10.

Ein Strommessgerät kann zur Spannungsmessung benutzt werden, indem man es mit einem bekannten *Vorwiderstand* in Reihe an die zu messende Spannung legt, die sich dann nach (1) als Produkt aus dem gesamten Widerstand und dem gemessenen Strom ergibt. Spannungsmessgeräte enthalten diese Vorwiderstände integriert, und die Skala der Geräte ist direkt in der Spannungseinheit V (Volt) kalibriert.

In der Praxis sind Messgeräte verbreitet, bei denen ein Messwerk mit verschiedenen Neben- und Vorwiderständen zu einem Vielfachmessinstrument für weite Strom- und Spannungsbereiche kombiniert ist (*Multimeter*).

Der Fehler von Drehspulmessinstrumenten wird durch die *Güteklasse* angegeben, die den absoluten Fehler in Bezug auf den Messbereich angibt. (Beispiel: Güteklasse 2; Strommessbereich 300 mA; Stromfehler $\Delta I = 2\%$ von 300 mA = 6 mA unabhängig vom Messwert). Die Güteklasse wird im allgemeinen als kleine Zahl ohne weitere Zusätze mit verschiedenen anderen Schaltzeichen auf der Skala des Geräts angegeben (z.B. 1; 1,5; 2 oder 3; nicht aber die Zahl in einem Stern, die eine Angabe über die Gehäuse-Prüfspannung darstellt).

Digitalmultimeter

In der Messtechnik setzen sich zunehmend digitale Messgeräte durch, die einen sogenannten *Analog-Digital-Wandler* (A/D-Converter, ADC) zur Umsetzung von Spannungswerten in ein digitales Signal besitzen. Es gibt verschiedene Verfahren für die A/D-Wandlung. Die zu messende Spannung kann z.B. in Form einer Intervallschachtelung mit einem durch sukzessive Hal-

bierungen verfeinerten Bezugsspannungsintervall verglichen werden, wobei durch die einzelnen Vergleichsergebnisse (JA, NEIN; 1, 0) ein binäres Zahlwort als Messergebnis aufgebaut wird. Oder mit der Messspannung wird ein Kondensator aufgeladen und anschließend bei konstantem Strom entladen, so dass die Entladezeit der Spannung proportional ist. Diese Zeit wird dann digital gemessen.

Der Fehler von digitalen Messgeräten setzt sich aus einem relativen Anteil (% vom Messwert; abgekürzt % v.M.) und einem konstanten Anteil zusammen (Anzahl von Digits (d) = Einheiten in der letzten Stelle der Anzeige)); Beispiel: 0,5 % v.M. + 1 d.

Schaltung von Messgeräten

Zur Strommessung muss das Messgerät immer *in Reihe* zum Strom, zur Spannungsmessung immer *parallel* zu der zu messenden Spannung geschaltet werden. Vor Beginn jeder Messung müssen zum Schutz der Messgeräte die Messbereiche der verwendeten Instrumente auf den *unempfindlichsten* Wert eingestellt werden. In den Schaltungen ist auf die richtige Polarität der Eingänge zu achten.

Oszilloskop (Elektronenstrahloszilloskop)

Das Oszilloskop ist ein wichtiges Instrument zur Beobachtung und Messung von zeitabhängigen, schnellen, *wiederkehrenden* elektrischen Signalen. Der vorliegende Versuch hat als ergänzendes Ziel die Einführung in dieses Gerät. Kernstück eines Oszilloskops ist eine Elektronenstrahlröhre mit einem Elektronenstrahl als praktisch trägheitslosem "Zeiger". Zur Auslenkung des Elektronenstrahls wird die zu untersuchende Spannung an die Platten eines Ablenkcondensators innerhalb der Röhre gelegt, wobei die Elektronen durch die Kraft $F = Q E$ im elektrischen Feld des Kondensators abgelenkt werden.

Oszilloskope besitzen zwei Ablenkensysteme für die X- und für die Y-Richtung (Abb. 3). Zur Untersuchung von Spannung-Zeit-Verläufen wird das Signal über einen Eingangsverstärker an das Y-Ablenkensystem gegeben. Zur Erzeugung einer Zeitachse besitzt das Oszilloskop eine Zeitbasis, die periodisch eine mit konstanter Geschwindigkeit anwachsende Spannung erzeugt (Sägezahnspannung). Diese Spannung wird an das X-Ablenkensystem gelegt, wodurch der Strahl mit konstanter

Geschwindigkeit über den Bildschirm läuft. Geschieht dies hinreichend schnell, so entsteht durch die Trägheit der Leuchtschicht des Bildschirms und des Auges eine durchgehende Linie. Ein *Trigger*-Netzwerk sorgt dafür, dass die Zeitbasis immer in dem Moment "angestoßen" wird, in dem das Signal am Y-Eingang erscheint und synchronisiert damit Signal und Zeitbasis. Für ein wiederkehrendes Signal erhält man auf diese Weise ein stehendes Bild auf dem Bildschirm des Oszilloskops.

Elementare Funktions- und Bedienelemente von Oszilloskopen

Die Wirkung oder Funktion der Schalter und Regler kann aus den Beschriftungen am Gerät erschlossen werden, wenn man sich mit der grundsätzlichen Funktionsweise eines Oszilloskops vertraut gemacht hat.

Bildschirm

- *INTENS.* und *FOCUS*: Regler zur Einstellung von Helligkeit und Schärfe des Bildpunktes (Achtung: eine zu große Helligkeit reduziert die Schärfe des Bildes).
- *cm-Netz* (*DIV.*) über dem Bildschirm zur quantitativen Ablesung der Messwerte.

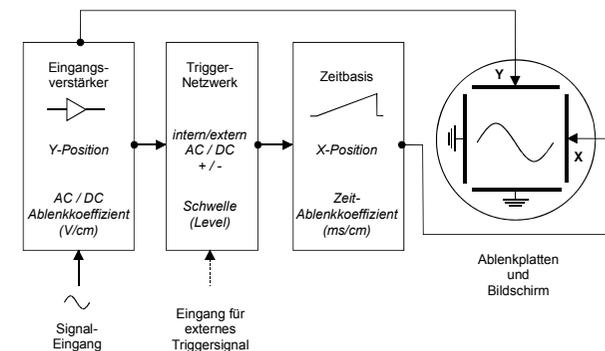


Abb. 3 Funktionsdiagramm eines Oszilloskops

Eingang (Eingangsverstärker)

- *Y-POS.*: Drehknopf zur Einstellung der horizontalen Lage des Bildes (oben/unten).

- **VOLTS/DIV.:** Drehschalter zur Einstellung der Eingangsempfindlichkeit (X-, Y-Ablenkkoeffizienten).
- **VAR.:** Drehknopf zur kontinuierlichen Einstellung der Eingangsempfindlichkeit. *Achtung:* Die Kalibrierung VOLT./DIV gilt nur dann, wenn VAR. am rechten Anschlag steht (Rastposition).
- **DC-AC-GD:** Kopplungsschalter; DC (direct current)= direkte, gleichstrommäßige Kopplung; AC (alternating current) = kapazitive, "galvanisch" getrennte Kopplung, bei der Gleichspannungsanteile unterdrückt werden; GD zur Einstellung des Nullpunktes (Nulllinie).
- **VERT. MODE:** Schalter zur Wahl der Eingangsbetriebsart (Grundeinstellung: Alle Taster gelöst.)

Zeitbasis

- **X-POS.:** Drehknopf zur Einstellung der vertikalen Lage (rechts/links).
- **TIME/DIV.:** Drehschalter zur Einstellung des Maßstabes der Zeitachse (Zeit-Ablenkkoeffizient).
- **VAR.:** Drehknopf zur kontinuierlichen Einstellung der Zeitablenkung. *Achtung:* Die Kalibrierung TIME./DIV gilt nur dann, wenn VAR. am rechten Anschlag steht (Rastposition).

Trigger-Netzwerk

- **TRIG.:** Schalter zur Einstellung der Triggerart (DC / AC / HF = High- / LF = Low-Frequency / ~ = Netzsynchrisation / ± = Steigung der Triggerflanke).
- **EXT.:** Externe Triggerung durch ein zusätzliches Synchronisations-Signal an der TRIG.INP.-Buchse.
- **AT/NORM. – LEVEL:** Schalter für automatische bzw. manuelle Triggerung. Drehknopf für Ansprechschwelle bei manueller Triggerung.

Versuchsdurchführung

Zu Aufgabe 1 und 2 (Widerstandsmessungen bei Gleich- und Wechselstrom)

Als Spannungsquellen sind ein Gleichspannungsnetzgerät und ein Funktionsgenerator (Wechselspannung) vorhanden.

Zur Spannungs- und Strommessung stehen zwei Digitalmultimeter zur Verfügung. Die Multimeter besitzen eine 3½-stellige Anzeige; ihr größter Anzeigewert beträgt 1999. Die Messfehler der Multimeter für die verschiedenen Messbereiche sind im Platzskript angegeben. Man wähle für die Durchführung der Messung geeignete Spannungs- und Stromwerte, bei denen die Messgenauigkeit der Geräte bestmöglich ausgenutzt wird.

Gewöhnliche U//I-R-Multimeter sind für die Messung von Wechselspannungen und -strömen i.a. auf technische Frequenzen von etwa 20 - 200 Hz beschränkt.

Zu Aufgabe 3 (Potentiometer)

Es ist ein 10-Gang-Wendelpotentiometer vorhanden, an dem die Teilspannungen U in Abhängigkeit des Einstellwertes s am Drehknopf des Potentiometers ohne und mit Belastungswiderstand gemessen werden. Der Endwert der Skaleneinstellung ist $s_0 = 10$ Umdrehungen. Der Gesamtwiderstand R_0 der Potentiometer ist jeweils auf den Schaltbrettchen angegeben. Als Belastungswiderstand ist ein 250-Ω-Widerstand auf einem Schaltbrettchen vorhanden; zur späteren Auswertung muss der genaue Wert des Belastungswiderstands mit einem Multimeter gemessen werden. Die Schaltung entspricht der Abbildung 1.

Zur Auswertung werden in einer gemeinsamen grafischen Darstellung die experimentell beobachteten Kennlinien als *Messpunkte* und die theoretisch erwarteten Verläufe als *durchgezogene Kurven* gegenübergestellt. Zur Verallgemeinerung wird das Widerstandsverhältnis R/R_0 als Ordinatengröße gewählt, das durch das Einstellverhältnis s/s_0 ersetzt werden kann.

Der theoretische Verlauf im unbelasteten Fall ergibt sich direkt aus (2). Für den belasteten Fall erhält man durch Umformung von (4):

(10)

$$\frac{U}{U_0} = \frac{\frac{R}{R_0}}{1 + \frac{R}{R_0} \left(1 - \frac{R}{R_0}\right) \frac{R_0}{R_L}} = \frac{\frac{s}{s_0}}{1 + \frac{s}{s_0} \left(1 - \frac{s}{s_0}\right) \frac{R_0}{R_L}}$$

wobei sich insgesamt die in Abbildung 4 dargestellten Verläufe ergeben sollten. Das Ergebnis ist zu diskutieren (Vergleich Experiment/Theorie).

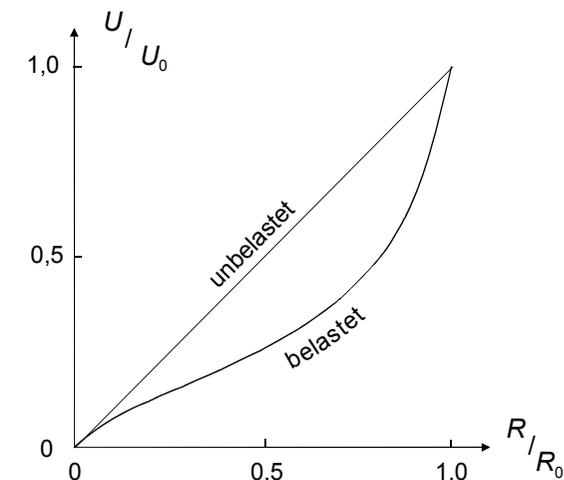


Abb. 4 Potentiometerspannung ohne und mit Belastung

| | |
|-------------------|-----------|
| R-C-KREISE | NP |
|-------------------|-----------|

R ist die Abkürzung (Symbol) für den elektrischen Widerstand und *C* für die Kapazität eines Kondensators; R-C-Kreise sind Kombinationen aus Widerständen und Kondensatoren, die ein für viele physikalische Vorgänge charakteristisches exponentielles Abklingverhalten zeigen.

Ein Kondensator besteht aus zwei voneinander isolierten, elektrisch leitenden Platten (Plattenkondensator; im Allgemeinen ist die Geometrie komplizierter, z.B. kann man leitfähige Folien, durch Isolierfolien getrennt, umeinander wickeln). Einerseits können elektrische Ladungen auf den Platten gebunden werden, so dass ein Kondensator als Speicher für elektrische Ladung fungiert. Andererseits ist durch die isolierende Schicht eine elektrische Trennung zwischen den beiden Platten gegeben, mit der eine indirekte Kopplung in elektrischen Kreisen hergestellt werden kann, bei der Signale (Wechselspannungen, Impulse) übertragen, aber Gleichstromanteile abgetrennt werden können (AC-Kopplung; "galvanische" Trennung).

Kondensatoren spielen eine große Rolle in technischen und biologischen Impulsschaltkreisen zur Informationsverarbeitung (Mess- und Regeltechnik; Reizleitung). Durch die Pufferwirkung des Kondensators kann die Form von Impulsen beeinflusst, und durch die galvanische Trennung unerwünschte Gleichspannungsanteile von Signalen abgetrennt werden.

Eine Zellmembran mit geringer Leitfähigkeit als Grenzschicht zwischen gut leitenden elektrolytischen Flüssigkeiten stellt eine elektrische Parallelschaltung eines Widerstandes (Membranwiderstand) und eines Kondensators (Membrankapazität) dar. Aus der Anwendung entsprechender physikalischer Modellvorstellungen kann ein Verständnis der physiologischen Vorgänge und Messtechniken zur Untersuchung von Zelleigenschaften und interzellulären Vorgängen gewonnen werden.

Aufgaben

1. (Vorversuch Bauteil-Daten) Messung des Widerstandes *R* und der Kapazität *C* der verwendeten Bauteile mit einem Multimeter.

2. (Abklingkurve) Beobachtung der Lade- bzw. Entladestromkurve in einem R-C-Kreis. Bestimmung der Zeitkonstanten des Kreises und Berechnung der Kapazität *C* des Kondensators bei bekanntem Widerstand *R*.
3. (Wechselstromwiderstand) Messung des Wechselstromwiderstandes *Z* eines Kondensators in Abhängigkeit von der Frequenz *f* der angelegten Wechselspannung. Grafische Darstellung des Ergebnisses (*Z* über $T = 1/f$). Vergleich mit dem theoretisch erwarteten Verlauf und Berechnung der Kapazität des Kondensators.
4. (Hoch-/Tiefpass) Messung und grafische Darstellung der Durchlasskurven (Ausgangsspannung über Frequenz) eines Hochpasses und eines Tiefpasses. Bestimmung der Kapazität des Kondensators aus der Schnittstelle der beiden Kurven (Übernahmefrequenz).

In der Zusammenfassung sind die Ergebnisse für die Kapazität aus den drei Messungen zu vergleichen!

Physikalische Grundlagen

Kondensator

Ein Kondensator ist ein Speicher für elektrische Ladung. Die in einem Kondensator befindliche Ladung *Q* (*Q* auf der einen Platte und $-Q$ auf der anderen) ist proportional zur "Größe" des Kondensators (Kapazität *C*) und zur Spannung *U* (die Kapazität *C* ist definiert als Verhältnis von Ladung zu Spannung):

$$(1) \quad Q = C U \quad \left(\text{bzw. Def : } C = \frac{Q}{U} \right).$$

Die Einheit der Kapazität ist:

$$(2) \quad [C] = 1 \frac{A s}{V} = 1 \text{ F (Farad)}.$$

Der Strom *I* ist die zeitliche Änderung der Ladung. Damit gilt nach (1):

$$(3) \quad I_C = \frac{dQ_C}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} \quad \text{bzw.} \quad U_C = \frac{1}{C} \int I_C dt.$$

Beim Laden eines Kondensators baut sich nach (3) die Spannung *U_C* als Gegenspannung zur äußeren Spannung (Generatorspannung) auf. Sind beide dem Betrag nach gleich, entsteht ein Gleichgewichtszustand, bei dem der Strom zum Erliegen kommt.

R-C-Kreis;

Entladestrom in Abhängigkeit von der Zeit

Ein (geladener) Kondensator der Kapazität *C* wird mit einem Widerstand *R* zu einem geschlossenen Stromkreis (Masche) zusammengeschaltet (Abb. 1).

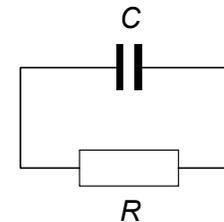


Abb. 1 R-C-Kreis

Die Spannung am Kondensator (*U_C*) ergibt sich aus (3), die Spannung an *R* aus der Definition des Widerstandes $R = U/I$:

$$(4) \quad U_R = R I_R.$$

Nach der Maschenregel muss die Summe aller Spannungen im Kreis verschwinden ($\Sigma U = 0$), d.h.:

$$(5) \quad U_C + U_R = \frac{1}{C} \int I dt + R I = 0 \quad (I = I_C = I_R).$$

Durch die Ableitung nach der Zeit erhält man eine Differentialgleichung für den Strom als Funktion der Zeit:

$$(6) \quad \frac{1}{C} I + R \frac{dI}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC} I = 0.$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung wird die Funktion $I = I(t)$ gesucht, deren Ableitung nach der Zeit (dividiert durch einen Faktor $1/RC$) gleich der Funktion selbst ist. Diese Bedingung erfüllt die e-Funktion:

$$(7) \quad I(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t},$$

(wovon man sich durch Einsetzen überzeugen kann).

Beim Entladen entwickelt sich ein exponentiell mit der Zeit abklingender Strom (ebenso beim Aufladen). Das Produkt RC im Exponenten von (7) bestimmt quantitativ die Abnahme des Stromes und wird als *Zeitkonstante* bezeichnet.

Wechselstromwiderstand eines Kondensators

Entsprechend der Widerstandsdefinition wird als Wechselstromwiderstand Z (*Impedanz*) das Verhältnis der *Amplituden* von Spannung und Strom definiert (das messtechnisch gleich dem Verhältnis der Effektivwerte ist; siehe vorhergehender Versuch *Gleichstrom/Wechselstrom*):

$$(8) \quad Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}.$$

Für eine Wechselspannung $U_C = U_0 \cos \omega t$ am Kondensator kann durch Ableitung nach t gemäß (3) der Strom berechnet werden.:

$$(9) \quad I_C = C \frac{dU_C}{dt} = -\omega C U_0 \sin \omega t = \omega C U_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Für den Wechselstromwiderstand des Kondensators ergibt sich als Verhältnis der Amplituden nach (8):

$$(10) \quad Z = \frac{1}{\omega C}.$$

Ursache des Widerstandes ist die sich aufbauende Gegenspannung am Kondensator. Die dabei umgesetzte Energie bleibt jedoch als elektrische Feldenergie im Kondensator gespeichert und wird während der Entladephase an den Kreis zurückgegeben. Ein (idealer) Kondensator setzt dem Strom einen Widerstand entgegen, der ohne Energieabgabe nach außen bleibt und deshalb als *Blindwiderstand* bezeichnet wird.

Frequenzabhängiger Spannungsteiler (Hochpass und Tiefpass)

Wegen der Frequenzabhängigkeit des Wechselstromwiderstandes von Kondensatoren (und von Spulen) können mit diesen Bauteilen sogenannte *Filter* gebaut werden, die aus einem Wechselspannungsspektrum bestimmte Frequenzbereiche herausziehen. Solche Filter werden oft benötigt, um in elektrischen Mess- und Steuerkreisen die interessierenden Signale auszuwählen und Störsignale mit anderen Frequenzen abzutrennen. Ein einfaches Beispiel ist die Reihenschaltung eines Kondensators mit einem Widerstand als Spannungsteiler (Abb. 2):

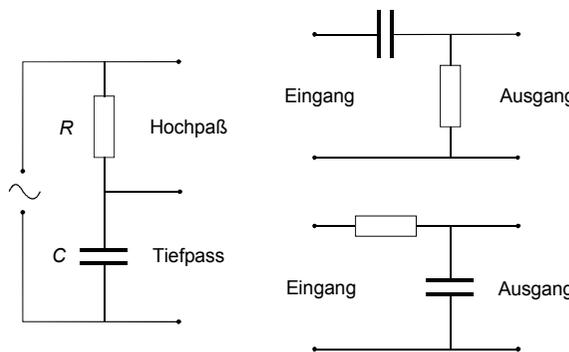


Abb. 2 Hoch- und Tiefpass-Spannungsteilerschaltung

Eine Teilspannung ist proportional dem Teilwiderstand, über dem sie abgegriffen wird (siehe vorausgehender Versuch *Gleichstrom/Wechselstrom*). Für tiefe Frequenzen ist der Widerstand des Kondensators groß, so dass hier der Hauptanteil der Eingangsspannung abfällt. Der Abgriff über dem Kondensator stellt einen *Tiefpass* dar. Für hohe Frequenzen ist umgekehrt der Widerstand des Kondensators klein und der des Widerstandes vergleichsweise groß, so dass der Abgriff über dem Widerstand als *Hochpass* wirkt.

Oszilloskop (Elektronenstrahloszilloskop)

Das Oszilloskop ist ein wichtiges Instrument zur Beobachtung und Messung von zeitabhängigen, schnellen, wiederkehrenden elektrischen Signalen. Der vorlie-

gende Versuch hat als ergänzendes Ziel die Einführung in dieses Gerät.

Kernstück eines Oszilloskops ist eine Elektronenstrahlröhre mit einem Elektronenstrahl als praktisch trägheitslosem "Zeiger". Zur Auslenkung des Elektronenstrahls wird die zu untersuchende Spannung an die Platten eines Ablenkkondensators innerhalb der Röhre gelegt, wobei die Elektronen durch die Kraft $F = Q E$ im elektrischen Feld des Kondensators abgelenkt werden.

Oszilloskope besitzen zwei Ablensysteme für die X- und für die Y-Richtung (Abb. 3). Zur Untersuchung von Spannung-Zeit-Verläufen wird das Signal über einen Eingangsverstärker an das Y-Ablensystem gegeben. Zur Erzeugung einer Zeitachse besitzt das Oszilloskop eine *Zeitbasis*, die periodisch eine mit konstanter Geschwindigkeit anwachsende Spannung erzeugt (Sägezahnspannung). Diese Spannung wird an das X-Ablensystem gelegt, wodurch der Strahl mit konstanter Geschwindigkeit über den Bildschirm läuft. Geschieht dies hinreichend schnell, so entsteht durch die Trägheit der Leuchtschicht des Bildschirms und des Auges eine durchgehende Linie. Ein *Trigger-Netzwerk* sorgt dafür, dass die Zeitbasis immer in dem Moment "angestoßen" wird, in dem das Signal am Y-Eingang erscheint und damit Signal und Zeitbasis synchronisiert werden. Für ein wiederkehrendes Signal erhält man auf diese Weise ein stehendes Bild auf dem Bildschirm des Oszilloskops.

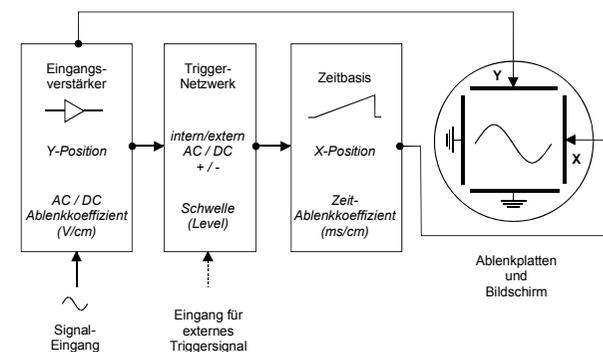


Abb. 3 Prinzipschaltbild eines Oszilloskops

Elementare Funktions- und Bedienelemente von Oszilloskopen

Bildschirm

- *INTENS.* und *FOCUS*: Regler zur Einstellung von Helligkeit und Schärfe des Bildpunktes (Achtung: eine zu große Helligkeit reduziert die Schärfe des Bildes).
- *cm-Netz (DIV.)* über dem Bildschirm zur quantitativen Ablesung der Messwerte.

Eingang (Eingangsverstärker)

- *Y-POS.*: Drehknopf zur Einstellung der horizontalen Lage des Bildes (oben/unten).
- *VOLTS/DIV.*: Drehschalter zur Einstellung der Eingangsempfindlichkeit (*X-*, *Y-* Ablenkoeffizienten).
- *VAR.*: Drehknopf zur kontinuierlichen Einstellung der Eingangsempfindlichkeit. **Achtung:** Die Kalibrierung *VOLT./DIV* gilt nur dann, wenn *VAR.* am rechten Anschlag steht (Rastposition).
- *DC-AC-GD*: Kopplungsschalter; *DC* (direct current) = direkte, gleichstrommäßige Kopplung; *AC* (alternating current) = kapazitive, "galvanisch" getrennte Kopplung, bei der Gleichspannungsanteile unterdrückt werden; *GD* zur Einstellung des Nullpunktes (Nulllinie).
- *VERT. MODE*: Schalter zur Wahl der Eingangsbetriebsart (Grundeinstellung: Alle Taster gelöst.)

Zeitbasis

- *X-POS.*: Drehknopf zur Einstellung der vertikalen Lage (rechts/links).
- *TIME/DIV.*: Drehschalter zur Einstellung des Maßstabes der Zeitachse (Zeit-Ablenkoeffizient).
- *VAR.*: Drehknopf zur kontinuierlichen Einstellung der Zeitablenkung. **Achtung:** Die Kalibrierung *TIME./DIV* gilt nur dann, wenn *VAR.* am rechten Anschlag steht (Rastposition).

Trigger-Netzwerk

- *TRIG.*: Schalter zur Einstellung der Triggerart (*DC / AC / HF* = High- / *LF* = Low-Frequency / \sim = Netz-synchronisation / \pm = Steigung der Triggerflanke).
- *EXT.*: Externe Triggerung durch ein zusätzliches Synchronisations-Signal an der *TRIG.INP.*-Buchse.
- *AT/NORM. – LEVEL*: Schalter für automatische bzw. manuelle Triggerung. Drehknopf für Ansprechschwelle bei manueller Triggerung.

Versuchsdurchführung

Steckbrett und Geräteanschlüsse

Zum Aufbau der Schaltungen ist eine Experimentier-Steckplatine (Steckbrett) vorhanden. Eine belegte Buchse des Steckbretts ist mit allen benachbarten Buchsen verbunden.

Bei den Geräteanschlüssen ist zu berücksichtigen, dass die Masse-Pole der Geräte über die Erdleitung intern miteinander verbunden sind!

Zu Aufgabe 1 (Bauteiledaten):

Zur späteren Auswertung und zum Vergleich werden zunächst die Daten der verwendeten Bauteile (Kondensator und 18-k Ω -Widerstand mit der *Kennzeichnung RCK*) mit zwei Digital-Multimetern gemessen. Dabei ist für die Widerstandsmessung das *METRAHIT 12S* und für die Kapazitätsmessung das *VOLTCRAFT 4090* zu verwenden.

Zu Aufgabe 2 (Abklingkurve):

Der Lade- und Entladevorgang in einem *R-C*-Kreis wird periodisch durch Anlegen einer Rechteckspannung durchgeführt (Funktionsgenerator), so dass der Strom-Zeit-Verlauf als *stehendes Bild* auf einem Oszilloskop sichtbar gemacht werden kann. Die Frequenz soll etwa 50 Hz betragen um ein flimmerfreies Bild zu erzeugen. Die Schaltung entspricht Abb. 4, wobei Einstellungshinweise für die Geräte im Platzskript angegeben sind.

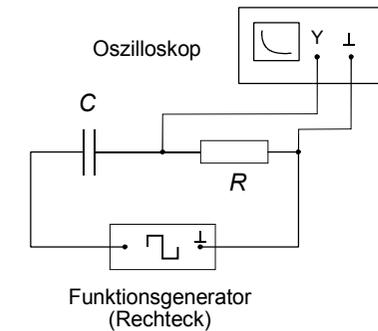


Abb. 4 Schaltung zur Aufnahme der Abklingkurve

Achtung: Zur kalibrierten Anzeige muss der innere Drehknopf der *Zeitablenkung* am rechten Anschlag stehen (cal)!

Die mit dem Oszilloskop über dem Widerstand *R* beobachtete Spannung ist dem Strom proportional ($I = U/R$) und somit ein Maß für den Strom. Zur Auswertung wird der Spannungs-Zeit-Verlauf punktweise vom Bildschirm abgenommen, protokolliert und zur Auswertung einfach-logarithmisch dargestellt. Aus der Steigung der erwarteten Geraden kann die *Zeitkonstante RC* (Kehrwert der Steigung) und bei gegebenem *R* die Kapazität *C* des Kondensators berechnet werden.

Bei Interesse kann zusätzlich der Stromverlauf bei einem kleineren Widerstand (10 k Ω) und der Spannungsverlauf am Kondensator bei sehr großem Widerstand (1 M Ω) beobachtet werden. Man vergleiche die Kurven mit dem Verlauf der angelegten Rechteck-Eingangsspannung (Differenzier- bzw. Integrierschaltung).

Zu Aufgabe 3 (Wechselstromwiderstand):

Die Widerstandsbestimmung erfolgt durch Strom-Spannungsmessungen nach (8). Als Spannungsquelle wird wieder der Funktionsgenerator benutzt, jedoch jetzt mit sinusförmigem Spannungsverlauf (\sim). Die Frequenz wird am Funktionsgenerator direkt angezeigt. Die Spannung am Kondensator wird mit einem Analogvoltmeter (*GRUNDIG-Millivoltmeter*) und der Strom mit einem Digitalmultimeter (*VOLTCRAFT HC-5050DB*) gemessen. Die Spannung soll zusätzlich mit dem Oszilloskop beobachtet werden.

Die Frequenzabhängigkeit des Wechselstromwiderstandes soll im Frequenzintervall von 500 Hz bis 5000 Hz aufgenommen werden (bei höheren Frequenzen wird der Wechselstromwiderstand des Kondensators zu gering, so dass die Spannung am Funktionsgenerator abfällt). Man wähle eine sinnvolle Abstufung der Messpunkte mit etwa zehn äquidistanten Punkten für die Periodendauer T (siehe Abb. 5). Zur Auswertung wird der Wechselstromwiderstand Z über $T = 1/f$ entsprechend Abb. 5 grafisch dargestellt. (T -Achse nach links, um den mit wachsender Frequenz abnehmenden Widerstand zu veranschaulichen). Aus der Steigung der erwarteten Geraden kann die Kapazität des Kondensators berechnet werden.

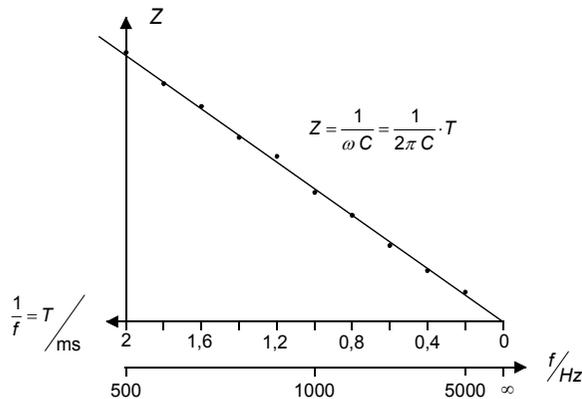


Abb. 5: Zur Frequenzabhängigkeit und Bestimmung des Wechselstromwiderstandes

Zu Aufgabe 4 (Hoch-/Tiefpass):

Ein Hoch-/Tiefpass wird wieder aus dem Kondensator und dem 18-k Ω -Widerstand geschaltet (Schaltung wie zu Aufgabe 2). Mit den zwei vorhandenen Messgeräten (*GRUNDIG*, *VOLTCRAFT*) werden die Spannungen U_R am Widerstand (Hochpass) und U_C am Kondensator (Tiefpass) in Abhängigkeit von der Frequenz im Bereich von 50 bis 500 Hz gemessen. Zur Auswertung werden U_R und U_C in Abhängigkeit von f in einem gemeinsamen Diagramm grafisch dargestellt. Aus der Frequenz des Schnittpunktes (*Übergangsfrequenz*) kann die Kapazität C des Kondensators berechnet werden, da dort wegen $U_R = U_C$ auch der Widerstand R und der Wechsel-

stromwiderstand des Kondensators $1/\omega C$ gleich sein müssen.

In der Zusammenfassung sind die Ergebnisse für die Kapazität C des Kondensators aus den drei Messungen und aus der Direktbestimmung mit dem Multimeter zu vergleichen.

RADIOAKTIVER ZERFALL

NP

Radioaktive Stoffe und Präparate finden zunehmend Anwendung in vielen Bereichen von Wissenschaft und Technik. In der Medizin werden radioaktive Stoffe zur Diagnose und Therapie eingesetzt. Stoffwechselfvorgänge und Funktionsabläufe können untersucht werden, indem man radioaktive Stoffe in ein Organ einbringt und deren örtliche und zeitliche Verteilung durch Messung der Strahlung sichtbar macht. In der Biologie und Chemie werden Transportvorgänge und Reaktionsverläufe durch Markierung mit radioaktiven Substanzen untersucht. Durch Bestrahlung können einfach und gezielt genetische Mutationen erzeugt werden. Altertums-, Erd- und Biowissenschaften machen Gebrauch von der ^{14}C -Methode zur Altersbestimmung. In der Technik werden radioaktive Präparate für Überwachungs- und Regelzwecke und zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung eingesetzt.

Von radioaktiver Strahlung können erhebliche Gefahren für den Menschen ausgehen. Der Umgang mit radioaktiver Strahlung und radioaktiven Materialien ist daher gesetzlich geregelt, und die Vorschriften des Strahlenschutzes müssen genau beachtet werden!

Die Aktivität des bei den Versuchen benutzten Neutronengenerators ist vergleichsweise gering. Seine Dosisleistung liegt in 1 m Abstand in der Größenordnung der natürlichen Strahlung, und eine beitragende Belastung und ein zusätzliches Risiko sind bei der kurzfristigen Arbeit an den Versuchsplätzen nicht gegeben. Dennoch sind bei der Arbeit die grundsätzlichen Regeln der STRAHLENSCHUTZANWEISUNG im Methodikteil des Skripts zu beachten.

Ein wichtiges Ziel der Versuche RADIOAKTIVER ZERFALL und GAMMA-SPEKTROSKOPIE ist es, durch Vermittlung der Grundlagen der quantitativen Erfassung und Bewertung von Strahlenwirkungen (Dosimetrie) eine kritische Beurteilung von Strahlenwirkungen möglich zu machen.

Aufgaben

- (Dosisleistungsmessung). Zur sofortigen Auswertung: Messung der γ -Ionendosisleistung direkt an der Außenwand des für den Versuch vorhandenen Neutronengenerators und in größerem Abstand (ca. 3 m). Umrechnung auf die Äquivalentdosisleistung (in mSv pro Jahr).
- (Zerfallsgesetz): Messung der Zerfallskonstanten der Radionuklide ^{108}Ag und ^{110}Ag . Angabe der Halbwertszeiten und mittleren Lebensdauern.

- (Anfangsaktivitäten): Angabe und Vergleich der Anfangsaktivitäten der beiden Silber-Isotope für die verschiedenen Aktivierungszeiten.

Physikalische Grundlagen

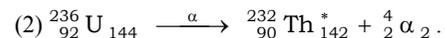
Radioaktiver Zerfall

Atomkerne sind aus Protonen und Neutronen aufgebaut. Die Zahl der Protonen (P) ist gleich der Anzahl der Elektronen in der Hülle des Atoms; sie bestimmt das Element und die chemischen Eigenschaften. Die Zahl der Neutronen (N) ist bei leichten Kernen etwa gleich, bei schweren Kernen größer als die Protonenzahl. Die Summe aus P und N heißt *Nukleonenzahl* A . Von allen Elementen existieren Modifikationen mit unterschiedlicher Neutronenzahl, die *Isotope* genannt werden. Die Kennzeichnung eines speziellen Isotops geschieht durch Angabe des Buchstabensymbols für das Element und die Nukleonenzahl. Aus diesen Angaben geht auch die Protonenzahl P und die Neutronenzahl N hervor, z.B.:

$$(1) \quad \begin{matrix} \text{Nukleonenzahl} \\ \text{Ladungszahl} \end{matrix} \text{Element}_{\text{Neutronenzahl}} = {}_{55}^{137} \text{Cs}_{82} = ({}^{137}\text{Cs}).$$

Isotope mit zu großer oder zu geringer Neutronenzahl sind energetisch instabil und wandeln sich spontan unter Aussendung von Teilchen um (Radionuklide; radioaktiver Zerfall). Die Umwandlungen erfolgen durch α -Zerfall oder β -Zerfall (β^- ; β^+ ; EC = *electron capture*), wobei sich die Protonenzahlen und damit die chemische Natur der Atome ändert. Nach dem Zerfall befinden sich die Folgekerne im Allgemeinen in einem angeregten Zustand höherer Energie, aus dem sie dann unter Aussendung von elektromagnetischer Strahlung (γ -Strahlung) in den Grundzustand übergehen.

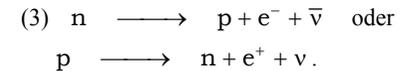
- α -Zerfall: Bei schweren Kernen wird ein ganzes Bruchstück aus zwei Protonen und zwei Neutronen (He-Kern, α -Teilchen) abgespalten, wodurch sich das Verhältnis von Neutronenzahl zu Protonenzahl ändert, z.B.:



Der * beim Folgekern ^{232}Th kennzeichnet, dass sich der Kern in einem angeregten Zustand befindet.

- β -Zerfall: Beim β -Zerfall wandelt sich ein Neutron in ein Proton um oder umgekehrt. Dabei werden Elektronen (β^- -Strahlung) oder Positronen (β^+ -Strahlung) und

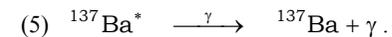
zusätzlich sogenannte Antineutrinos ($\bar{\nu}$) oder Neutrinos (ν) emittiert:



- EC (Elektroneneinfang; *electron capture*): Der Elektroneneinfang entspricht einem β^- -Zerfall in umgekehrter Richtung, wobei ein Kernproton ein Hüllenelektron einfängt (s-Elektronen haben eine zwar kleine, aber nicht verschwindende Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Ort des Kerns):



- γ -Strahlung: Nach radioaktiven Umwandlungen befinden sich die Folgekerne häufig in energetisch angeregten Zuständen (*; s.o.). Sie gehen mit unterschiedlichen Übergangswahrscheinlichkeiten (bzw. *mittleren Lebensdauern* oder *Halbwertszeiten* als äquivalenten Parametern) weiter in den Grundzustand über, wobei die freiwerdende Energie in Form von (elektromagnetischer) γ -Strahlung ausgesandt wird, z.B.:



Dosimetrie

Die Dosimetrie erfasst quantitativ die physikalischen und biologisch-physiologischen Wirkungen von Strahlung auf organische Materie; sie ist ein für Medizin und Biologie wichtiges Arbeitsgebiet. Bei den Betrachtungen muss zwischen Ursache und Wirkung unterschieden werden.

Ursachen von Strahlenbelastungen sind radioaktive Quellen, deren Stärke durch ihre *Aktivität*, d.h. die Anzahl der Zerfälle pro Zeit in der Maßeinheit 1 Bq (Bequerel) = 1 Zerfall pro Sekunde gemessen wird.

Die *Wirkungen* beziehen sich immer auf eine Probe im Strahlungsfeld, die eine bestimmte Strahlungsmenge pro Masse, die *Dosis*, durch Absorption aufnimmt: gibt es nichts oder Niemanden in der Nähe eines Strahlers, so gibt es auch keine Folgen. Die physikalisch-makroskopischen Folgen sind zunächst ein im Probekörper "deponierter" Betrag an Energie. Die primären

mikroskopisch-chemischen Folgen sind Ionisationen oder andere komplizierte Veränderungen der chemisch-atomaren oder molekularen Struktur der Probensubstanz, die dann Ursache für nachfolgende physiologische und biologische Strahlenschädigungen sind.

Bringt man eine Probe (z.B. Muskel- oder Weichteilgewebe als organischen Körper) in ein radioaktives Strahlungsfeld, so wird ein Teil der Strahlungsenergie absorbiert, während ein anderer Teil die Probe oder den Körper ohne Wechselwirkung, und damit ohne Schädigung, durchläuft.

Als Maß für die *aufgenommene* (absorbierte) Strahlung wird zunächst die *Energiedosis* D_E als absorbierte Energie pro Masse definiert. Dosisangaben beziehen sich immer auf eine bestimmte Probe und einen bestimmten Stoff als Probensubstanz. Sie charakterisieren aber auch die Stärke eines Strahlungsfeldes durch die Betrachtung, dass diese Energie aufgenommen würde, wenn sich die entsprechende Probe am Ort dieses Strahlungsfeldes befände:

$$(6) \quad D_E = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{Masse}} = \frac{\Delta E}{m}$$

Die Einheit der Energiedosis ist:

$$(7) \quad [D_E] = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1 \text{ Gy} \quad (\text{Gray}).$$

Die Energiedosis ist schwer direkt messbar, da die bei praktischen Betrachtungen gegebenen Energiemengen sehr gering sind (eine für den Menschen 100%-ig *letale Strahlendosis* beträgt etwa 8 J/kg. Vergleiche: Zur Temperaturerhöhung von Wasser um 1 K sind $\approx 4200 \text{ J/kg}$ erforderlich, d.h. *die Energie einer tödlichen Strahlendosis entspricht der Wärmemenge eines Schluckes Kaffee!* Physikalisch und messtechnisch gut nachweisbar ist das *Ionisationsvermögen* radioaktiver Strahlung und als praktische Messgröße wird daher zusätzlich die *Ionendosis* D_Q mit Luft als Probensubstanz definiert:

$$(8) \quad D_Q = \frac{\Delta Q}{m_{\text{Luft}}}$$

Die Einheit ist:

$$(9) \quad [D_Q] = 1 \frac{\text{C}}{\text{kg}_{\text{Luft}}} = 1 \frac{\text{As}}{\text{kg}_{\text{Luft}}}$$

Die Ionendosis kann direkt mit sogenannten Ionisationskammern gemessen werden.

Der Zusammenhang zwischen Energie- und Ionendosis hängt einerseits vom Probenmaterial und andererseits von der *Quantenenergie* der Strahlung ab. Für Muskel- und Weichteilgewebe gilt in guter Näherung in weiten Bereichen unabhängig von der Quantenenergie:

$$(10) \quad D_E \approx 40 \frac{\text{Gy}}{\text{C/kg}} D_Q$$

Die biologische Strahlenwirkung wird darüber hinaus auch von der Strahlenart bestimmt, was durch einen zusätzlichen Faktor für die *relative biologische Wirksamkeit* (RBW-Faktor) zum Ausdruck gebracht wird (Tab. 1):

| Strahlenart | RBW-Faktor |
|---|------------|
| β -, γ -Strahlung | 1 |
| langsame Neutronen | 5 |
| α -Strahlung, schnelle Neutronen | 10 |
| Röntgenstrahlung | 5...10 |

Tabelle 1: *RBW-Faktoren*

Die Energiedosis D_E multipliziert mit dem RBW-Faktor ergibt dann die wirkungsrelevante Äquivalentdosis $D_{\bar{A}} = \text{RBW} \cdot D_E$. Die Einheit der Äquivalentdosis ist, genau wie die der Energiedosis, 1 J/kg; sie wird zur Unterscheidung jedoch 1 Sv (Sievert) genannt:

$$(11) \quad [D_{\bar{A}}] = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1 \text{ Sv} \quad (\text{Sievert}).$$

Neben den Dosiswerten sind vielfach die auf die Zeit bezogenen Größen wichtig, d.h. die Energie-, Ionen- oder Äquivalentdosisleistungen.

Zeitgesetz des radioaktiven Zerfalls

Der radioaktive Zerfall ist ein zufälliger (stochastischer) Prozess, für den über den *Zeitpunkt* des Zerfalls keine deterministisch bestimmten, sondern nur Wahrscheinlichkeits- bzw. statistische Erwartungsvorhersagen für ein Ensemble von Kernen gemacht werden können. Für *einen* betrachteten radioaktiven Kern wird die Wahrscheinlichkeit zu zerfallen

als proportional zur Beobachtungsdauer dt angenommen, so dass für die Anzahl der Zerfälle dN einer Probe von N Kernen gilt:

$$(12) \quad dN = -\lambda N dt \quad \text{bzw.} \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N(t)$$

Das negative Vorzeichen berücksichtigt die *Abnahme* von N mit der Zeit. Als Lösung der Differentialgleichung (12) wird eine Funktion $N(t)$ gesucht, deren Ableitung (bis auf einen Faktor) gleich der Funktion selbst ist. Diese Bedingung erfüllt die e-Funktion, und man erhält als *radioaktives Zerfallsgesetz*:

$$(13) \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Der Proportionalitätsfaktor λ im Exponenten heißt *Zerfallskonstante*. Sie kennzeichnet die Wahrscheinlichkeit des radioaktiven Zerfalls und ist für die einzelnen Radionuklide charakteristisch. Äquivalente Größen sind die *mittlere Lebensdauer* τ oder die *Halbwertszeit* $T_{1/2}$. Die Zusammenhänge zwischen den Größen sind:

$$(14) \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \quad \text{bzw.} \quad T_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Nach der Zeitdauer $T_{1/2}$ ist die Zahl radioaktiver Kerne einer Probe auf die Hälfte, nach der Zeitdauer τ auf den e -ten Teil ($1/e \approx 1/2,72 \approx 0,37 = 37\%$) zurückgegangen.

Als *Aktivität* A wird die Zahl der Zerfälle pro Zeit - dN/dt bezeichnet. Man erhält:

$$(15) \quad A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) = A_0 e^{-\lambda t} \quad \text{mit} \quad A_0 = \lambda N_0$$

Die Einheit der Aktivität ist 1 s^{-1} (pro Sekunde) gleich 1 Bq (Bequerel).

Kernreaktionen

Neben dem spontanen *Zerfall* können Kernumwandlungen auch durch äußere Einflüsse verursacht werden, z.B. durch *Kernreaktionen*. Trifft ein freies Neutron auf einen Atomkern, so kann es eingefangen werden. Der Atomkern wird zu einem radioaktiven, sogenannten *Zwischenkern*, der anschließend weiter zerfällt.

Bestimmte Uranisotope zerfallen nach Neutroneneinfang in zwei etwa gleich große Bruchstücke (Kernspaltung). Dabei werden wieder Neutronen freigesetzt, die weitere Kernreaktionen auslösen können (*Kettenreaktionen*).

Radioaktives Gleichgewicht und Sättigungsaktivität

Bei der Herstellung radioaktiver Kerne oder angeregter Zustände (z.B. durch Kernreaktionen) stehen der Aktivierungsprozess und der gleichzeitig einsetzende radioaktive Zerfall in Konkurrenz zueinander. Zunächst wächst die Anzahl der radioaktiven Kerne, wobei aber auch die Zahl der Zerfälle zunimmt. Im Endzustand stellt sich ein *radioaktives Gleichgewicht* mit einer dann konstanten Aktivität ein (*Sättigungsaktivität*), bei dem die Anregungsrate und die Zerfallsrate gleich groß sind. Dieser Sättigungszustand wird dabei um so eher erreicht, je schneller der Zerfall erfolgt, d.h. je kleiner die Halbwertszeit des jeweiligen Zerfalls ist (siehe Abb. 1).

Ist nach einem radioaktiven Zerfall der Folgekern wiederum radioaktiv, so ergeben sich *radioaktive Zerfallsketten* oder Mutter-Tochter-Systeme. Derartige Mutter-Tochter-Systeme haben große Bedeutung in der medizinischen Anwendung zur Gewinnung kurzlebiger Radionuklide (Generatorsysteme).

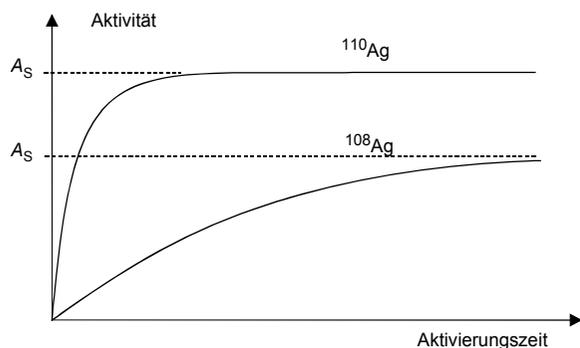


Abb. 1 ^{110}Ag erreicht (bei gleicher Isotopenhäufigkeit in der Probe) eine größere Sättigungsaktivität wegen des größeren Wirkungsquerschnitts bei der Aktivierung und einen schnelleren Anstieg zum Gleichgewicht wegen der kürzeren Halbwertszeit.

Nachweissysteme

Geräte zum Strahlungsnachweis nennt man *Strahlungsdetektoren*. Die meisten Detektoren nutzen das Ionisationsvermögen der radioaktiven Strahlung aus. In einem nicht- oder schlechtleitenden Material (Gase, Halbleiter) werden durch Ionisation freie Ladungsträger erzeugt, die in einem elektrischen Messkreis einen nachweisbaren Strom- oder Spannungsimpuls verursachen. Beispiele für derartige Detektoren

sind Ionisationskammern, Proportionalzählrohre, *Geiger-Müller-Zählrohre* (Auslösezählrohre) und Halbleiterdetektoren. Bei diesem Versuch wird der Strahlungsnachweis mit einem Geiger-Müller-Zählrohr (GM-Zählrohr) durchgeführt, das sehr einfach in Aufbau und Betrieb ist. Geiger-Müller-Zählrohre besitzen jedoch kein *Energieauflösungsvermögen* (siehe Versuch *GAMMA-SPEKTROSKOPIE*), d.h. jedes Strahlungsquant löst unabhängig von seiner Quantenenergie ein einheitliches Signal aus. Sie sind wegen ihrer relativ großen Totzeit auf kleine Zählraten beschränkt.

Fehler von Zählgrößen beim radioaktiven Zerfall

Der radioaktive Zerfall verhält sich als spontaner Prozess zufällig und unterliegt statistischen Gesetzmäßigkeiten. Die Anzahl der Zerfälle in einem bestimmten Zeitintervall Δt z.B. ist normalverteilt, wobei die Standardabweichung als Fehler des einzelnen Messwerts gleich der Wurzel aus der Anzahl der registrierten Ereignisse N ist:

$$(16) \text{ Messwert } N \text{ mit Fehler } \Delta N = \sqrt{N} .$$

Beispiel: Werden in 10 s 1327 Ereignisse registriert, so ist der Fehler $\sqrt{1327} = 37$, das Ergebnis also $N = (1327 \pm 37)$ Ereignisse (bzw. als Endergebnis korrekt gerundet: $N = (1,33 \pm 0,04) \cdot 10^3$ Ereignisse). Werden Ereignisse zusammengefasst (addiert) oder voneinander abgezogen (Subtraktion von Untergrund), so gilt die Wurzelregel in beiden Fällen für die *Summe* der Ereignisse; d.h.

$$\Delta(1327 + 158) = \Delta(1327 - 158) = \sqrt{1485} = 39 !$$

(Der scheinbare Widerspruch zu den in der Anleitung *Fehlerrechnung* angegebenen Fehlerfortpflanzungsregeln erklärt sich daraus, dass im Rahmen dieses Praktikums aus Vereinfachungsgründen die Fehlerregeln für den Maximalfehler benutzt werden, die die statistische Natur der Fehler nicht berücksichtigen.)

Versuchsdurchführung

Zu Aufgabe 1: Dosisleistungsmessung

Die praktisch wichtige Messgröße der Dosimetrie ist die *Dosisleistung*, d.h. die auf die Zeit bezogene Dosis. Am Versuchsplatz ist ein in pA/kg ($= 10^{-12} \text{ C pro s und kg}$) kalibriertes Ionendosisleistungsmessgerät vorhanden. Wegen der vergleichsweise geringen Anzahl der Ereignisse zeigen die

Messwerte eine ausgeprägte stochastische Charakteristik mit einer erheblichen Schwankungsbreite, so dass ein Schätzwertintervall für die Dosisleistung durch Beobachtung über eine angemessen lange Zeit ermittelt werden muss.

Zu Aufgabe 2 (Zerfallsgesetz):

Apparatur, Nulleffekt, Messtabelle

Der Strahlungsnachweis geschieht mit einem *Geiger-Müller-Zählrohr*, das sich innerhalb einer zylindrischen Bleiabschirmung befindet. Zur Messung der Aktivität (Zählrate) in Abhängigkeit von der Zeit ist ein automatischer Zähler vorhanden, der periodisch alle 10 s eine Messung mit folgendem Funktionsablauf durchführt:

- Rücksetzen des Zählers auf 0 (reset);
- Ereigniszählung (ca. 9 s);
- Stopp zur Ablesung (ca. 1 s).

Das Ablesen und Protokollieren der Daten im 10-s-Takt bei einer Gesamtmesszeit von 15 Minuten (s.u.) erfordert Konzentration. Um Fehler in der Zeitachse durch unterlassene Ablesungen zu vermeiden, ist daher eine Kette von fünf Leuchtdioden am Zählgerät vorhanden, die in der Folge der Messwerte nacheinander aufleuchten und nach dem Ablauf von jeweils fünf Messungen gemeinsam erlöschen. Legt man im Messprotokoll eine Tabelle mit Blocks von fünf Feldern an, so lässt sich der korrekte Ablauf der Messung kontrollieren. Machen Sie sich vor Beginn der Messungen mit der Apparatur vertraut.

Vor Beginn der Messungen ist der *Nulleffekt* (Untergrund U), d.h. die Zählrate ohne radioaktive Probe, zu bestimmen. Der Nulleffekt kann auch mit Hilfe des automatischen Zählzyklus, oder aber auch durch eine "unmittelbare", ununterbrochene Messung bestimmt werden, wobei dann der Wert auf das tatsächliche Zähl-Zeitintervall von 9 s umzurechnen ist. Der Untergrund ist später von den einzelnen Messwerten punktweise abzuziehen.

Für die spätere Auswertung werden neben den gemessenen Zeit (t)- und Ereignis-Messwerten (N_{Mess}) zusätzlich die um den Untergrundanteil korrigierten Ereigniswerte ($N = N_{\text{Mess}} - U$), die aus der grafischen Darstellung für große Zeiten extrapolierten Werte für ^{108}Ag (N_{108}) und die Messwerte für ^{110}Ag als Differenzen zu den Werten von ^{108}Ag benötigt ($N_{110} = N - N_{108}$); siehe dazu auch die nachfolgende Beschreibung der Auswertung. Zur übersichtlichen Dokumentation aller Daten empfiehlt es sich, eine Messtabelle so anzulegen, dass sie

bereits Spalten für diese weiteren Werte berücksichtigt (siehe Tabelle 2):

| t/s | N_{Mess} | $N_{108+110}$ $= N_{Mess} \cdot U$ | N_{108} (extrapoliert) | N_{110} $= N_{108+110} - N_{108}$ |
|-------|------------|---------------------------------------|-----------------------------|--|
| 5 | | | | |
| 15 | | | | |
| 25 | | | | |
| 35 | | | | |
| 45 | | | | |
| ... | | | | |
| ... | | | | |

Tabelle 2 Vorschlag für die Messtabelle

Zerfallsgesetz

Am Versuchsplatz ist ein Zylinder aus Silberblech vorhanden, der um das Zählrohr gebracht werden kann. Die Messungen werden nacheinander für zwei verschiedene Aktivierungszeiten (1 min und 12 min) durchgeführt, wofür die Silberzylinder zunächst in einem der Kanäle der Neutronenquelle aktiviert werden.

- Zur späteren korrekten Bestimmung der Anfangsaktivitäten ist es sehr wichtig, bei Ende der Aktivierung gleichzeitig mit dem Herausnehmen der Probe aus dem Generator den Messzyklus am Zählgerät zu starten, unabhängig davon, wie schnell der Silberzylinder über das Zählrohr gebracht werden kann. (Der erste Messwert ist damit nicht korrekt und wird später vom funktionalen Verlauf abweichen, was für die Auswertung der Messung aber unerheblich ist.)

Die Messungen sind für beide Aktivierungszeiten über (wenigstens) 15 min zu erstrecken, auch wenn gerade bei der kurzen Aktivierungszeit der Eindruck entsteht, dass die Zählrate schon nach kürzerer Zeit bis auf den Nulleffekt abgeklungen ist. Die Halbwertszeit des kurzlebigen Isotops ^{110}Ag beträgt 24 s und die des langlebigeren Isotops ^{108}Ag 144 s. Für eine eindeutige Abgrenzung der beiden unterschiedlichen Komponenten und Festlegung des Kurvenverlaufs der Abklingkurve für das langlebige Isotop ist eine Beobachtung über mindestens fünf Halbwertszeiten erforderlich.

Auswertung

Zur Auswertung werden die um den Nulleffekt korrigierten Messwerte einfachlogarithmisch dargestellt. Als Zeitpunkte

der 10-s-Zählintervalle werden den einzelnen Werten die Intervallmitten zugeordnet (für das erste 10-s-Intervall also $t = 5$ s, usw.; siehe auch Beispiel der schematischen Darstellung der Messtabelle). Die Messung hat typischerweise den in Abb. 2 gezeigten Verlauf.

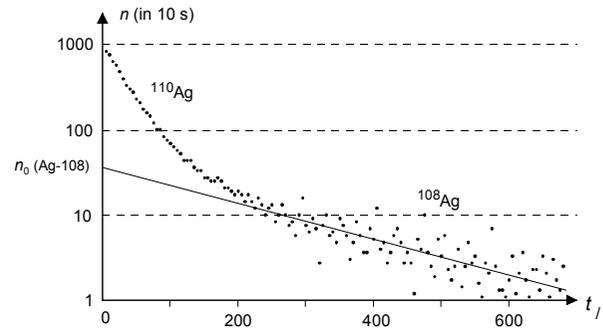


Abb. 2 Grafische Darstellung der Messergebnisse. Zählrate logarithmisch über der Zeit und Ausgleichsgerade für Ag-108

Zunächst wird durch den flacheren, rechten Teil der Kurve (ab etwa $t = 150$ s) eine Ausgleichsgerade für ^{108}Ag gelegt, und aus der Steigung die Zerfallskonstante berechnet. Dabei ist es günstig, die Messwerte bis etwa 150 s abzudecken, um bei der Festlegung der Ausgleichsgeraden nicht durch den Beitrag der schnellen Komponente von ^{110}Ag beeinflusst zu werden.

Danach werden von den Messpunkten des steileren, linken Teils der Kurve punktweise die Anteile von ^{108}Ag abgezogen, die man der extrapolierten Ausgleichsgeraden entnimmt. Die so erhaltenen Werte für ^{110}Ag werden in einer zweiten Darstellung erneut einfachlogarithmisch und mit einem geeignet gestreckten Zeitmaßstab dargestellt und ausgewertet. Die Zerfallskonstanten werden aus den Steigungen der Geraden gemäß (15) und die Halbwertszeiten nach (14) berechnet.

Zu Aufgabe 3: Anfangsaktivitäten

Die Anfangszählraten n_0 für $t = 0$ können an den Schnittpunkten mit der Ordinate abgelesen werden. Die Werte sind im Vergleich zu dem erwarteten Verhalten gemäß Abb. 1 qualitativ zu diskutieren.

Literaturwerte

Mittlere natürliche Äquivalentdosisleistung für die Bundesrepublik Deutschland:

$$\dot{D}_A = 1,3 \text{ mSv/a (Schwankungsbreite unbekannt)}$$

Halbwertszeiten (KOHLRAUSCH; Praktische Physik 3; Teubner):

$$T_{1/2} (^{108}\text{Ag}) = (144 \pm 1) \text{ s}$$

$$T_{1/2} (^{110}\text{Ag}) = (24,4 \pm 0,2) \text{ s}$$

GAMMA-SPEKTROSKOPIE

NP

Radioaktive Stoffe und Präparate finden zunehmend Anwendung in vielen Bereichen von Wissenschaft und Technik. In der Medizin werden radioaktive Stoffe zur Diagnose und Therapie eingesetzt. Stoffwechselläufe und Funktionsabläufe können untersucht werden, indem man radioaktive Stoffe in ein Organ einbringt und deren örtliche und zeitliche Verteilung durch Messung der Strahlung sichtbar macht. In der Biologie und Chemie werden Transportvorgänge und Reaktionsverläufe durch Markierung mit radioaktiven Substanzen untersucht. Durch Bestrahlung können einfach und gezielt genetische Mutationen erzeugt werden. Altertums-, Erd- und Biowissenschaften machen Gebrauch von der ^{14}C -Methode zur Altersbestimmung. In der Technik werden radioaktive Präparate für Überwachungs- und Regelzwecke und zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung eingesetzt.

Von radioaktiver Strahlung können erhebliche Gefahren für den Menschen ausgehen. Der Umgang mit radioaktiver Strahlung und radioaktiven Materialien ist daher gesetzlich geregelt, und die Vorschriften des Strahlenschutzes müssen genau beachtet werden!

Die Aktivität des in den Versuchen benutzten Neutronengenerators ist vergleichsweise gering. Seine Dosisleistung liegt in 1 m Abstand in der Größenordnung der natürlichen Strahlung, und eine zählende Belastung und ein zusätzliches Risiko sind bei der kurzfristigen Arbeit an den Versuchsplätzen nicht gegeben. Dennoch sind zur Arbeit an den Versuchsplätzen die grundsätzlichen Regeln der STRAHLENSCHUTZ-ANWEISUNG im allgemeinen Teil des Skripts zu beachten.

Ein wichtiges Ziel der Versuche RADIOAKTIVER ZERFALL und GAMMA-SPEKTROSKOPIE ist es, durch Vermittlung der Grundlagen der quantitativen Erfassung und Bewertung von Strahlenwirkungen (Dosimetrie) eine kritische Beurteilung von Strahlenwirkungen möglich zu machen.

Aufgaben

- (Dosisleistungsmessung. Gemeinsame Aufgabe zur sofortigen Auswertung): Messung der natürlichen Äquivalentdosisleistung und (zum Vergleich) der Äquivalentdosisleistung des ^{60}Co -Präparats in

0,3 m Abstand. Umrechnung der Einheit der gemessenen Werte ($\mu\text{Sv/h}$) in Sv pro Jahr.

- (Kalibrierung des Spektrometers): Aufnahme der γ -Spektren beim Zerfall von ^{60}Co , ^{137}Cs und ^{241}Am mit Linien bekannter Energie. Grafische Darstellung (Energie gegen Kanalnummer) und Anpassung einer Kalibrierkurve.
- (e^+e^- -Vernichtungsstrahlung): Bestimmung der Energie der e^+e^- -Vernichtungsstrahlung am ^{22}Na -Präparat und Vergleich mit der *Einsteinschen Beziehung*.
- (Auflösungsvermögen): Bestimmung des relativen Auflösungsvermögens des Spektrometers für die 0,662-MeV-Linie von ^{137}Cs .
- (Absorptionsgesetz): Überprüfung des Absorptionsgesetzes für γ -Strahlung und Bestimmung der Halbwertsdicke von Blei für die 0,662-MeV-Strahlung von ^{137}Cs .

Physikalische Grundlagen

Radioaktiver Zerfall

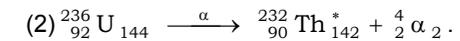
Atomkerne sind aus Protonen und Neutronen aufgebaut. Die Zahl der Protonen (P) ist gleich der Anzahl der Elektronen in der Hülle des Atoms; sie bestimmt das Element und die chemischen Eigenschaften. Die Zahl der Neutronen (N) ist bei leichten Kernen etwa gleich, bei schweren Kernen größer als die Protonenzahl. Die Summe aus P und N heißt *Nukleonenzahl* A . Von allen Elementen existieren Modifikationen mit unterschiedlicher Neutronenzahl, die *Isotope* genannt werden. Die Kennzeichnung eines speziellen Isotops geschieht durch Angabe des Buchstabensymbols für das Element und die Massenzahl. Aus diesen Angaben gehen auch die Protonenzahl P und die Neutronenzahl N hervor, z.B.:

$$(1) \quad \begin{matrix} \text{Nukleonenzahl} \\ \text{Ladungszahl} \end{matrix} \text{Element}_{\text{Neutronenzahl}} = \begin{matrix} 137 \\ 55 \end{matrix} \text{Cs}_{82} = \left(\begin{matrix} 137 \\ 55 \end{matrix} \text{Cs} \right).$$

Isotope mit vom obigen "Gleichgewichtszustand" abweichender Neutronenzahl sind energetisch instabil und wandeln sich spontan unter Aussendung von Teilchen um (Radionuklide; radioaktiver Zerfall). Die Umwandlungen erfolgen durch α -Zerfall oder β -Zerfall (β^- ; β^+ ; EC

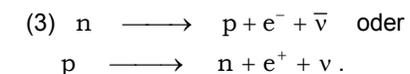
= *electron capture*), wobei sich die Protonenzahlen und damit die chemische Natur der Atome ändern. Nach dem Zerfall befinden sich die Folgekerne im Allgemeinen in einem angeregten Zustand höherer Energie, aus dem sie unter Aussendung von elektromagnetischer Strahlung (γ -Strahlung) in den Grundzustand übergehen.

- α -Zerfall: Bei schweren Kernen wird ein ganzes Bruchstück aus zwei Protonen und zwei Neutronen (He-Kern, α -Teilchen) abgespalten, wodurch sich das Verhältnis von Neutronenzahl zu Protonenzahl verändert, z.B.:

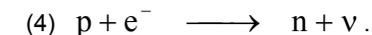


Der * beim Folgekern ^{232}Th kennzeichnet, dass sich der Kern in einem angeregten Zustand befindet.

- β -Zerfall: Beim β -Zerfall wandelt sich ein Neutron in ein Proton um oder umgekehrt. Dabei werden Elektronen (β^- -Strahlung) oder Positronen (β^+ -Strahlung) und zusätzlich sogenannte Antineutrinos ($\bar{\nu}$) oder Neutrinos (ν) emittiert:

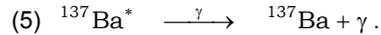


- EC (Elektroneneinfang; *electron capture*): Der Elektroneneinfang entspricht einem β^- -Zerfall in umgekehrter Richtung, wobei ein Kernproton ein Hüllenelektron einfängt (s-Elektronen haben eine zwar kleine, aber nicht verschwindende Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Ort des Kerns):



- γ -Strahlung: Nach radioaktiven Umwandlungen befinden sich die Folgekerne häufig in energetisch angeregten Zuständen (*; s.o.). Sie gehen mit unterschiedlichen Übergangswahrscheinlichkeiten (bzw. *mittleren Lebensdauern* oder *Halbwertszeiten* als äquivalenten Parametern) weiter in den Grundzustand über, wobei die freiwerdende Ener-

gie in Form von (elektromagnetischer) γ -Strahlung ausgesandt wird, z.B.:



Dosimetrie

Die Dosimetrie erfasst quantitativ die physikalischen und biologisch-physiologischen Wirkungen von Strahlung auf organische Materie; sie ist ein für Medizin und Biologie wichtiges Arbeitsgebiet. Bei den Betrachtungen muss zwischen *Ursache* und *Wirkung* unterschieden werden. *Ursachen* von Strahlenbelastungen sind radioaktive Quellen, deren Stärke durch ihre *Aktivität*, d.h. die Anzahl der Zerfälle pro Zeit in der Maßeinheit 1 Bq (Bequerel) = 1 Zerfall pro Sekunde gemessen wird.

Die *Wirkungen* beziehen sich immer auf eine Probe im Strahlungsfeld, die eine bestimmte Strahlungsmenge pro Masse, die *Dosis*, durch Absorption aufnimmt: gibt es nichts oder Niemanden in der Nähe eines Strahlers, so gibt es auch keine Folgen. Die physikalisch-makroskopischen Folgen sind zunächst ein im Probekörper "deponierter" Betrag an Energie. Die primären mikroskopisch-chemischen Folgen sind Ionisationen oder andere komplizierte Veränderungen der chemisch-atomaren oder molekularen Struktur der Probensubstanz, die dann Ursache für nachfolgende physiologische und biologische Strahlenschädigungen sind.

Bringt man eine Probe (z.B. Muskel- oder Weichteilgewebe als organischen Körper) in ein radioaktives Strahlungsfeld, so wird ein Teil der Strahlungsenergie absorbiert, während ein anderer Teil die Probe oder den Körper ohne Wechselwirkung, und damit ohne Schädigung, durchläuft.

Als Maß für die *aufgenommene* (absorbierte) Strahlung wird zunächst die *Energiedosis* D_E als absorbierte Energie pro Masse definiert. Dosisangaben beziehen sich immer auf eine bestimmte Probe und einen bestimmten Stoff als Probensubstanz. Sie charakterisieren aber auch die Stärke eines Strahlungsfeldes durch die Betrachtung, dass diese Energie aufgenommen würde, wenn sich die entsprechende Probe am Ort dieses Strahlungsfeldes befände:

$$(6) \quad D_E = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{Masse}} = \frac{\Delta E}{m}.$$

Die Einheit der Energiedosis ist:

$$(7) \quad [D_E] = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1 \text{ Gy (Gray)}.$$

Die Energiedosis ist schwer direkt messbar, da die bei praktischen Betrachtungen gegebenen Energiemengen sehr gering sind (eine für den Menschen 100-%ig *letale Strahlendosis* beträgt etwa 8 J/kg. Vergleiche: Zur Temperaturerhöhung von Wasser um 1 K sind ≈ 4200 J/kg erforderlich, d.h. *die Energie einer tödlichen Strahlendosis entspricht der Wärmemenge eines Schluckes Kaffee!* Physikalisch und messtechnisch gut nachweisbar ist das *Ionisationsvermögen* radioaktiver Strahlung und als praktische Messgröße wird daher zusätzlich die *Ionendosis* D_Q mit Luft als Probensubstanz definiert:

$$(8) \quad D_Q = \frac{\Delta Q}{m_{\text{Luft}}}.$$

Die Einheit ist:

$$(9) \quad [D_Q] = 1 \frac{\text{C}}{\text{kg}_{\text{Luft}}} = 1 \frac{\text{As}}{\text{kg}_{\text{Luft}}}.$$

Die Ionendosis kann direkt mit sogenannten Ionisationskammern gemessen werden.

Der Zusammenhang zwischen Energie- und Ionendosis hängt einerseits vom Probenmaterial und andererseits von der *Quantenenergie* der Strahlung ab. Für Muskel- und Weichteilgewebe gilt in guter Näherung in weiten Bereichen unabhängig von der Quantenenergie:

$$(10) \quad D_E \approx 40 \frac{\text{Gy}}{\text{C/kg}} D_Q.$$

Die biologische Strahlenwirkung wird darüber hinaus auch von der Strahlenart bestimmt, was in einem zusätzlichen Faktor für die *relative biologische Wirksamkeit* (RBW-Faktor) zum Ausdruck gebracht wird (Tab. 1):

| Strahlenart | RBW-Faktor |
|---|------------|
| β -, γ -Strahlung | 1 |
| langsame Neutronen | 5 |
| α -Strahlung, schnelle Neutronen | 10 |
| Röntgenstrahlung | 5...10 |

Tab. 1 *RBW-Faktoren*

Die Energiedosis D_E multipliziert mit dem RBW-Faktor ergibt dann die wirkungsrelevante Äquivalentdosis $D_{\bar{A}} = \text{RBW} \cdot D_E$.

Die Einheit der Äquivalentdosis ist, genau wie die der Energiedosis, 1 J/kg; sie wird zur Unterscheidung jedoch 1 Sv (Sievert) genannt:

$$(11) \quad [D_{\bar{A}}] = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1 \text{ Sv (Sievert)}$$

Neben den Dosiswerten tritt insbesondere als praktische Messgröße vielfach die auf die Zeit bezogene Dosis, d.h. die *Dosisleistung* auf.

Quantenenergie und Zerfallschema

Die Atomkerne besitzen, genauso wie die Elektronenhülle, nur diskrete mögliche Anregungszustände, so dass bei Umwandlungsprozessen oder Übergängen innerhalb eines Kerns bestimmte Energiemengen umgesetzt werden. Diese Einzelenergie der Teilchen oder der Strahlungsquanten beim radioaktiven Zerfall wird als *Quantenenergie* der Strahlung bezeichnet. Die in der Kernphysik übliche Energieeinheit ist 1 eV (Elektronenvolt); sie ist die Energie, die eine Elementarladung ($\approx 1,602 \cdot 10^{-19}$ C) beim Durchlaufen einer Spannung von 1 V gewinnt:

$$(12a) \quad 1 \text{ eV} \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ AsV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad \text{bzw.}$$

$$(12b) \quad 1 \text{ J} \approx 6,24 \cdot 10^{18} \text{ eV} = 6,24 \cdot 10^{12} \text{ MeV}.$$

Ein radioaktiver Zerfall kann übersichtlich in einem *Zerfallsschema* dargestellt werden, das die Grund- und angeregten Zustände der Kerne (Niveaus) als Linien und die möglichen Umwandlungen oder Übergänge als

Pfeile enthält. Die Zerfallsschemata der beim vorliegenden Versuch benutzten radioaktiven Strahler sind in Abbildung 1 dargestellt.

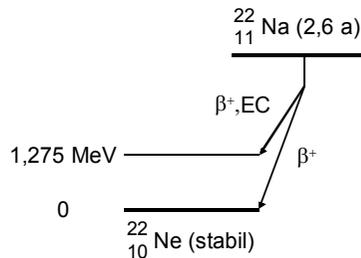
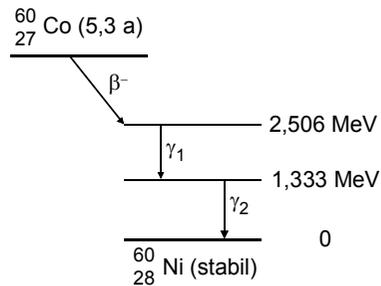
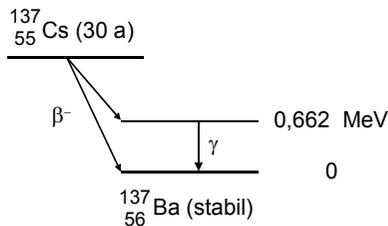


Abb. 1a Zerfallsschemata von ^{60}Co und ^{22}Na



Bedingt durch den *Impulserhaltungssatz* werden bei dem Prozess zwei γ -Quanten emittiert, so dass rechnerisch jedes β -Teilchen in ein γ -Quant übergeht. Die Massen von Elektron und Positron stimmen überein; der Wert für m_e und für die Lichtgeschwindigkeit c ist im Abschnitt *Konstanten* zu finden.

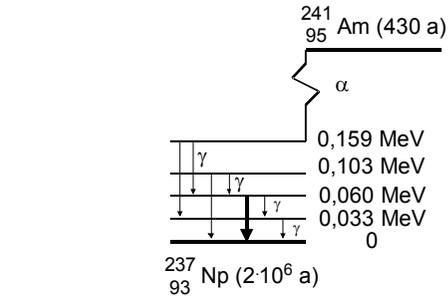


Abb. 1b Zerfallsschemata von ^{137}Cs und ^{241}Am

γ -Spektr

Die bei Übergängen innerhalb eines angeregten Kerns zu erwartenden Linien im γ -Spektrum der verschiedenen Isotope gehen aus den o.a. Zerfallsschemata hervor. Die Hauptlinien sind (Tabelle 2):

| Nuklid | Übergangsenergie |
|-------------------|------------------------|
| ^{60}Co | 1,173 MeV 1,333 MeV |
| ^{137}Cs | 0,662 MeV |
| ^{241}Am | 0,060 MeV |

Tab. 2 γ -Übergangsenergien der verwendeten Isotope

Die Hauptlinie von ^{22}Na entspricht keinem γ -Übergang, sondern stellt eine *Vernichtungsstrahlung* dar. Sie entsteht, wenn das beim Zerfall von ^{22}Na ausgesandte *Antiteilchen* Positron (e^+ oder β^+) auf ein Elektron (e^- oder β^-) als zugehöriges *Teilchen* stößt, wobei die Materie entsprechend der *Einsteinschen Beziehung* in Strahlungsenergie umgesetzt wird:

$$(13) \quad E = m c^2 .$$

Absorption von γ -Strahlung

Die Absorption, d.h. die Schwächung von Strahlung beim Durchgang durch Materie, kann wegen der quantelten Natur der Strahlung in einer einfachen Vorstellung als *Zufallsprozess* verstanden werden, bei dem innerhalb einer Schicht dx des Absorbermaterials ein betrachtetes Strahlungsquant durch einen Wechselwirkungsvorgang mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (μ) aus dem Strahlengang entfernt wird. Für einen Teilchen- bzw. Quantenstrom I (Quanten pro Zeit, *Zählrate* im Experiment) folgt daraus als Ansatz für die Abnahme dI :

$$(14) \quad dI = -\mu I dx \quad \text{bzw.} \quad \frac{dI}{dx} = -\mu I .$$

Als Lösung der Differentialgleichung (14) wird eine Funktion $I(x)$ gesucht, die (bis auf einen Proportionalitätsfaktor) mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Diese Bedingung erfüllt die e-Funktion, und die Lösung ist:

$$(15) \quad I = I_0 e^{-\mu x} .$$

Der Absorptionskoeffizient μ wird als *linearer Schwächungskoeffizient* bezeichnet und hängt von der Dichte des Absorbermaterials und der Quantenenergie der Strahlung ab. Eine äquivalente Angabe für den Schwächungskoeffizienten ist die Halbwertsdicke $x_{1/2}$, die aus (15) berechnet werden kann:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\mu x_{1/2}} \quad | \ln$$

$$(16) \quad -\ln 2 = -\mu x_{1/2} \quad \text{bzw.} \quad x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} .$$

Für die Absorption sind mikroskopisch drei Wechselwirkungsprozesse verantwortlich:

- **Photoeffekt:** Das γ -Quant wird vollständig gestoppt. Die gesamte γ -Energie wird auf ein Hüllenelektron übertragen, das dadurch aus der Elektronenhülle herausgeschlagen wird. Das ionisierte Atom bleibt in einem energetisch angeregten Zustand zurück

und reorganisiert sich unter Aussendung von Licht- und Röntgenstrahlung.

- **Compton-Effekt:** Das γ -Quant wird lediglich an einem Hüllenelektron gestreut. Es gibt nur einen Teil seiner Energie an das Elektron ab und läuft selbst mit geringerer Energie ("weichere Strahlung") weiter. Die Folgen für das getroffene Atom sind die gleichen wie beim Photoeffekt. Der Compton-Effekt spielt bei Bestrahlungs- und Strahlenschutzproblemen eine entscheidende Rolle, weil durch ihn hochenergetische Strahlung, die eine geringere Absorptionswahrscheinlichkeit hat, in niederenergetische Strahlung mit höherer Absorptionswahrscheinlichkeit konvertiert wird. Dadurch verteilt sich die Dosis nicht gleichmäßig über eine Probe, sondern hat ein Maximum nach einer bestimmten Eindringtiefe (*Aufbaueffekt*).
- **Paarbildungseffekt:** Bei höheren Energien kann sich die Energie eines γ -Quants in der Nähe eines Atomkerns spontan *materialisieren*, wobei ein Elektron-Positron-Paar erzeugt wird (umgekehrter Effekt zur Vernichtungsstrahlung).

Aufbau des γ -Spektrometers

Geräte zum Strahlungsnachweis nennt man *Strahlungsdetektoren*. Die meisten Detektoren nutzen das Ionisationsvermögen der Strahlung aus (z.B. *Geiger-Müller-Zählrohre*; siehe Versuch *Radioaktiver Zerfall*). Beim vorliegenden Versuch wird als Detektor ein *Szintillationsdetektor* (siehe Abbildung 2) eingesetzt, dessen Wirkungsweise auf dem Photoeffekt beruht (s.o.). In einem NaJ-Kristall wird das γ -Quant durch ein Hüllenelektron absorbiert (Photoeffekt), das aus dem Molekülverband herausgeschlagen wird und sich als freies Elektron im Kristall bewegt. Bei der anschließenden Abbremsung des Elektrons werden zahlreiche Atome optisch angeregt, die bei ihrer Rückkehr in den Grundzustand Licht aussenden. Das Licht fällt auf eine *Photokathode*, wo es wiederum durch Photoeffekt freie Elektronen auslöst. Diese Elektronen werden in einen *Sekundärelektronenvervielfacher* lawinenartig verstärkt und verursachen einen elektrischen Impuls, der anschließend elektronisch weiterverstärkt wird. Das gesamte System arbeitet *linear*,

d.h. die Höhe des Ausgangsimpulses des Systems ist proportional zur Energie des auslösenden γ -Quants.

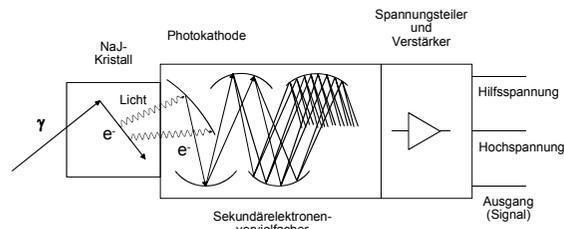


Abb. 2 Prinzip eines Szintillationsspektrometers

Zur Aufnahme des Spektrums eines Strahlers müssen die Impulse nach ihrer Höhe (Energie) sortiert und zur Bestimmung der Anzahl bzw. Intensität gezählt werden. Diese Funktion übernimmt ein *Vielkanal-Impulshöhenanalysator*. Das System besteht aus einem Impulshöhendetektor, der die Impulshöhen misst und in digitalisierter Form einem diskreten Wertebereich von Impulshöhenstufen zuordnet (z.B. zwischen 0 und 256). Dem nachgeschaltet ist ein Zähler mit 256 Zählstellen (*Kanälen*), in denen die Anzahlen der Impulse verschiedener Höhe gezählt werden. Als Inhalt der Kanäle erhält man so die Verteilung der Intensität (*Kanalinhalt*) über der Energie (impulshöhenproportionale *Kanalnummer*). Das Funktionsdiagramm eines Vielkanal-Impulshöhenanalysators ist in Abb. 3 wiedergegeben.

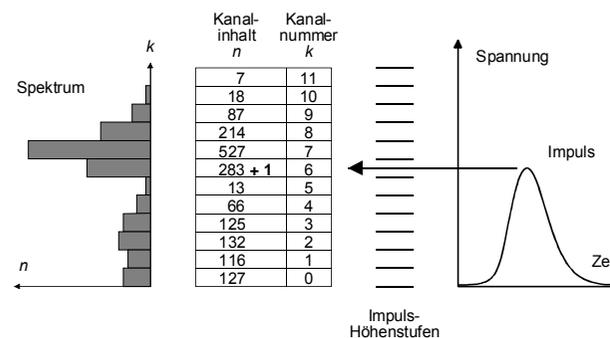


Abb. 3 Funktionsdiagramm eines Vielkanal-Impulshöhenanalysators

Die Zähler sind auf einem PC eingerichtet, mit dem das Spektrum gespeichert und digital bearbeitet werden kann (grafische Darstellung, Ausgabe der Daten, Summieren von Bereichen des Spektrums und Berechnung der Zählrate unter Berücksichtigung der Messzeit).

Auflösungsvermögen

Als *Auflösungsvermögen* eines Messsystems bezeichnet man die kleinste Differenz Δx zweier Werte, die noch getrennt wahrgenommen werden können (siehe auch Abschnitt *Fehlerrechnung*); das *relative Auflösungsvermögen* bezieht sich, entsprechend dem relativen Fehler, zusätzlich auf die Messgröße selbst. Bei dem vorliegenden Spektrometer geht es um das γ -Energieauflösungsvermögen:

(17) relatives Auflösungsvermögen

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} \quad \left(\text{hier } \delta E = \frac{\Delta E}{E} \right)$$

Bei Kernstrahlungsmessgeräten ist es üblich, als kleinste auflösbare Differenz ΔE die volle Breite bei halbem Maximum (*Halbwertsbreite*) der Linie eines Spektrums anzusetzen.

Fehler von Zählgrößen beim radioaktiven Zerfall

Der radioaktive Zerfall verhält sich als spontaner Prozess zufällig und unterliegt statistischen Gesetzmäßigkeiten. Die Anzahl der Zerfälle in einem bestimmten Zeitintervall Δt z.B. ist normalverteilt, wobei die Standardabweichung als Fehler des einzelnen Messwerts gleich der Wurzel aus der Anzahl der registrierten Ereignisse N ist:

(19) Messwert N mit Fehler $\Delta N = \sqrt{N}$

Beispiel: Werden in 10 s 1327 Ereignisse registriert, so ist der Fehler $\sqrt{1327} = 37$, das Ergebnis also $N = (1327 \pm 37)$ Ereignisse (bzw. als Endergebnis korrekt gerundet: $N = (1,33 \pm 0,04) \cdot 10^3$ Ereignisse). Werden Ereignisse zusammengefasst (addiert) oder voneinander abgezogen (Subtraktion von Untergrund), so gilt die Wurzelregel in beiden Fällen für die *Summe* der Ereignisse; d.h.

$$\Delta(1327 + 158) = \Delta(1327 - 158) = \sqrt{1485} = 39!$$

(Der scheinbare Widerspruch zu den in der Anleitung *FEHLERRECHNUNG* angegebenen Fehlerfortpflanzungsregeln erklärt sich daraus, dass im Rahmen dieses

Praktikums aus Vereinfachungsgründen die Fehlerregeln für den Maximalfehler benutzt werden, die die statistische Natur der Fehler nicht berücksichtigen).

Versuchsdurchführung

Zu Aufgabe 1 (Dosisleistungsmessung)

Zur Messung der Äquivalentdosisleistung ist ein in $\mu\text{Sv/h}$ kalibriertes Äquivalentdosisleistungsmessgerät vorhanden. Besondere Bedienungshinweise sind am Messplatz zu finden.

Bedienung des Spektrometers (Aufgaben 2-5)

Die Bedienung der Einzelgeräte (Hochspannungsvorsorgung, Impulshöhendetektor, PC als Vielkanalzähler) geht weitgehend aus der Beschriftung an den Geräten bzw. den Programm-Menüs hervor; zusätzliche Einstellhinweise sind im Platzskript angegeben. Es wird empfohlen, vor Beginn der Messungen ausgiebig mit den Geräten zu experimentieren, um die Funktionsweise und das Verhalten des Aufbaus gut zu verstehen. Neben den physikalischen Inhalten stellt die Apparatur ein System dar, an dem der statistische Charakter von Messungen anschaulich beobachtet werden kann.

Zu Aufgaben 2 und 3 (Kalibrierung und Messung der Energie der Vernichtungsstrahlung)

Die Spektren der verschiedenen Isotope werden aufgenommen und die Lage der Linien (Kanalnummer k) mit Hilfe der Funktion *Impulszahl* aufgesucht, wobei die Lage entweder durch das Maximum oder besser durch den Kanal, der die Linie in zwei *flächengleiche Hälften* teilt (*Median*, visuelle Beurteilung), gekennzeichnet ist. Die Messzeit für die einzelnen Spektren ist so zu wählen, dass sich eine hinreichende Qualität ergibt (statistische Genauigkeit). Die gesamte Aufnahme eines Spektrums und die Bestimmung der Lage einer Linie ist exemplarisch zu wiederholen, um aus der Reproduzierbarkeit eine Schätzung für den Fehler zu gewinnen.

- Wichtig: Zum Nachweis der vergleichsweise niederenergetischen 0,06-MeV-Strahlung von ^{241}Am muss die *Untergrund*-Einstellung (Anschwellenschwelle; Menü *Optionen*) auf Kanal 1 oder 2 herabgesetzt werden.

Zur Auswertung wird die Lage der Linien gegen die bekannten Energiewerte grafisch dargestellt und eine Kalibrierkurve (Kurvenlineal!) an die Messwerte angepasst. Anhand der Kalibrierkurve kann dann die Energie der

Vernichtungsstrahlung (Spektrum von ^{22}Na) bestimmt werden. Um ein anschauliches Bild eines Spektrums im Protokoll zu haben, soll zusätzlich der Verlauf des gesamten Spektrums von ^{137}Cs vom Bildschirm skizziert werden.

Zu Aufgabe 4 (Auflösungsvermögen)

Zur Bestimmung des Auflösungsvermögens des Spektrometers wird die gesamte 0,662-MeV-Linie von ^{137}Cs punktwise ausgelesen (Funktion *Impulszahl*) und grafisch dargestellt. An die Punkte wird eine Glockenkurve als Ausgleichskurve angepasst und die volle Breite bei halbem Maximum abgelesen. Da Kanäle und Energien näherungsweise proportional zueinander sind, kann das relative Auflösungsvermögen nach (17) direkt aus den Kanalzahlen (Δk , $k_{(\text{Max})}$) ermittelt werden. Zur Fehlerabschätzung sind anhand der Streuung der Punkte insbesondere Fehlergrenzen für Δk zu berücksichtigen.

Zu Aufgabe 5 (Absorptionskoeffizient)

Die Bestimmung des Absorptionskoeffizienten bzw. der Halbwertsdicke wird mit der 0,662-MeV-Linie von ^{137}Cs durchgeführt. Es sind verschiedene Bleiabsorber vorhanden, die zwischen Quelle und Detektor gebracht werden können. Intensitätswerte (Impulse pro Zeit) können mit der Funktion *Fläche* (Menü *Messung*) bestimmt werden, bei der die Impulszahl und die Impulsrate zwischen zwei Kanälen als Grenzen ausgegeben werden.

Für einwandfreie Ergebnisse muss der "Untergrund" durch natürliche Strahlung berücksichtigt werden. Überlegen Sie den Beitrag des Untergrundes und eine Methode der quantitativen Berücksichtigung. Die Berechnung des Absorptionskoeffizienten bzw. der Halbwertsdicken geschieht nach (15) und (16) durch eine logarithmische Darstellung der Intensitäten gegen die Absorberdicken.

Literaturwerte

Halbwertsdicke für γ -Strahlung (KOHLEAUSCH; Praktische Physik 3; Teubner Stuttgart), dort ohne Fehlerangabe:

$$x_{1/2}(\text{Pb}) = 5,7 \text{ mm.}$$

SPEZIFISCHE LADUNG DES ELEKTRONS

NP

Die naturphilosophischen Vorstellungen eines LEUKIPP und DEMOKRIT über die atomistische Natur der Materie waren seinerzeit visionär. Tatsächlich wurde die korpuskulare Struktur der Materie erst im 18. Jahrhundert aufgedeckt, nachdem man das "Baukastensystem" der chemischen Elemente und Verbindungen erkannte (LAVOISIER, DALTON, GAY-LUSSAC, AVOGADRO, PROUT und andere). Die Untersuchungen der Elektrolyse (FARADAY) und der Eigenschaften von "Kathodenstrahlen" (freie Elektronen; PLÜCKER, HITTORF, GOLDSTEIN, SCHUSTER, THOMSON, WIECHERT und andere) zu Mitte und Ende des 19. Jahrhunderts ergaben ein festes Verhältnis von Masse zu elektrischer Ladung (was im vorliegenden Versuch nachvollzogen werden soll), so dass man schlussfolgern musste, dass auch die Elektrizität in bestimmte elementare Quanten geteilt ist, wenn man den Teilchencharakter der Materie voraussetzt. Der direkte Nachweis der Ladungsquantelung gelang dann MILLIKAN Anfang des 20. Jahrhunderts (Messungen 1910-1925). Im Laufe der modernen naturwissenschaftlichen Forschung ist deutlich geworden, dass die Natur in ihrem mikroskopischen Aufbau allgemein einer gequantelten Struktur unterworfen ist, die in Modellen von Teilchenbildern und diskreten Zuständen verstanden werden kann.

Elementare elektrodynamische Phänomene, die den vorliegenden Versuch betreffen, sind die Kraftwirkung elektrischer Felder auf Ladungen und die Kraftwirkung magnetischer Felder auf bewegte Ladungen (Lorentz-Kraft).

Aufgabe

Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons e/m .

Physikalische Grundlagen

Lorentz-Kraft und Bewegung von Ladungsträgern in einem Magnetfeld

Auf bewegte Ladungsträger (Ladung Q) der Geschwindigkeit \mathbf{v} wirkt in einem magnetischen Feld \mathbf{B} eine Kraft \mathbf{F} , die von Q , \mathbf{v} und \mathbf{B} abhängig ist (*Lorentz-Kraft*):

$$(1) \quad \vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{mit} \quad F = Q v B \sin(\mathbf{v}, \mathbf{B}).$$

Die *Lorentz-Kraft* ist stets senkrecht zur Geschwindigkeit und zum Magnetfeld gerichtet. Sie verändert damit nicht den Betrag der Geschwindigkeit, sondern bewirkt lediglich eine Richtungsänderung (Abb. 1). Eine der wichtigsten Anwendungen der *Lorentz-Kraft* ist ihr Einsatz bei der Umsetzung elektrischer Energie in mechanische Arbeit durch Elektromotoren. Darüber hinaus gibt es viele weitere Anwendungen der Ablenkung von Ladungsträgern durch magnetische Felder, z.B. Ablenkung des Elektronenstrahls in Kathodenstrahlröhren (Fernsehbildröhren), Ablenkung von Ionen in Massenspektrographen oder Elektronen in β -Spektrometern (Analyseermagnete), Ablenkung geladener Elementarteilchen in Ringbeschleunigern, *Hall-Effekt* zur Magnetfeldmessung, u.s.w.

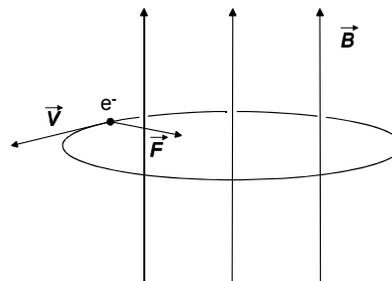


Abb. 1 *Lorentz-Kraft* auf eine negative Ladung (e^-)

Stehen \mathbf{v} und \mathbf{B} senkrecht aufeinander ($\sin(\mathbf{v}, \mathbf{B}) = 1$), und ist das Magnetfeld zeitlich und räumlich gleichbleibend (konstant und homogen), so wirkt die *Lorentz-Kraft* (1) auf die Ladungsträger als konstante Radialkraft senkrecht zur Bewegungsrichtung. Damit ergibt sich eine gleichbleibende Richtungsänderung und als Bahn eine Kreisbahn mit der Radialbeschleunigung v^2/r (Zent-

ripetalbeschleunigung), und nach dem zweiten *Newtonschen Axiom* gilt:

$$(2) \quad Q v B = m \frac{v^2}{r}.$$

Messmethode

In einer großen, kugelförmigen und evakuierten Glasröhre werden freie Elektronen durch Glühemission erzeugt, beschleunigt und durch Ablenkung in einem konstanten Magnetfeld auf eine Kreisbahn gebracht (*Fadenstrahlrohr*, Abb. 2). Die Bahn der Elektronen wird durch eine geringe Menge Wasserstoff als "Restgas" in der Röhre sichtbar gemacht, wobei die Wasserstoffmoleküle durch Zusammenstöße mit den Elektronen optisch angeregt werden. Sie zerfallen anschließend unter Aussendung von Licht, so dass die Bahn der Elektronen als Leuchtspur verfolgt werden kann.

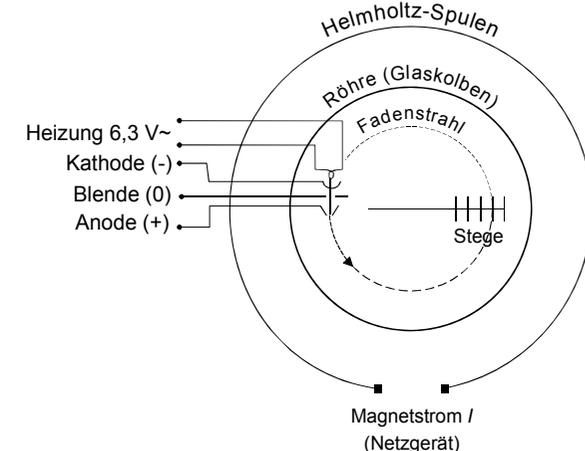


Abb. 2 Prinzipanordnung des Fadenstrahlrohrs (Magnetfeld senkrecht zur Zeichenebene)

Freie Elektronen werden durch thermische Auslösung aus einem Festkörper mit einer Glühkathode erzeugt. Die Beschleunigung der Elektronen auf eine Geschwindigkeit v erfolgt durch ein elektrisches Feld (Spannung U). Durch ein feines Loch in der Beschleunigungselektrode (Anode) können die Elektronen in den freien Raum der Röhre austreten. Nach "Durchlaufen" der Spannung

U (Anodenspannung) besitzt ein Elektron die kinetische Energie:

$$(3) \quad \frac{1}{2} m v^2 = e U .$$

Dabei ist e die Ladung des Elektrons (Elementarladung). Aus (2) und (3) folgt:

$$(4) \quad \frac{e}{m} = \frac{2 U}{r^2 B^2} .$$

Das Magnetfeld B wird durch zwei große, stromdurchflossene Spulen erzeugt, die stirnseitig gegenüber im Abstand ihres Radius aufgestellt sind (*Helmholtz-Spulen*). Für das Feld im Raum zwischen den beiden Spulen gilt (in guter Näherung):

$$(5) \quad B = \mu_0 \sqrt{\frac{64}{125}} \frac{N}{R} I ,$$

wobei μ_0 die magnetische Feldkonstante, N die Windungszahl der Einzelspulen, R deren Radius und I die Stromstärke in den Spulen ist. Der Wert der magnetischen Feldkonstanten beträgt $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am. Die Windungszahl und der Durchmesser der Spulen sind im Platzskript angegeben.

Versuchsdurchführung

Die Beschaltung der Röhre geht aus den Kennzeichnungen am Anschlusssockel und dem zugehörigen Betriebsgerät hervor. Neben der Kathode und der Beschleunigungsanode ist eine Lochblende als weitere Elektrode in dem Elektrodensystem vorhanden, dessen Potential (Spannungsniveau) zwischen der Kathode und der Anode liegt; die Blende dient der Fokussierung des Elektronenstrahls. Bei Inbetriebnahme der Röhre sind sorgfältig die entsprechenden Hinweise im Platzskript zu beachten.

Zum Betrieb der *Helmholtz-Spulen* ist ein Netzgerät vorhanden. Die beiden Spulen müssen mit gleicher Stromrichtung hintereinander geschaltet werden, wobei auf die Bezeichnung an den Anschlussbuchsen der beiden Spulensockel zu achten ist (Netzgerät \rightarrow (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow Netzgerät).

Die Beschleunigungsspannung U (zwischen Kathode und Anode) und der Magnetstrom I werden mit zwei

Digitalmultimetern gemessen. Zur Bestimmung der Elektronenbahnen sind innerhalb der Röhre Markierungsstifte angebracht, durch die feste Durchmesser vorgegeben sind und auf die der Elektronenstrahl nach Einstellen einer Spannung durch Veränderung des Magnetstroms eingestellt werden kann. Die zugehörigen Werte der Durchmesser sind im Platzskript angegeben.

Zur Messung von e/m werden für die beiden größeren Durchmesser Wertepaare von U und I aufgenommen. Es wird empfohlen, mit größtmöglicher Beschleunigungsspannung zu beginnen und Messpunkte in Abständen von etwa 10 V aufzunehmen. Nach (4) und (5) ist:

$$(6) \quad U = \frac{1}{2} \frac{e}{m} r^2 \mu_0^2 \frac{64}{125} \frac{N^2}{R^2} I^2 .$$

Trägt man in einer grafischen Darstellung die Spannung U gegen das Quadrat des Stromes I^2 auf, so sollten sich für beide Durchmesser (Radien r) Nullpunktsgerechten ergeben, aus deren Steigungen die spezifische Ladung e/m berechnet werden kann. Abweichend von dieser theoretischen Erwartung kann (durch Einflüsse der Blenden-Elektrode) bei den Messwerten ein deutlicher Achsenabschnitt auftreten, der für die Steigung der Geraden jedoch ohne Bedeutung bleibt.

Die Fehlergrenzen der verwendeten Multimeter haben in Bezug auf die Messwerte systematischen Charakter. Sie geben an, in welchem Rahmen das einzelne Messgerät zu klein oder zu groß misst, wobei diese Abweichung dann gleichermaßen (gleiche Richtung mit linearem Betrag bei Digitalmultimetern) auf alle Messwerte zutrifft. Bei der Abschätzung einer Grenzgeraden ist zu betrachten, inwieweit dieser systematische Fehler neben der Streuung der Werte zu berücksichtigen ist.

Literaturwert

Der Literaturwert für die spezifische Ladung des Elektrons beträgt $1,758820174(71) \cdot 10^{11}$ C/kg.

POLARIMETRIE

NP

In Chemie und Kristallografie, Biowissenschaften und Medizin und in einer Vielzahl technischer Bereiche wird in Messtechnik und Anwendungen von den Eigenschaften und Erscheinungen polarisierten Lichtes Gebrauch gemacht. Polarimetrische Konzentrationsbestimmungen optisch aktiver Substanzen in Lösungen finden in Chemie, Biologie und Medizin verbreitete Anwendung. Als Beispiele sind die Blutzuckerbestimmung im Harn, die Konzentrationsüberwachung bei der Zuckerproduktion (Saccharimetrie) oder reaktionskinetische Messungen in der Chemie zu nennen. Auch viele Aminosäuren zeigen optische Aktivität und können polarimetrisch nachgewiesen werden. Die Polarisationsmikroskopie ist eine wichtige Methode zur Aufdeckung von Strukturen in transparenten Medien ohne Helligkeits- oder Farbsunterschiede. Das in der Atmosphäre gestreute Sonnenlicht (Himmelsblau) ist teilweise polarisiert, am stärksten senkrecht zur Richtung der Sonnenstrahlen. Es wurde nachgewiesen, dass Bienen mit ihren Facettenaugen die Polarisation des Himmelslichtes erkennen und zur Orientierung verwenden. Der vorliegende Versuch soll eine kurze Einführung in die phänomenologischen Grundlagen der Polarisation geben und praktische Übung der polarimetrischen Konzentrationsbestimmung vermitteln.

Aufgaben

1. (Spezifische Drehwinkel): Bestimmung der spezifischen Drehwinkel $[\alpha]$ von D(-)-Fructose, D(+)-Glucose und Saccharose.
2. (Mischprobe): Quantitative Analyse eines Zuckergemisches.

Physikalische Grundlagen

Polarisation

Man unterscheidet zwei Grundformen von Wellen: *longitudinale* und *transversale* Wellen (Längs- und Querwellen). Bei longitudinalen Wellen haben Auslenkung und Ausbreitung der Welle die gleiche Richtung (Abb. 1). Durch die Welle wird nur eine Raumrichtung, nämlich die Ausbreitungsrichtung, ausgezeichnet. Bei transversalen Wellen stehen Auslenkung und Ausbreitungsrichtung senkrecht aufeinander. Durch beide Richtun-

gen wird eine Ebene ausgezeichnet, die als *Schwingungsebene* der Welle bezeichnet wird.

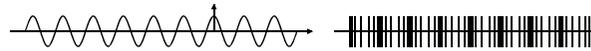


Abb. 1: Transversale und longitudinale Wellen. Nur transversale Wellen lassen sich polarisieren.

Polarisation tritt nur bei Transversalwellen auf. Diese setzen sich im Allgemeinen aus einer Vielzahl von elementaren Wellenzügen zusammen, deren einzelne Schwingungsebenen zufällige Richtungen besitzen. Gibt es jedoch eine bevorzugte Schwingungsebene, so spricht man von einer polarisierten Welle. Die bevorzugte Ebene heißt *Polarisationsebene*, die bevorzugte Schwingungsrichtung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung *Polarisationsrichtung*. Bei der in Abb.1 skizzierten Transversalwelle ist die Polarisationsrichtung die Richtung nach oben und unten und die Polarisationsebene die Ebene des Papiers selbst.

Den Grad der Ausrichtung einer Welle bezeichnet man als *Polarisationsgrad* (haben anschaulich gesprochen z.B. von 100 Wellenzügen 60 die gleiche Schwingungsebene, und sind die anderen 40 zufällig verteilt, so spricht man von einem Polarisationsgrad von 60 %).

Aus den Polarisationserscheinungen folgt, dass Licht eine transversale Welle darstellt. Licht ist eine *elektromagnetische Welle*, wobei ein elektrisches (*E*-) Feld und ein magnetisches (*B*-) Feld die Schwingungsgrößen sind. Bei Licht bezeichnet man Richtung und Größe des *E*-Feldes als Schwingungsrichtung.

Das Polarisationsverhalten des Lichtes wird in vielfältigen Anwendungen ausgenutzt. Als Beispiele werden bei diesem Versuch Konzentrationsmessungen an *optisch aktiven* Substanzen durchgeführt und qualitativ *spannungsoptische Untersuchungsmethoden* und die *Polarisationsmikroskopie* behandelt.

Lineare und zirkulare Polarisation

Eine Welle mit einer feststehenden Polarisationsebene bezeichnet man als *linear polarisiert*. Überlagern sich zwei (oder mehrere) elementare Wellenzüge mit verschiedenen Schwingungsebenen, so überlagern sich ihre Auslenkungen, bei Licht also ihre *E*-Felder, die vektoriell zu addieren sind.

Für zwei Wellenzüge, deren Schwingungsebenen senkrecht aufeinander stehen, sind je nach Phasenlage verschiedene Formen der Polarisation der resultierenden Welle möglich. Sind beide Wellenzüge gleichphasig (Phasendifferenz 0) oder genau gegenphasig (Phasendifferenz π rad = 180 Grad), so ist der resultierende *E*-Feldvektor räumlich fest in der Mittellage zwischen *E*₁ und *E*₂ ausgerichtet. Das Ergebnis ist wieder eine linear polarisierte Welle (Abb. 2).

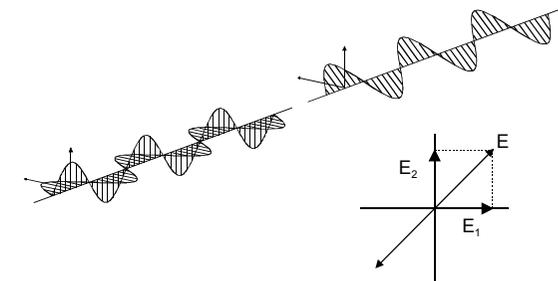


Abb. 2 Vektoraddition von Wellenzügen zu linearer Polarisation bei Phasendifferenz 0 (oder π)

Sind zwei Wellenzüge gleicher Amplitude gerade um ein Viertel einer Wellenlänge gegeneinander verschoben (Phasenverschiebung $\pi/2$), so bleibt die Größe des resultierenden *E*-Feldes zwar immer gleich, aber die Richtung kreist gleichförmig um die Ausbreitungsrichtung. Man erhält eine *zirkular polarisierte* Welle. Die Verhältnisse entsprechen der Zusammensetzung einer Kreisbewegung aus zwei zueinander senkrechten, harmonischen Schwingungen (Abb. 3).

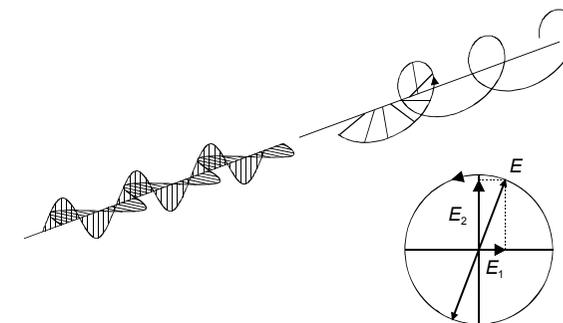


Abb. 3 Vektoraddition von Wellenzügen zu zirkularer Polarisation bei Phasendifferenz $\pm \pi/2$

Im allgemeinen Fall sind neben unterschiedlichen Phasenlagen auch die Amplituden verschieden, wodurch sich sowohl die Raumrichtung als auch die Größe des resultierenden E -Feldvektors periodisch ändern und man *elliptisch polarisierte* Wellen erhält.

Anisotropie

Ein Medium heißt *isotrop*, wenn in ihm keine Raumrichtung in besonderer Weise ausgezeichnet ist. Anisotrope Stoffe dagegen besitzen, bedingt durch ihre Struktur, in verschiedenen Raumrichtungen unterschiedliche Eigenschaften, was bei optischen Erscheinungen z.B. zu *Doppelbrechung* und *Dichroismus* führt.

Doppelbrechung und Spannungsoptik

Bei anisotropen Kristallen kann die Lichtgeschwindigkeit, d.h. der Brechungsindex, von der Ausbreitungsrichtung und der Polarisationsrichtung des Lichtes abhängig sein. Man spricht von *doppelbrechenden* Kristallen oder natürlicher Doppelbrechung (Beispiel Kalkspat). Das führt dazu, dass einfallende Lichtstrahlen an der Grenzfläche des Kristalls je nach Schwingungsrichtung unterschiedlich gebrochen und so in zwei Teilbündel aufgespalten werden, die senkrecht zueinander linear polarisiert sind.

Diesen Effekt nutzt man zur Erzeugung polarisierten Lichtes beim *Nicolschen Prisma* aus. Die beiden Teilbündel werden an einer geeignet geneigten Grenzfläche im Prisma dadurch getrennt, dass das eine Bündel gerade noch (unter Brechung) die Fläche durchsetzt, während das andere auf Grund des flacheren Einfallswinkels durch *Totalreflexion* in eine andere Richtung abgelenkt wird (Abb.4).

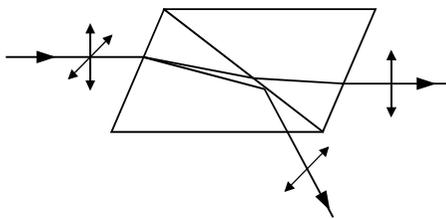


Abb. 4 Polarisation durch ein *Nicolsches Prisma*

In Substanzen mit langen Molekülketten, wie z.B. Plastikmaterial, kann eine Anisotropie, und damit eine Doppelbrechung, durch mechanische Spannungen verursacht werden (Spannungsdoppelbrechung). Die dadurch hervorgerufenen Polarisationserscheinungen können zur Untersuchung von mechanischen Spannungszuständen herangezogen werden (Spannungsoptik).

Dichroismus

Ein optisch durchsichtiges Medium, das aber Licht eines bestimmten Wellenlängenbereichs absorbiert, erscheint aus diesem Grund bei Betrachtung in weißem Licht farbig. Bei farbigen, optisch doppelbrechenden Kristallen ist die Lage des Absorptionsbereiches (Absorptionswellenlängen) von der Ausbreitungsrichtung im Kristall und der Schwingungsebene des Lichtes abhängig. Man bezeichnet dieses Verhalten als *Dichroismus*. Dichroitische Kristalle sind zur Erzeugung polarisierten Lichtes im Sichtbaren geeignet, wenn ihre Absorptionswellenlängen für die eine Polarisationssebene bevorzugt im sichtbaren und für die dazu senkrechte Polarisationssebene bevorzugt in den nicht sichtbaren Bereichen des optischen Spektrums liegen (ultraviolett, infrarot). Auf diesem Prinzip beruht die Wirkung von Polarisationsfolien (*Polaroidfilter*). Kleine, dichroitische Kristalle werden in eine Kunststoffolie eingebettet und durch mechanisches Recken in eine Vorzugsrichtung gebracht. Durch die Vorzugsrichtung erhält man eine gemeinsame Polarisationssebene für das von den einzelnen Kristalliten erzeugte polarisierte Licht.

Optische Aktivität und Konzentrationsmessung

Bestimmte Substanzen sind in der Lage, die Schwingungsebene linear polarisierten Lichtes zu drehen. Man bezeichnet dieses Verhalten als *optische Aktivität*. Bei der Kennzeichnung von Substanzen unterscheidet man zwischen dem Drehsinn und der Konfiguration des Moleküls. Der Drehsinn wird positiv (+) genannt, wenn er bei Beobachtung gegen die Richtung des Lichtes im Uhrzeigersinn (rechtsherum) erfolgt. Mit dem Vorsatz D und L werden die spiegelsymmetrischen, räumlichen Anordnungen der Moleküle bezeichnet.

Die Drehung der Polarisationssebene kann durch zirkuläre Doppelbrechung erklärt werden. Das linear polarisierte Licht wird in eine rechts- und eine linkslaufende zirkuläre

komponente zerlegt, wobei sich aufgrund der unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten beider Komponenten eine Phasenverschiebung ergibt, die bei der (Rück-) Überlagerung der Komponenten zu einer Drehung der Polarisationssebene führt.

Optische Aktivität wird bei bestimmten Kristallen (z.B. Quarz) und Lösungen bestimmter Verbindungen beobachtet. Insbesondere sind alle Lösungen organischer Verbindungen optisch aktiv, die ein sogenanntes *asymmetrisches C-Atom* (mit * in Abb. 5 markiert) besitzen, d.h. an dessen vier Bindungsarmen vier unterschiedliche Liganden gebunden sind. In diesem Fall sind zwei verschiedene räumliche Anordnungen des Moleküls möglich, die spiegelsymmetrisch zueinander sind und sich nicht durch räumliche Transformationen zur Deckung bringen lassen. Man spricht von *Spiegelbildisomerie* und nennt die beiden Isomere *Antipoden*. Eine optisch aktive Verbindung ist die Milchsäure. Abb. 5 zeigt als Beispiel die Valenzstrichformel der Milchsäure.

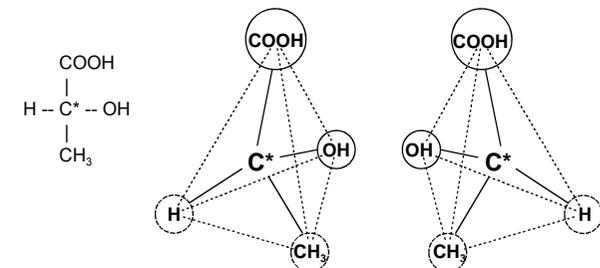


Abb 5 Milchsäuremolekül

Weitere Beispiele optisch aktiver Verbindungen sind die Zucker, einige Verbindungen des Zitronensäurezyklus und viele Enzyme.

Ein Gemisch beider Antipoden, das nach außen keine optische Aktivität zeigt, wird als *Razemat* bezeichnet.

Polarisationsmikroskopie

In der Kristallografie, Biologie und Medizin sind häufig Objekte zu untersuchen, deren Strukturen sich nur durch Unterschiede im Brechungsindex auszeichnen, nicht aber durch unterschiedliches Absorptionsverhalten (Farbe, Helligkeit). Bei Betrachtung in normalem Licht sind diese Objekte gleichmäßig durchlässig und Struk-

turen damit nicht erkennbar. Oft haben die Proben jedoch anisotropen Charakter, so dass viele Kristalle, Muskelzellen und kleine, vielzellige Organismen doppelbrechend sind. Beleuchtet man derartige Objekte mit linear polarisiertem Licht und bringt vor das Okular einen Analysator, so ergeben sich aufgrund der Anisotropie deutliche Intensitäts- und Farbkontraste ähnlich wie bei der Spannungsoptik.

Versuchsdurchführung

Den prinzipiellen Aufbau eines Polarimeters zur Polarisationsuntersuchung zeigt Abb. 6. Es besteht aus einer Lichtquelle, einem Polarisator zur Erzeugung polarisierten Lichtes, der Probe und einem Analysator zur Feststellung des Polarisationszustandes hinter der Probe.

Grundsätzlich könnte am Analysator auf maximale Helligkeit oder Dunkelheit eingestellt werden, wobei es jedoch subjektiv schwer ist, auf den jeweiligen Extremwert einzustellen. Üblich sind deshalb *Halbschatteneinrichtungen*, bei denen der Analysator aus zwei Hälften besteht, deren Polarisationsrichtungen leicht gegeneinander geneigt sind.

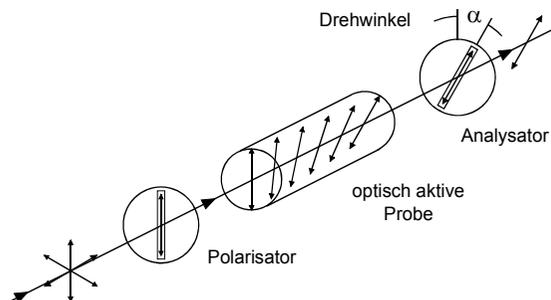


Abb. 6 Prinzip eines Polarimeters

Liegt die Polarisationsebene des Lichtes genau in der Mitte zwischen beiden Richtungen, so erscheinen beide Hälften gleich hell. Diese Stellung kann durch direkten Vergleich sehr genau eingestellt werden, wobei aus messtechnischen bzw. physiologischen Gründen (höhere Empfindlichkeit gegenüber kleinen Unterschieden) jeweils auf *minimale Helligkeit* eingestellt wird, bei der Halbschatteneinrichtung also auf gleiche, möglichst geringe Helligkeit der beiden Gesichtsfeldhälften. Oft ist der Drehwinkel einer Probe von der Wellenlänge des

Lichtes abhängig, so dass an dem Polarimeter monochromatisches Licht verwendet werden muss.

Nullpunktlage

Durch mechanische Dejustierung kann die Nulllage der Polarimeter gegenüber dem Skalennullpunkt verschoben sein. Vor Beginn der Messungen muss daher ohne Probe der Nullpunkt der Polarimeter festgestellt und protokolliert werden.

Zu Aufgabe 1 (Spezifische Drehwinkel)

Der Drehwinkel optisch aktiver Lösungen ist der Massenkonzentration c (Masse pro Volumen Lösung) und der durchstrahlten Länge ℓ der Probe proportional:

$$(1) \quad \alpha = [\alpha]_{\lambda}^T \ell c .$$

Der Proportionalitätsfaktor $[\alpha]$ ist der spezifische Drehwinkel (die Bezeichnung durch eckige Klammern ist wegen deren Bedeutung zur Kennzeichnung der Einheit einer Größe unglücklich, aber in der Polarimetrie gebräuchlich). Die Zusätze T und λ deuten die Temperatur- und Wellenlängenabhängigkeit an. Am Versuchsort sind Proben unterschiedlicher Konzentration zur Messung der Abhängigkeit (1) vorhanden. Die Ergebnisse werden grafisch dargestellt, und die spezifischen Drehwinkel aus den Steigungen der jeweils erwarteten Geraden entnommen. (Hinweis zum Vergleich mit Literaturwerten: In der Polarimetrie werden spezifische Drehwinkel oft in der Einheit Grad pro g/ml und Dezime angegeben):

$$[\alpha] = 1 \frac{\text{Grad}}{\frac{\text{g}}{\text{ml}} \text{ dm}} .$$

Bei der Protokollierung der Messdaten ist auf eine eindeutige Kennzeichnung der Drehrichtung zu achten (links/rechts).

Zu Aufgabe 2 (Mischprobe)

Es ist eine Zuckerprobe aus zwei Komponenten vorhanden, deren Gesamtkonzentration c bekannt ist. Unter der Voraussetzung, dass die beiden Komponenten ihre spezifische Eigendrehung beibehalten, gilt für den Gesamtdrehwinkel α :

$$(2) \quad \alpha = [\alpha_1] \ell c_1 + [\alpha_2] \ell c_2 \quad \text{und} \quad c_1 + c_2 = c .$$

Aus den zwei Gleichungen können nach Messung des Gesamtdrehwinkels und bei bekannten spezifischen Drehwinkeln die gesuchten Konzentrationen c_1 und c_2 berechnet werden.

MIKROSKOP

NP

Einleitung

Das Sehen ist die womöglich leistungsfähigste, komplexeste und auch eindruckvollste unserer Sinneswahrnehmungen, die ein unmittelbares Erkennen und Verstehen von Situationen, Sachzusammenhängen und Umständen möglich macht. "Ein Bild sagt mehr als tausend Worte", sagt eine chinesische Spruchweisheit, was auch in Wortzusammenhängen wie "anschaulich" und "sich ein Bild von der Sache machen" zum Ausdruck kommt.

Unter einem klassischen, optischen Bild versteht man eine in eine Ebene projizierte Darstellung eines Gegenstandes durch ein optisches System, die die geometrische Struktur und das farbliche Aussehen des Gegenstandes wiedergibt. In den modernen Wissenschaften werden die Begriffe Bild und Bildgewinnung darüber hinaus für alle Methoden verwandt, mit denen Naturerscheinungen für das Auge erfassbar gemacht werden. Sei es, dass die zu beobachtenden Strukturen sehr klein und Licht zum "Abtasten" zu grob ist, so dass die Strukturen im Licht kein klassisches Bild mehr erzeugen und auch kein klassisches "Aussehen" mehr besitzen ("Ultramikroskope", wie Elektronenmikroskop, Tunnel-Mikroskop), oder dass die Untersuchungsgegenstände optisch unzugänglich sind (Bildgewinnung aus Organismen).

Strukturen von Gegenständen kleiner als etwa 0.02 mm können vom menschlichen Auge nicht mehr erkannt werden. Zur vergrößernden Betrachtung solcher Gegenstände wird als optisches Instrument eine Lupe oder ein Mikroskop eingesetzt. In beiden Fällen wird auf der Netzhaut (Retina) des Auges ein gegenüber der Betrachtung ohne Instrument vergrößertes Bild erzeugt. Mikroskope werden im medizinischen Labor zur Darstellung kleiner Strukturen wie Zellen oder Zellorganellen, zur Untersuchung ihrer physiologischen Funktion oder pathologischen Veränderungen benutzt. Auch Bakterien als bestimmte Krankheitserreger können noch mit Hilfe eines Lichtmikroskops identifiziert werden. Um bestimmte Strukturen sehen zu können, werden in der Regel bestimmte Färbemethoden verwendet. Strukturen kleiner als etwa 300 nm und damit kleiner als etwa eine halbe Wellenlänge des beleuchtenden Lichts können lichtmikroskopisch nicht mehr aufgelöst werden.

Für die Sichtbarmachung noch kleinerer Strukturen wie beispielsweise Viren dient das Elektronenmikroskop.

Trotz aller modernen Entwicklungen gehört das klassische Licht-Mikroskop weiterhin zu den wichtigen und elementaren Arbeitsgeräten der Naturwissenschaften und besonders der Biowissenschaften zur Herstellung von Bildern "kleiner" Objekte und "feiner" Strukturen. Der vorliegende Versuch soll die grundsätzliche Funktionsweise des Mikroskops und die durch Beugungsercheinungen bedingte Begrenzung des Auflösungsvermögens und der Vergrößerungsmöglichkeiten mit Licht vermitteln.

1 Aufgaben

- (Mikroskopischer Strahlengang): Aufbau eines einfachen Mikroskops aus einer Objektivlinse und einer Okularlinse auf einer optischen Bank. Experimentelle Bestimmung der Vergrößerung für drei verschiedene Tubuslängen ($t = 100$ mm, 150 mm und 200 mm) und Vergleich der Ergebnisse mit den theoretisch erwarteten Werten.
- (Okularmikrometer): Einsetzen einer Skala in die Zwischenbildebene des Mikroskops als Okularmikrometer (Messokular). Kalibrierung des Messokulars und Bestimmung des Linienabstandes eines Kreuzgitters (Gitterkonstante).
- (Auflösungsgrenze): Beobachtung der Auflösungsgrenze des Mikroskops an dem Kreuzgitter und Bestimmung der numerischen Apertur des Objektivs für diesen Grenzfall. Berechnung des damit auflösbaren kleinsten Punktabstandes nach der Abbeschen Beugungstheorie und Vergleich mit der tatsächlichen Gitterkonstante.
- (Rechenaufgabe Auflösungsvermögen des menschlichen Auges): Berechnen Sie aus einer Pupillenöffnung von 4 mm den kleinsten auflösbaren Punktabstand in deutlicher Sehweite und daraus den minimalen Sehwinkel. Bestimmen Sie weiterhin eine sinnvolle Zäpfchendichte im Gelben Fleck auf der Retina. Vergleichen Sie mit Literaturwerten (im Text dieses Skripts).

2 Physikalische Grundlagen

Voraussetzungen für das Verständnis der Versuchsdurchführung sind gute Kenntnisse über die Abbildungseigenschaften *dünnere Linsen* (Brechung durch

Linsen und Brennpunkteigenschaft: Definition von Brennpunkt und Brennweite; Abbildungen: Konstruktion von Abbildungen, reelle und virtuelle Bilder, Abbildungsgleichung, Vergrößerung und Verkleinerung, Abbildungsmaßstab) (Demtröder: *Experimentalphysik 2*, Springer-Verlag).

2.1 Optische Systeme

Optische Linsensysteme liefern Abbildungen von Objekten. Schematisch können Abbildungen durch Strahlengänge konstruiert werden: Ein von einem Objektpunkt ausgehender, parallel zur optischen Achse (Symmetrieachse) des Systems verlaufender Strahl (**Parallelstrahl**) wird beim Durchgang durch eine Sammellinse derart gebrochen, dass er auf der anderen Seite durch deren Brennpunkt geht (**Brennstrahl**). Umgekehrt wird ein Brennstrahl so gebrochen, dass er zum Parallelstrahl wird. Ein Strahl durch den Linsenmittelpunkt (**Mittelpunktstrahl**) geht ungebrochen weiter. Diese Konstruktionsvorschrift gilt streng genommen nur für dünne Linsen, d.h. Linsen mit einer Dicke, welche klein gegenüber ihren Krümmungsradien ist, und nur für nahe der optischen Achse verlaufende Strahlen. Für dicke Linsen, achsenferne Strahlen und bei Verwendung von aus verschiedenen Wellenlängen gemischtem (z.B. weißem) Licht treten Abweichungen von der oben geschilderten strahlenoptischen Abbildung auf, die sogenannten Abbildungsfehler. Diese Abbildungsfehler können durch entsprechende geometrische Korrekturen der Linse oder Kombination mehrerer Linsen zwar vermindert, aber nie ganz ausgeschaltet werden.

Das Abbildungsverhalten eines entsprechend korrigierten Linsensystems wird einfach beschrieben durch die **Abbildungsgleichung**

$$(1) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

mit Brennweite f , Gegenstandsweite g und Bildweite b . Aus geometrischen Überlegungen lässt sich aus Abb. 1 direkt die Beziehung

$$(2) \quad \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

angeben, mit welcher der **Abbildungsmaßstab**, der als das Verhältnis von Bildgröße B zu Gegenstandsgröße

G definiert ist, durch den Quotienten aus Bildweite und Gegenstandsweite ausgedrückt werden kann.

2.2 Menschliches Auge

Beim menschlichen Auge ist die Bildweite durch die Abmessung des Augenkörpers zu ca. 22 mm vorgegeben und die Gegenstandsweite liegt durch die Entfernung des Gegenstands von der Augenlinse fest. Um ein scharfes Bild des Gegenstands auf der Retina zu erhalten, wird die Brennweite der Augenlinse so verändert, dass die obige Abbildungsgleichung erfüllt ist. Dieser Vorgang heißt **Akkommodation** und er geschieht durch die Veränderung der Linsenkrümmung durch die Ziliarmuskeln. Wird der zu betrachtende Gegenstand näher an das Auge herangeführt, so wird auch sein Bild auf der Retina größer (Abb. 1). Die minimale, noch zu einer Abbildung führende Entfernung vom Auge beträgt circa 5 cm. Für noch kleinere Entfernungen reicht das Krümmungsvermögen der Augenlinse nicht mehr zur Erzeugung eines scharfen Bildes auf der Retina aus. Die Betrachtung bei derart kleinen Entfernungen ist allerdings sehr anstrengend; ermüdungsfrei können von den meisten Augen Gegenstände in einer Entfernung von etwa 25 cm betrachtet werden. Diese Entfernung bezeichnet man als **deutliche Sehweite** s_0 .

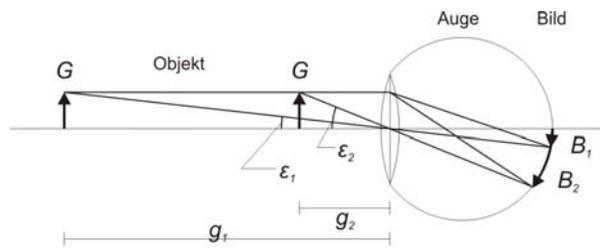


Abb. 1: Zur Definition des Sehwinkels ε .

Die Vergrößerung eines optischen Instruments wäre eigentlich das Verhältnis der Größe des Gegenstandsbildes auf der Retina unter Verwendung des Instruments zur Größe des Gegenstandsbildes auf der Retina, wenn sich der Gegenstand ohne Instrument in einer Bezugsentfernung, welche zu s_0 gewählt wird, befände. Da die Größenbestimmung von Bildern auf der Retina praktisch nicht möglich ist, definiert man die Vergrößerung über die **Sehwinkel** ε , d. h. die Winkel, unter denen die Endstrahlen des Gegenstandes durch den Mittelpunkt der Augenlinse verlaufen. Da diese Mittelpunktstrahlen ja nicht gebrochen werden, sind die Seh-

winkel stets proportional zur Bildgröße auf der Retina. Die **Sehwinkelvergrößerung** Γ ist dann definiert als

$$(3) \quad \Gamma = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_0}.$$

Hierbei ist ε der Sehwinkel des Gegenstands mit Instrument und ε_0 der Sehwinkel, unter dem der Gegenstand in einer Entfernung s_0 dem Auge ohne Instrument erscheinen würde (siehe auch Abb. 2). Die Näherung gilt für kleine Winkel, was bei den hier diskutierten Problemen praktisch immer erfüllt ist, und wird für weitere Berechnungen benötigt. Die Sehwinkelvergrößerung ist im Allgemeinen nicht dasselbe wie der Abbildungsmaßstab.

Um feine Strukturen eines Gegenstands noch erkennbar machen zu können, muss sein Bild zumindest noch einige lichtempfindliche Elemente auf der Retina überdecken. Die Grenze für die Erkennung von Strukturen ist damit durch die Packungsdichte der Zapfen gegeben, die im Gelben Fleck (fovea centralis) mit ca. 14000/mm² am größten ist. Zwei Gegenstandspunkte können dann noch getrennt wahrgenommen werden, wenn die von ihnen gezogenen Mittelpunktstrahlen einen Winkel von mindestens 1' einschließen, was einem Mindestabstand von 70 μ m in deutlicher Sehweite entspricht.

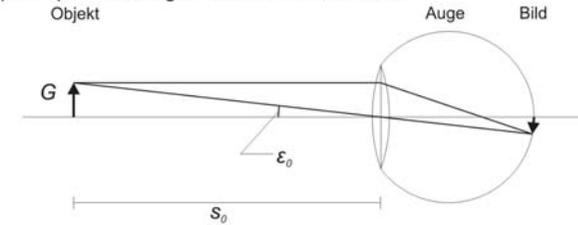
1.2.3 Lupe

Eine Lupe ist eine Sammellinse, die derart zwischen Auge und Gegenstand gehalten wird, dass dieser innerhalb der Brennweite f bzw. in der Brennebene ($g = f$) dieser Sammellinse liegt. Aus einfachen, der Abb. 2 entnehmbaren, geometrischen Beziehungen folgt

$$(4) \quad \Gamma_{\text{Lupe}} = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_0} = \frac{G/g}{G/s_0} = \frac{s_0}{f}.$$

D. h. die Sehwinkelvergrößerung Γ_{Lupe} hängt nur von der Brennweite der Lupenlinse ab. Wird diese Brennweite kleiner als 1 cm, so werden die oben erwähnten Abbildungsfehler zu groß. Dadurch liegt die maximal ausnutzbare Lupenvergrößerung bei etwa 25.

a) Entspanntes Auge in deutlicher Sehweite



b) Betrachtung mit Lupe, Auge auf unendlich akkommodiert

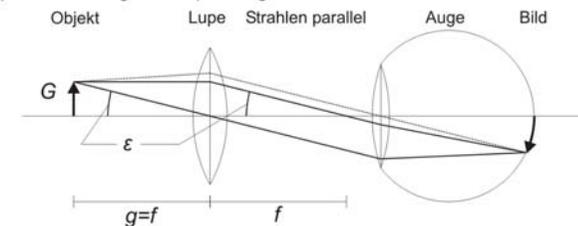


Abb. 2: Zur Sehwinkelvergrößerung bei Betrachtung durch eine Lupe.

2.4 Mikroskop

Das Mikroskop besteht im Prinzip aus zwei Sammellinsen, einer Projektionslinse (**Objektiv**) und einer Lupe (**Okular**). Das Objekt befindet sich zwischen einfacher und doppelter Brennweite des Objektivs, so dass an einer festliegenden Stelle im Tubus (Rohr, welches die Linsen trägt) des Mikroskops ein reelles, umgekehrtes, vergrößertes Zwischenbild des Objekts entsteht. Das Zwischenbild wird mit dem Okular als Lupe betrachtet. Das Bild wird scharf gestellt, indem durch Heben oder Senken des Tubus die Gegenstandsweite g zwischen Objekt und Objektiv verändert wird. Die Größen f und b sind dabei durch Objektiv bzw. **Tubuslänge** t (Abstand zwischen den innenliegenden Brennpunkten) fest vorgegeben (Abb. 3).

Die Gesamtvergrößerung des Mikroskops lässt sich wie folgt berechnen:

$$(5) \quad \Gamma_{\text{Mik}} = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_0} = \frac{B/f_2}{G/s_0} = \frac{B}{G} \times \frac{s_0}{f_2} = \frac{t}{f_1} \times \frac{s_0}{f_2}.$$

Das zweite Gleichheitszeichen rechtfertigt sich aus dem fein gestrichelten Dreieck in Abb. 3 und das letzte aus dem grob gestrichelten Strahlensatz. Gleichzeitig lässt sich ablesen, dass die Gesamtvergrößerung des Mikro-

skops das Produkt von Objektiv- und Okularvergrößerung ist:

$$(6) \quad \Gamma_{\text{Mik}} = \Gamma_1 \times \Gamma_2,$$

wobei Γ_1 durch den Abbildungsmaßstab B / G und Γ_2 durch die Lupenvergrößerung s_0 / f_2 gegeben sind. Beide Angaben sind bei handelsüblichen Linsensystemen auf den jeweiligen Fassungen eingraviert. In der Praxis werden Objektive mit Vergrößerungen von 1 (Übersichtsbetrachtungen des Präparats) bis 100 (i. A. mit Öl-Immersion, s.u.) und Okulare mit 5- bis 25-facher Vergrößerung eingesetzt.

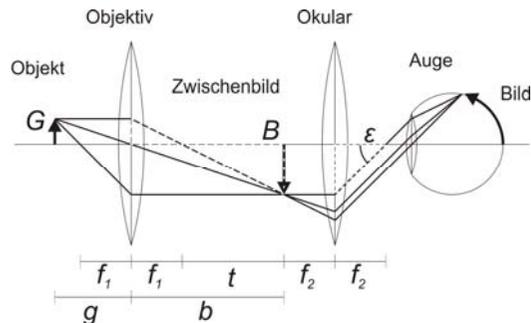


Abb. 3: Grundprinzip des Strahlengangs im Mikroskop.

2.5 Auflösungsvermögen des Objektivs, Abbesche Theorie der Abbildung

Nach den erläuterten Regeln der bislang betrachteten geometrischen Optik wäre dem Auflösungsvermögen eines Mikroskops keine Grenze gesetzt. Allerdings lassen sich die Regeln dieser Strahlenoptik nicht mehr kritiklos bei der Bildkonstruktion von Objekten verwenden, deren Größe im Bereich der Wellenlänge des verwendeten Lichtes liegt. Bei derart kleinen Objekten können bei der Betrachtung der Strahlengänge die beiden für Wellenausbreitung typischen Erscheinungen von Beugung und Interferenz nicht mehr vernachlässigt werden. Beleuchtet man beispielsweise einen Doppelspalt mit Spaltabstand $d = 500 \text{ nm}$ mit parallelem Licht einer einzigen Wellenlänge λ und fängt das Licht hinter dem Spalt auf einem Schirm auf, so sieht man das sogenannte Beugungsbild des Spaltes: Der zentrale Lichtstreifen als "Beugungsmaximum nullter Ordnung" der Intensität I_0 ist von parallelen, rasch dunkler werdenden zusätzlichen Lichtstreifen, den "Beugungsmaxima $\pm m$. Ordnung" der Intensitäten $I_{\pm m}$ begleitet, wobei

m natürliche Zahlen sind. Diese hellen Streifen sind durch dunkle Streifen getrennt. Die Winkel θ_m zwischen diesen gebeugten Lichtstrahlen und der Einfallrichtung hängt von der Spaltbreite und der Wellenlänge des verwendeten (monochromatischen) Lichtes ab:

$$(7) \quad d \times \sin \theta_m = m \lambda.$$

Diese Gleichung lässt sich anhand des **Huygens'schen Prinzips** (s. Abb. 4) verstehen, nach dem jeder Punkt einer Wellenfront Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle (Kugelwelle) ist, welche in der Folge interferieren und sich überlagern additiv (**Superpositionsprinzip**). Trifft ein Wellenberg (positive Amplitude) auf den Wellenberg einer anderen Elementarwelle, verstärken sich die Intensitäten. Trifft ein Wellenberg auf ein Wellental (negative Amplitude), löschen sich die Wellen aus. Die Bedingung für das Auftreten eines Intensitätsmaximums auf dem Schirm ist also, dass der Gangunterschied der Strahlen aus den beiden Spalten, $\Delta s = d \sin \theta$, gleich einem Vielfachen der Wellenlänge sein muss. Daraus folgt Gleichung (7).

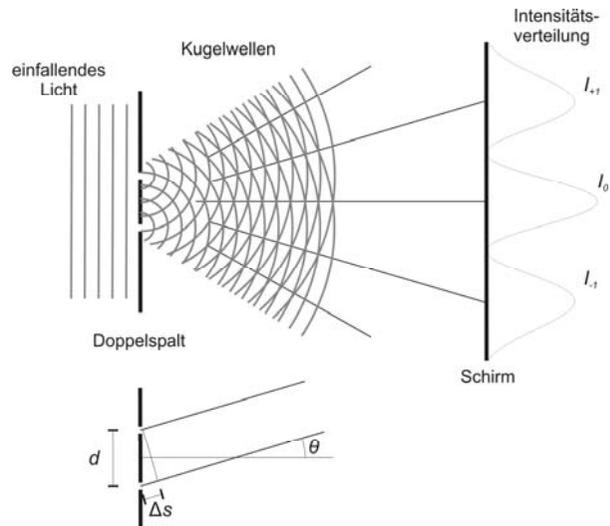


Abb. 4 Zum Huygens'schen Prinzip und zur Berechnung des Gangunterschieds interferierender Strahlen.

Wird nun das Licht verschiedener Beugungsordnungen durch eine Linse wieder gesammelt, so ergibt sich die Lichtverteilung im Bild des Gegenstands durch die Interferenz der verschiedenen Beugungsordnungen. Eine genauere Betrachtung (Ernst Abbe um 1870) ergibt,

dass neben der nullten Ordnung wenigstens noch die erste Beugungsordnung in die Linse eintreten muss, damit überhaupt statt einer gleichmäßig hellen Fläche ein Bild entsteht (Abb. 5).

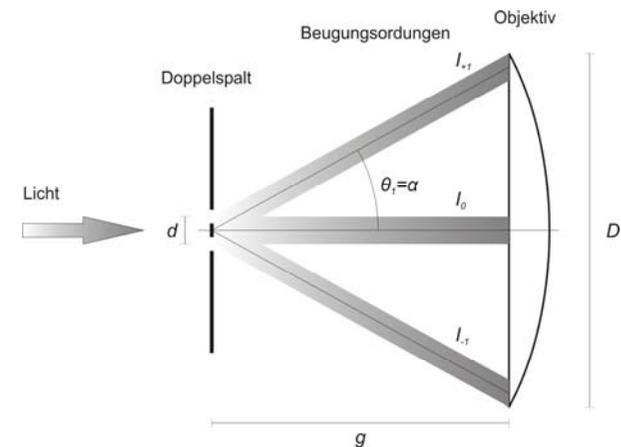


Abb. 5: Zur Abbeschen Theorie der Bildentstehung.

Dies bedeutet, dass der Ablenkwinkel der ersten Beugungsordnung kleiner gleich dem Öffnungswinkel α der Objektivlinse sein muss, also $\theta_m \leq \alpha$, was mit (7) auf

$$(8) \quad d \leq \frac{\lambda}{\sin \alpha}$$

führt. Dabei ist der Öffnungswinkel der Linse durch den Linsendurchmesser D und die Gegenstandsweite bestimmt:

$$(9) \quad \tan \alpha = \frac{D/2}{g}.$$

Bei gegebener Linsenöffnung α , Wellenlänge λ und Brechzahl n ist also der auflösbare Spaltabstand d nach unten begrenzt. Um möglichst kleine Objekte erkennen zu können, wird zwischen Objekt und Objektiv eine Immersionsflüssigkeit mit der Brechzahl n eingebracht, wodurch sich die Wellenlänge auf λ/n verkleinert. Mit der Definition der **Numerischen Apertur** $N = n \sin \alpha$ (welche auf Objektiven angegeben ist) lässt sich deshalb schreiben:

$$(10) \quad d_{\text{min}} = \frac{\lambda}{N},$$

worin d_{\min} der kleinste noch auflösbare Abstand ist.

Das Auflösungsvermögen $1/d$ kann durch Vergrößerung der Apertur N und durch Verkleinerung der Wellenlänge λ gesteigert werden. Im Prinzip wird letztere Möglichkeit beim Elektronenmikroskop benutzt, da das Elektron eine gegenüber dem sichtbaren Licht viel kleinere Wellenlänge hat.

2.6 Förderliche Vergrößerung

Liegt die Vergrößerung eines Mikroskops unter etwa $\Gamma_{\min} = 500 N$, so ist die Abbildung des durch das Objektiv erzeugten reellen Bildes auf der Retina des Auges zu klein als dass alle vom Objektiv her noch unterscheidbaren Strukturen aufgelöst werden können. In diesem Fall ist die vom Okular als Lupe erzeugte Vergrößerung zu klein und man kann durch Verwendung eines stärkeren Okulars weitere Objektdetails unterscheiden. Umgekehrt erscheinen Objektteile unscharf, wenn die Gesamtvergrößerung mehr als etwa $\Gamma_{\max} = 1000 N$ beträgt, da dann durch das Objektiv nicht mehr aufgelöste Details auf der Retina zu große Bereiche überdecken. Der Begriff der „förderlichen Vergrößerung“ nimmt also auf die physiologisch bedingte Auflösungsgrenze des Auges Bezug: Gegeben werden hier die Grenzen eines durch die Angabe der Numerischen Apertur N charakterisierten Objektivs im Bereich

$$(11) \quad 500N \leq \Gamma \leq 1000N.$$

Stärkste Immersionsobjektive haben eine numerische Apertur von etwa 1,4. Daraus lässt sich die förderliche Vergrößerung optischer Mikroskope bei einer mittleren Lichtwellenlänge von $\lambda = 550 \text{ nm}$ berechnen. Andersherum lassen sich mit (1.11) die Herstellerangaben von manchmal bis zu 1000-facher Vergrößerung bei einfachen Mikroskopen als wenig sinnvoll einstufen, da diese die beugungsbedingte Auflösungsgrenze ignorieren.

Zusammenfassend sei angemerkt, dass den Betrachtungen zum Auflösungsvermögen insgesamt Näherungen zugrunde liegen, so dass die abgeleiteten Ergebnisse den Charakter einer Abschätzung haben. Die praktisch erreichbare Auflösungsgrenze hängt über diese Überlegungen hinaus von den gesamten vorliegenden Abbildungsbedingungen und zusätzlich von physiologischen Faktoren des Beobachters ab. So haben z.B. große Linsen beugungstheoretisch ein gutes Auflösungsvermögen, ihre praktischen Qualitäten wer-

den aber durch sogenannte Abbildungsfehler stark beeinträchtigt.

2.8 Quantitative Messung an mikroskopischen Präparaten

Biologische Strukturen lassen sich mit Hilfe entsprechender Färbemethoden durch die spezifische Färbung qualitativ unterscheiden.

Quantitativ lassen sich vor allem Längen messen, wenn eine Eichung des optischen Systems vorgenommen wurde. Zur Eichung verwendet man ein Präparat mit konstanten Abschnitten (beispielsweise $10 \mu\text{m}$). Durch Vergleich mit einer beliebigen Skala am Ort des Zwischenbildes, dem **Okularmikrometer**, kann das Okular geeicht werden. Natürlich muss diese Eichung für jedes Objektiv getrennt vorgenommen werden.

Für diese Eichung lässt sich ein Umrechnungsfaktor γ mit der Dimension $[\gamma] = \mu\text{m}/\text{Skt}$ einführen, so dass sich der Messwert in μm als Produkt aus γ und dem Ableswert in Skalenteilen (Skt) berechnen lässt.

3 Versuchsdurchführung

Zur Versuchsdurchführung wird aus sehr einfachen optischen Komponenten (einfache Sammellinsen als Objektiv und Okular) auf einer optischen Bank (Dreikantschiene) ein mikroskopischer Strahlengang selbständig aufgebaut. Das so realisierte „offene“ Mikroskop hat im Vergleich zu kommerziellen Geräten zwar sehr schlechte und unkomfortable Abbildungseigenschaften, aber es ermöglicht einen anschaulichen und verständnisfördernden experimentellen Umgang mit der Apparatur. Auf der anderen Seite ergeben sich dadurch zum Teil schwierigere Messbedingungen, und es kann nicht die sonst im Praktikum übliche Messgenauigkeit erreicht werden.

Folgende optische Komponenten sind vorhanden:

- Zwei Linsen ($f = (40 \pm 1) \text{ mm}$),
- Blendenscheibe zum Abblenden des Objektivs,
- eine μm -Skala auf Glasträger ($10 \mu\text{m}$ –Teilung) als Okularmikrometer,
- eine halbdurchlässige Glasplatte zum Einspiegeln einer Vergleichsskala,
- ein Kreuzgitter (Drahtnetz) und
- zwei beleuchtete Skalen (mm-Teilung).

Zu Aufgabe 1 (Mikroskopischer Strahlengang)

Die Tubuslänge des Mikroskops kann bequem durch den Abstand der beiden Linsen unter Berücksichtigung der Brennweiten eingestellt werden. Direkt hinter die Objektivlinse wird zusätzlich eine Lochblende gestellt, die den Strahlengang auf den achsennahen Bereich einschränkt und dadurch die Abbildungsqualität des Strahlenganges erhöht (Kontrast, Verzeichnung). Zur Bestimmung der Vergrößerung wird vor die Okularlinse eine halbdurchlässige Glasplatte im Winkel von etwa 45° gestellt und damit eine zweite, gleiche Skala im Abstand von $s_0 = 250 \text{ mm}$ vom Auge eingespiegelt. Die Vergrößerung erhält man direkt aus dem Vergleich beider Skalen (Abb. 6).

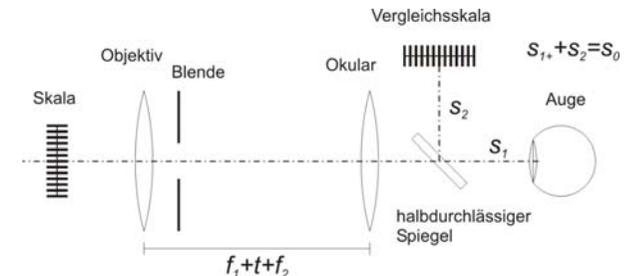


Abb. 6: Aufbau zur Bestimmung der Vergrößerung.

Während bei einem handelsüblichen Mikroskop der Tubus zur Scharfstellung relativ zum Objekt bewegt wird, bietet es sich hier an, die beleuchtete Skala als Objekt relativ zum zuvor eingestellten Tubus zu bewegen.

Zu Aufgabe 2 (Messmikroskop)

Die Tubuslänge wird auf 300 mm eingestellt, um eine ausreichende Vergrößerung zum Ausmessen des Drahtnetzes zu erhalten. In die Zwischenbildebene des Mikroskops wird eine kleine Glasskala als Okularmikrometer eingesetzt und durch Vergleich mit der mm-Skala als Objekt kalibriert. Anschließend wird sowohl der Abstand der Drähte als auch die Drahtstärke eines Drahtnetzes ausgemessen.

Zu Aufgabe 3 (Auflösungsgrenze)

Mit den Lochblenden (verschiedene Durchmesser) kann der wirksame Bereich des Objektivs zur Beobachtung der Auflösungsgrenze verkleinert werden. Da die Strahlen durch die Objektivlinse kollimiert werden, bevor sie die Lochblende passieren, kann (9) zur Berechnung der Linsenöffnung verwendet werden.

OPTISCHE SPEKTROSKOPIE

NP

Als Licht (im engeren Sinne) bezeichnet man den sichtbaren Bereich des Spektrums elektromagnetischer Wellen mit Wellenlängen zwischen 700 nm (rot) und 400 nm (violett).

Licht entsteht beim Übergang angeregter Zustände der Elektronenhülle von Atomen, Molekülen oder Festkörpern in energetisch tiefer liegende Zustände oder den Grundzustand. Als Spektrum bezeichnet man die Zusammensetzung des Lichts nach Intensität und Wellenlänge bzw. Frequenz (Abb. 1). Freie Atome (z.B. in Gasen) emittieren eine relativ geringe Anzahl ganz bestimmter Frequenzen (Linien, Linienspektrum). Bei Molekülen ist die Zahl der Linien wesentlich größer. Bei Festkörpern können die Linien so dicht liegen, dass sich ein quasi-kontinuierliches Spektrum ergibt. Die Spektren sind charakteristisch für die emittierenden oder absorbierenden Systeme, und die Untersuchung der Spektren (Spektroskopie) liefert Informationen über deren Aufbau und Struktur. In den Anwendungen ist die optische Spektroskopie ein wichtiges Hilfsmittel zur Identifizierung von Substanzen (Spektralanalyse). Einen starken Aufschwung erlebte die optische Spektroskopie durch den Einsatz von Laser-Lichtquellen.

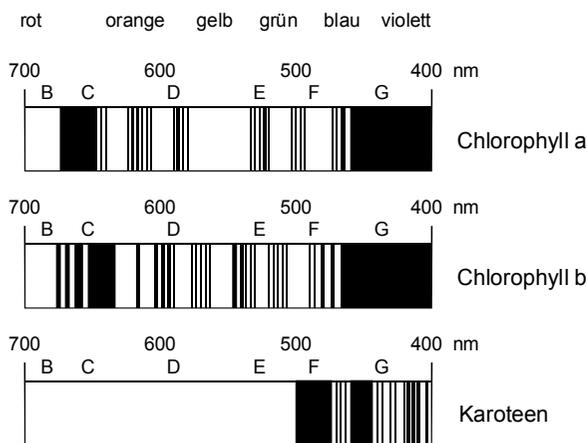


Abb. 1 Beispiele optischer Spektren

Aufgaben

Zwei gebräuchliche Elemente, mit denen man optische Spektren erzeugen kann, sind das Prisma und das Beugungsgitter. Bei diesem Versuch kann wahlweise an einem Prismenspektrometer oder einem Gitterspektrometer gearbeitet werden.

- (Aufbau): Aufbau und Justierung eines optischen Spektrometers.

Prismenspektrometer

- (Quecksilberspektrum): Aufnahme des Spektrums einer Quecksilberlampe (Ablenkwinkel δ in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ). Grafische Darstellung als Kalibrierkurve des Spektrometers.
- (Brechungsindex): Berechnung des Brechungsindex n des Prismas für die gelbgrüne Linie ($\lambda = 546 \text{ nm}$).
- (Spektralanalyse): Spektroskopische Untersuchung einer unbekanntes Lampe.
- (Vergleich): Qualitative Beobachtung des Quecksilberspektrums mit einem Beugungsgitter und Diskussion der charakteristischen Unterschiede.

Gitterspektrometer

- (Quecksilberspektrum): Aufnahme des Spektrums einer Quecksilberlampe (Beugungswinkel α in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ).
- (Gitterkonstante): Berechnung der Gitterkonstanten an Hand der Linien des Quecksilberspektrums.
- (Spektralanalyse): Spektroskopische Untersuchung einer unbekanntes Lampe.
- (Vergleich): Qualitative Beobachtung des Quecksilberspektrums mit einem Prisma und Diskussion der charakteristischen Unterschiede.

Physikalische Grundlagen

Voraussetzung zur Versuchsdurchführung sind gute Kenntnisse über die Phänomene der Brechung (Brechung an einem Prisma; Zerlegung des Lichts; Dispersion), Beugung (Beugung und Interferenz; Beugung am Gitter) und Linsen (Brennpunkteigenschaft, Abbildung durch Linsen, Konstruktion der Abbildung).

Dispersion und Ablenkung des Lichts durch ein Prisma

Als Dispersion bezeichnet man die Abhängigkeit des Brechungsindex eines Mediums von der Wellenlänge bzw. Frequenz. Damit ist ein Effekt gegeben, mit dem das Licht spektral zerlegt, d.h. nach unterschiedlichen Wellenlängenanteilen "sortiert" werden kann. Wegen der Dispersion hängt der Ablenkwinkel bei der Brechung (z.B. durch ein Prisma) von der Wellenlänge ab, so dass das Licht bei Durchgang durch ein Prisma in seine einzelnen Komponenten aufgespalten wird.

Der Ablenkwinkel an einem Prisma ist neben dem Brechungsindex auch von der Richtung des einfallenden Lichtstrahls abhängig; er lässt sich aus dem Brechungsgesetz berechnen. Besonders einfache Verhältnisse erhält man, wenn der Lichtstrahl das Prisma symmetrisch durchläuft; so dass sich gleiche Ein- und Ausfallwinkel an den Grenzflächen ergeben (Abb. 2). Der Gesamt-Ablenkwinkel δ wird in diesem Falle minimal (Minimalablenkung). Geometrisch ergibt sich aus Abb. 2:

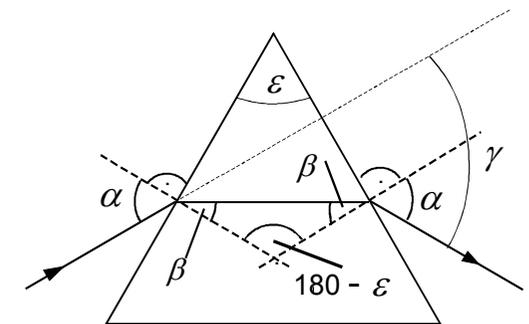


Abb. 2 Lichtbrechung an einem Prisma

$$(1) \quad \beta = \frac{\epsilon}{2} \quad (\text{inneres Dreieck}) \quad \text{und}$$

$$\delta = 2(\alpha - \beta) \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{\delta + \epsilon}{2}.$$

Daraus folgt mit dem Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_0}{c_p} = \frac{n_p}{n_0} \quad \text{bzw.}$$

$$(2) \quad n_p = n_0 \frac{\sin \frac{\delta + \varepsilon}{2}}{\sin \frac{\varepsilon}{2}},$$

wobei ε der Winkel zwischen den brechenden Flächen und n_p und n_0 die Brechungsindizes des Prismas und des umgebenden Mediums sind (für Luft ist $n_0 = 1,0003$).

Beugungsgitter

An Kanten oder feinen Strukturen eines Objekts beobachtet man Beugungserscheinungen, d.h. Lichtintensität auch in geometrischen Schattenbereichen. Modellmäßig kann dies durch das *Huygensschen Prinzip* erklärt werden, einem Konstruktionsschema zur Betrachtung der Wellenausbreitung. Ein Wellenfeld kann danach in jedem Bereich in Ausgangspunkte von Elementarwellen zerlegt und die Intensitätsverteilung in einem anderen Bereich durch Überlagerung (Interferenz) dieser Elementarwellen konstruiert werden. Ein typisches Beispiel für die Anwendung dieses Prinzips ist die Erklärung der Beugungsdiagramme eines Spaltes, einer Lochblende oder eines Gitters. In diesem Versuch wird ein Gitter verwendet.

Ein Gitter ist eine regelmäßige Anordnung von Spalten (Beugungsgitter). Es werde von Licht einheitlicher Wellenlänge (monochromatisches Licht) und übereinstimmender Phasenlage beleuchtet (*kohärentes Licht*, ebene Welle). Hinter dem Gitter breitet sich das Licht entsprechend dem Huygensschen Prinzip von *jedem der Spalte in alle Raumrichtungen* aus, wobei sich die Intensitätsverteilung (z.B. auf einem Schirm) durch die Überlagerung (Interferenz) der einzelnen Strahlen ergibt.

Für eine Beobachtungsebene im Unendlichen ist die resultierende Helligkeit an einem betrachteten Punkt von der *Phasenlage* zueinander paralleler Wellenzüge abhängig, die sich dort überlagern. Sind die Wellenzüge von den Spalten um ein ganzzahliges Vielfaches ($n = 0, 1, 2, \dots$) der Wellenlänge gegeneinander verschoben, so verstärken sie sich gegenseitig (*konstruktive Interferenz*). Sind die Wellenzüge um eine halbe Wellenlänge (oder ein ungeradzahliges Vielfaches davon) verschoben, so löschen sie sich gegenseitig aus (*destruktive Interferenz*).

Die Wegdifferenz benachbarter Wellenzüge wird als *Gangunterschied* bezeichnet. Ist der Abstand der Spalte in dem Gitter d (Gitterkonstante), so ergeben sich Interferenzmaxima, wenn der Gangunterschied der Helligkeitsbedingung $n \lambda$ genügt (Abb. 3):

$$(3) \quad d \sin \alpha = n \lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Da die Richtung (Beugungswinkel α) der Interferenzmaxima nach (3) von der Wellenlänge abhängt, kann mit einem Gitter das Licht in seine spektralen Anteile zerlegt werden. Dabei treten Wiederholungen der zu einer Farbe (Wellenlänge) gehörenden Interferenzmaxima entsprechend der Folge der Laufzahl n auf, die als *Interferenzmaxima* der n -ten Ordnung bezeichnet werden.

Zur experimentellen Realisation wird die Beobachtungsebene durch eine Sammellinse in das Endliche verlagert, wobei die Lichtstrahlen in der Brennebene der Linse vereinigt werden (Abb. 3), zur Erklärung der physikalischen Situation trägt die Linse aber nicht bei.

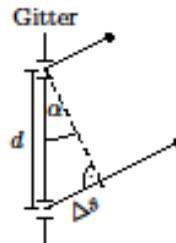


Abb. 3 Beugung und Interferenz an einem Gitter.

Da die Lichtstrahlen und Wellenfronten senkrecht aufeinander stehen, tritt der Winkel α sowohl als "Beugungswinkel" zur Ausbreitungsrichtung als auch als Winkel zwischen Gitterebene und Wellenfronten auf, der den Gangunterschied nach (3) bestimmt.

Aufbau eines Spektrometers

Zur quantitativen Messung der Ablenkung an einem Prisma oder einem Gitter ist paralleles Licht definierter Richtung erforderlich, das mit einem *Kollimator* erzeugt wird. Er besteht z.B. aus einer Sammellinse, in dessen Brennpunkt ein Spalt aufgestellt wird (Abb. 4). Der Spalt wird beleuchtet und stellt so eine (in einer Raumebene)

punktförmige Lichtquelle dar. Zur Beobachtung des parallelen Lichtes wird ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr benutzt, das den Spalt zunächst in die Brennebene des Fernrohrobjektivs (Zwischenbildebene) abbildet und in der es mit einem Okular (Lupe) vergrößert betrachtet wird. In der Zwischenbildebene ist zur Festlegung der Beobachtungsrichtung zusätzlich ein Fadenkreuz angebracht. Das Fernrohr ist schwenkbar um den Prismen- bzw. Gittertisch. Die Beobachtungsrichtung des Fernrohrs kann an einer Winkelskala mit *Nonius* abgelesen werden.

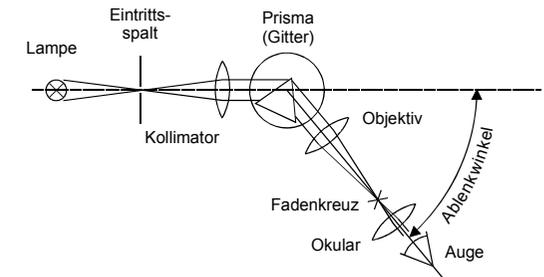


Abb. 4 Aufbau des Spektrometers

Versuchsdurchführung

Zu Aufgabe 1 (Aufbau)

Der korrekte Aufbau und eine sorgfältige Justierung der Apparatur tragen zum Verständnis der optischen Komponenten und der Apparatur bei und sind eine wichtige Voraussetzung für eine einwandfreie Durchführung der Messungen.

Man beginnt zweckmäßigerweise mit der Justierung des Kollimators durch *Autokollimation*: Mit einem Spiegel wird das aus dem Kollimator kommende Licht auf die Kollimatorlinse zurückgeworfen und das dadurch erzeugte Bild des Spaltes auf den Spaltbacken selbst beobachtet. Aus der Brennpunkteigenschaft der Linse folgt, dass dieses Bild nur dann scharf ist, wenn der Spalt in der Brennebene der Linse steht. Diese Einstellung kann durch Verschieben des Spaltes kontrolliert werden.

Am Fernrohr wird zunächst bei entspanntem Auge das Fadenkreuz scharf eingestellt (Okular dazu von der optischen Bank nehmen und gegen einen erleuchteten

Hintergrund halten). Dann wird bei wiedereingesetztem Okular der Spalt beobachtet und die Objektivlinse so justiert, dass man ein scharfes Bild erhält (Einstellung des Fernrohrs auf ∞). Kriterium für eine gute Einstellung ist *Parallaxenfreiheit*, bei der das Bild des Spaltes genau in der Ebene des Fadenkreuzes liegt, so dass Spaltbild und Fadenkreuz sich bei seitlicher Bewegung des Auges nicht gegeneinander verschieben. Unter Umständen erscheint die eine Kante des Spaltbildes unscharf und überstrahlt, was gegebenenfalls an einer Schrägstellung des Spaltes zum Strahlengang liegen und durch leichtes Drehen des Spaltes korrigiert werden kann.

Danach wird der Prismen-/Gittertisch im Drehpunkt des Spektrometers waagrecht ausgerichtet (Stellschrauben).

Zum Schluss wird als erste Messeinstellung das Fadenkreuz präzise auf den Spalt eingestellt und der zugehörige Winkel an der Winkelskala abgelesen (1/100-Grad-Nonius; machen Sie sich mit dem Gebrauch des Nonius vertraut). Diese Einstellung (≈ 180 Grad) ist der Bezugswert, aus dem sich die anschließenden Messwerte (Ablenkwinkel, Beugungswinkel) durch Differenzbildung ergeben.

Prismenspektrometer

Zu Aufgabe 2 und 3 (Quecksilberspektrum, Kalibrierung und Brechungsindex):

Das Prisma wird in Ablenkstellung gebracht (siehe Stellung des Prismas in Abb. 4) und so ausgerichtet, dass es vom Kollimator gut ausgeleuchtet wird und selbst wiederum das Fernrohrobjektiv gut ausleuchtet. Das Prisma muss dazu etwas aus der Mitte des Prismatisches heraus in Richtung der Basis verschoben werden. Das Spektrum wird dann durch das Fernrohr beobachtet und durch Drehen des Prismatisches für die *gelbgrüne Linie* mit $\lambda = 546$ nm auf *Minimalablenkung* gestellt (dies ist eine wichtige Voraussetzung der Auswertung zu Aufgabe 3). Zum Schluss kann durch sehr leichtes Nachjustieren von Kollimatorlinse oder Objektiv die optische Abbildung optimiert werden.

Die Justierung der Apparatur darf danach für die gesamten Messungen nicht mehr verändert werden, damit die aufgenommenen Winkelwerte als Kalibrierung des

Spektrometers für die spektroskopische Untersuchung der "unbekannten" Lampe ihre Gültigkeit behalten.

Die Messung besteht darin, alle beobachtbaren Linien des Hg-Spektrums zu identifizieren (siehe Darstellungen des Spektrums am Schluss des Skripts und im Platzskript) und die zugehörigen Winkel zu messen (Einstellungen des Fernrohrs). Orientieren Sie sich zunächst an den starken Linien (siehe grafische Darstellung des Spektrums) und vermessen Sie dann die schwächeren Linien. Zur Auswertung wird eine Kalibrierkurve anhand des Hg-Spektrums gezeichnet (Winkelinstellungen gegen die Wellenlängen). Um eine hinreichende Genauigkeit zu erzielen, muss die Kalibrierkurve sehr sorgfältig angefertigt und eine Ausgleichskurve mit einem *Kurvenlineal* eingetragen werden.

Die Berechnung des Brechungsindex des Prismas bei der Wellenlänge $\lambda = 546$ nm erfolgt nach Gleichung (2). Der Winkel ε des Prismas ist im Platzskript angegeben.

Zu Aufgabe 4 (Spektralanalyse)

Die Quecksilberlampe wird gegen eine der "unbekannten" Lampen ausgetauscht und deren Spektrum ebenfalls vermessen, wobei die Wellenlängen der Kalibrierkurve von Aufgabe 2 entnommen werden können. Die Messungen müssen sorgfältig durchgeführt werden, um gegebenenfalls die sehr ähnlichen Spektren von Cadmium und Zink (siehe Tabelle am Ende des Skripts) voneinander unterscheiden zu können. Zur Abschätzung der Messfehler ist neben der Ablesegenauigkeit der Winkelskala die Einstellreproduzierbarkeit der Linien zu berücksichtigen.

Zu Aufgabe 5 (Vergleich Prisma-Gitter)

Das Prisma wird gegen das Beugungsgitter ausgetauscht. Beobachten, protokollieren und diskutieren Sie die charakteristischen Unterschiede im Spektrum (Reihenfolge der Linien, Auflösungsvermögen).

Gitterspektrometer

Zu Aufgabe 2 und 3 (Quecksilberspektrum, Kalibrierung und Gitterkonstante)

Beim Einsetzen des Gitters muss auf eine richtige Orientierung des Gitters (siehe Hinweise im Platzskript)

und gut auf eine senkrechte Ausrichtung des Gitters zum Strahlengang geachtet werden. Diese Justierung kann wieder sehr genau durch Autokollimation, d.h. den Rückreflex des leicht verspiegelten Gitterträgers auf die Backen des Kollimatorspaltes kontrolliert werden.

Die Gitter sind so hergestellt, dass sich die größte Intensität und die besten Abbildungsverhältnisse in einer bestimmten Ablenkungsrichtung und Ordnung ergeben. Neben den eigentlichen Beugungsmaxima können durch Reflexionen sogenannte *Geisterlinien* entstehen, die aber an verfälschten Farben und ihrer unzutreffenden Lage erkannt werden können.

Zur Bestimmung der Gitterkonstanten wird das gesamte Hg-Spektrum in der 1. Ordnung und zusätzlich die gelbgrüne Linie ($\lambda = 546$ nm) auch in der 2. Ordnung ausgemessen. Die Auswertung der Gitterkonstanten erfolgt *numerisch* nach Gleichung (3); für das Endergebnis der Gitterkonstanten ist ein Mittelwert zu berechnen.

Zu Aufgabe 4 (Spektralanalyse)

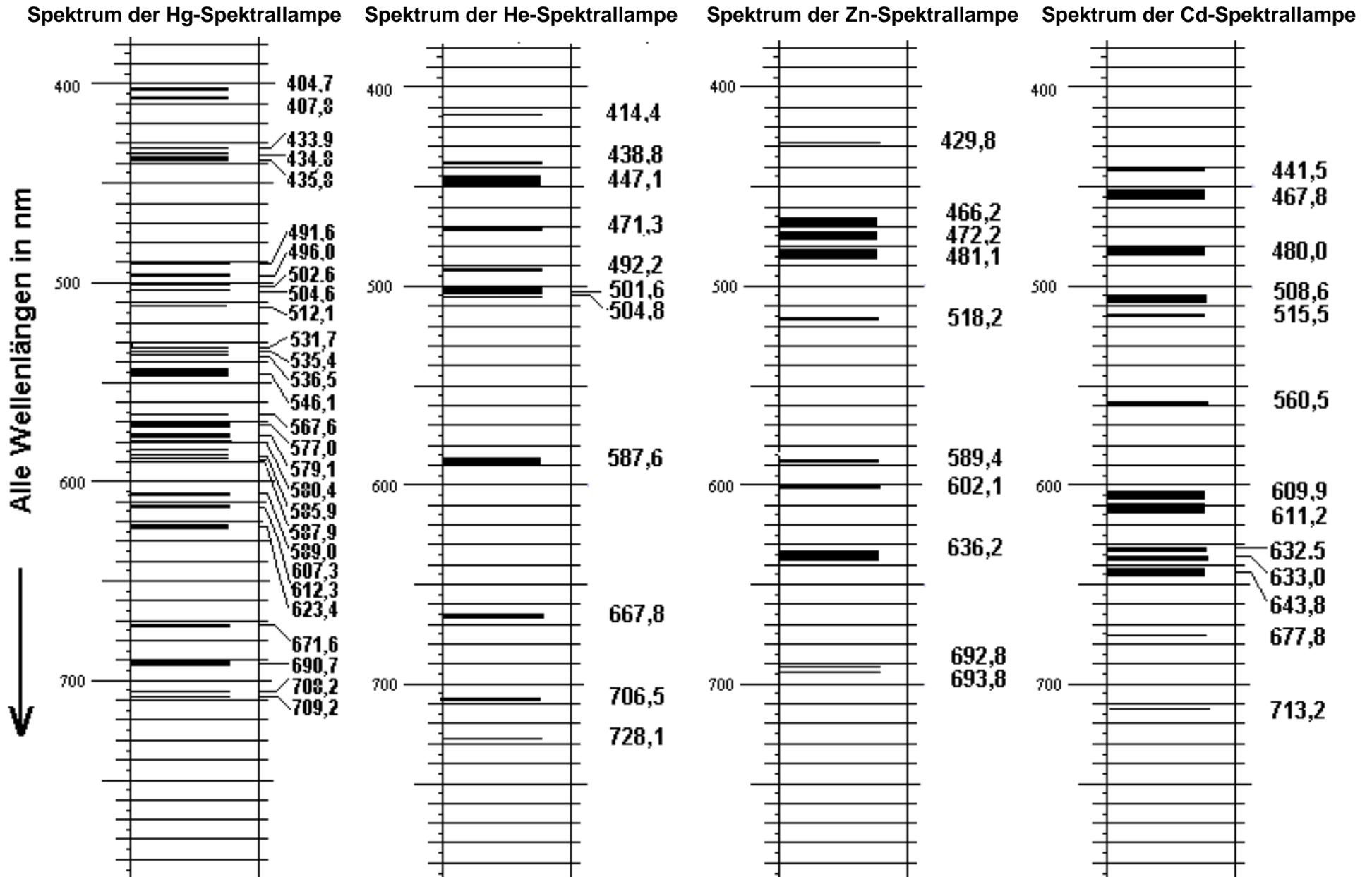
Das Spektrum der "unbekannten" Lampe wird in der 1. Ordnung ausgemessen. Zur Abschätzung der Messfehler ist auch hier wieder neben der Ablesegenauigkeit der Winkelskala die Einstellreproduzierbarkeit der Linien zu berücksichtigen. Es sei darauf hingewiesen, dass die Einstellung auf einige Linien unter Umständen schwierig sein kann.

Zu Aufgabe 5 (Vergleich Prisma-Gitter)

Das Beugungsgitter wird gegen das Prisma ausgetauscht. Beobachten, protokollieren und diskutieren Sie die charakteristischen Unterschiede im Spektrum (Reihenfolge der Linien, Auflösungsvermögen)

Spektrum der Quecksilberlampe und ausgewählte Spektrallinien

Siehe Rückseite



ANLAGE I
FEHLERRECHNUNG

NP

Literatur: Taylor; Fehleranalyse; VCH Verlagsgesellschaft

Die Physik steht in dem Ruf, eine exakte Wissenschaft zu sein, was wohl daran liegt, dass sie ihre Aussagen mathematisch formuliert. Genau genommen ist dies aber falsch, und die Natur entzieht sich grundsätzlich einer exakten Betrachtung. Hinzu kommen praktische und unvermeidbare Unzulänglichkeiten im realen Umgang mit Beobachtungs- und Messgrößen, so dass auch die Physik und Messtechnik zwar oft erstaunlich präzise, aber nie exakte, d.h. unendlich genaue Werte liefern kann.

Mit der Ausnahme des trivialen Abzählens kleiner Mengen zeigt jeder experimentell-empirische Wert, jedes Mess- und Auswertergebnis durch zufällige Schwankungen, durch ein begrenztes Auflösungsvermögen und durch systematische Einflüsse erwartungsgemäße, wahrscheinliche Abweichungen von dem tatsächlichen Wert einer Größe (wobei von dem oben erwähnten Problem der Existenz tatsächlicher oder wahrer Werte einmal abgesehen werden soll). Sie werden als Fehler des Werts oder der Messung bezeichnet. Das Maß der Abweichung bleibt dabei unbekannt, so dass alle realen Daten und Ergebnisse Näherungscharakter haben und aus mathematischer Sicht als Schätzungen zu betrachten sind.

In allen quantitativen Arbeitsgebieten führt dies zur Anwendung statistischer Betrachtungen und Methoden, die in der Messtechnik und Physik als Fehlerrechnung bezeichnet werden. Im Rahmen dieses Praktikums werden einführend sehr einfache Methoden der Fehlerrechnung vermittelt, die an ein grundsätzliches Verständnis der Problematik und an einen kritischen Umgang mit Messergebnissen heranführen sollen.

Die Fehlerrechnung ist unabdingbar für jede quantitative Arbeit, da eine Bewertung und Schlussfolgerung aus den Ergebnissen nur bei Kenntnis der Fehler möglich ist. Eine Diskussion der Fehler und Voruntersuchungen zur erzielbaren Genauigkeit stehen daher stets am Anfang der Konzeption eines Experiments, da dessen

Durchführung nur dann sinnvoll wird, wenn die Fehler genügend klein bleiben, um auf die gestellte Frage eine signifikante Antwort geben zu können.

Der Anfängerin oder dem Anfänger fällt die Fehlerrechnung oft schwer, da das Bewusstsein für deren Bedeutung noch nicht ausgeprägt ist, da ihre Methoden noch neu und ungeübt sind und da sie mit zusätzlichem Aufwand verbunden ist. Eine besondere Schwierigkeit liegt

darin, dass das Vorgehen fast nie rein formal und algorithmisch erfolgen kann, sondern immer eine kritische Abwägung der Umstände und eine persönliche Beurteilung einer Situation erfordert. Hierbei bietet sie aber auch eine Möglichkeit der kritischen Auseinandersetzung mit Situationen, Zahlen und Daten, die eine wichtige Voraussetzung wissenschaftlicher Arbeit ist.

Fehlerbegriffe und Zahlendarstellungen

Absoluter Fehler

Als absoluten Fehler Δx bezeichnet man den Betrag des nach den Umständen zu erwartenden typischen oder mittleren Werts der Abweichung. Er wird bei der Fehlerfortpflanzung (s.u.) bei additiver Verknüpfung von Größen und bei den Schlussfolgerungen als Vergleichswert benötigt. Der absolute Fehler wird mit einem großen griechischen Delta bezeichnet:

- (1) Δx = absoluter Fehler
(zu erwartende Abweichung, Vergleichsmaß).

Relativer Fehler

Der absolute Fehler allein, z.B. $\Delta \ell = 1$ m, sagt nichts über die Genauigkeit eines Ergebnisses aus. Der Wert des Ergebnisses selbst spielt dabei auch eine Rolle, d.h. ob ℓ die Länge einer irdischen Strecke ist (z.B. die Breite eines Raumes, die sich auf 1 m auch ohne Maßstab schätzen lässt) oder die Entfernung zwischen Erde und Mond. Als Genauigkeitsmaß ist der relative Fehler definiert, der mit einem kleinen griechischen Delta bezeichnet wird:

- (2) $\delta x = \frac{\Delta x}{x}$ = relativer Fehler (Genauigkeitsmaß)

(Die Begriffe *genau* und *ungenau* haben nur im quantitativen Vergleich einen Sinn. Eine Messung kann nur im

Vergleich mit anderen Messergebnissen dieser Größe als genau oder ungenau bezeichnet werden).

Bei der Fehlerfortpflanzung (s.u.) wird der relative Fehler bei multiplikativer Verknüpfung benötigt.

Der relative Fehler ist als Verhältniszahl dimensionslos. Im entsprechenden Wertebereich werden relative Fehler oft in Prozent oder Promille angegeben. Bei sehr kleinen Werten ist eine Gleitkommadarstellung durch Abspaltung einer Zehnerpotenz üblich:

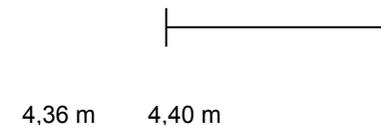
$$(3a) \quad 1\% \text{ (Prozent)} = \frac{1}{100} = 0,01,$$

$$(3b) \quad 1\text{‰} \text{ (Promille)} = \frac{1}{1000} = 0,001,$$

$$(3c) \quad \text{Gleitkommadarstellung,} \\ \text{z.B. } \delta x = 3 \cdot 10^{-5} \text{ für } \delta x = 0,00003.$$

Fehlerintervall

Die Unbestimmtheit realer Daten bedeutet, dass Ergebnisse keinen punkthartigen Charakter haben, sondern als Intervalle zu verstehen und darzustellen sind. Wird z.B. die Breite eines Raumes mit einem Maßstab unter Berücksichtigung der Anlegemöglichkeiten und der Parallelität der Wände auf (\pm) 2 cm genau gemessen, so ist das Ergebnis ein Bereich, d.h. ein Intervall von in diesem Beispiel 4,36 bis 4,40 m:



Die Intervalle heißen Fehlerintervalle (anschaulicher, aber nicht gebräuchlich: Ergebnisintervalle). Die übliche Schreibweise besteht aus dem Zentralwert und dem Intervallradius:

$$(4) \quad \text{Ergebnis } \ell = (4,38 \pm 0,02) \text{ m}.$$

Die Intervalle sind als homogen zu betrachten, wie es die grafische Darstellung ausdrückt. Kein Punkt innerhalb des Intervalls ist gegenüber den anderen ausge-

zeichnet, und der Zentralwert (4,38 m im obigen Beispiel) als "Ergebniswert" im engeren Sinne ist nicht besser oder gewichtiger als die Grenzwerte 4,36 m oder 4,40 m auch.

Zahlendarstellung und Rundung

Auch die zur praktischen Zahlendarstellung gebräuchlichen Dezimalzahlen stellen (im Allgemeinen) Näherungswerte dar, deren Auflösung durch die Anzahl der Stellen des Zahlworts bestimmt wird. Dabei müssen sich die durch die Fehlerintervalle gegebene Auflösung und die der Zahlendarstellung entsprechen, so dass keine Genauigkeit verloren geht (zu wenige Stellen in der Zahlendarstellung) oder nicht vorhandene Genauigkeit vorgetäuscht wird (zu viele Stellen in der Zahlendarstellung).

(5) Eine Zahlendarstellung ist konsistent, wenn der Ergebniswert und der Fehler in der gleichen Stelle abbrechen wie in (4).

Inkonsistente und falsche Angaben als Beispiele wären:

falsch: $l = (4,389 \pm 0,02) \text{ m}$
(zu viele Stellen im Ergebnis),

falsch: $l = (4,4 \pm 0,02) \text{ m}$
(zu wenige Stellen im Ergebnis).

Häufige Fehler liegen in der Angabe inhaltsloser Stellen nach Rechenoperationen (Multiplikation, Division) oder im Weglassen nachfolgender, aber signifikanter Nullen.

Auch die Fehler tragen Fehler, wobei die Abschätzung der Fehler selbst typisch auf einen Faktor zwei begrenzt ist. Es ist daher nicht sinnvoll, Fehler mit mehr als einer Stelle anzugeben:

(6) Fehler sind mit nur einer Stelle anzugeben!

Die Ergebniswerte werden kaufmännisch gerundet, d.h. abgerundet bei einer nachfolgenden 4 und aufgerundet ab einer nachfolgenden 5 im Zahlwort. Die Fehler sind dagegen stets aufzurunden, d.h. das Fehlerintervall ist durch die Rundung zu vergrößern, um vereinbarte Wahrscheinlichkeiten über das Erfassen von Werten nicht zu verletzen.

(7) Fehler sind aufzurunden!

Sofern eine Rechnung nicht geschlossen mit Hilfe eines Rechners (Taschenrechner) durchgeführt wird, sondern Zwischenwerte notiert und später wieder aufgenommen werden, sollen diese Zwischenwerte zweistellig notiert werden, um ein Aufsummieren von Rundungsfehlern zu vermeiden:

(8) Fehler von Zwischenergebnissen sind zweistellig zu notieren!

Beitragende und nichtbeitragende Fehler

Auch die Fehler selbst sind unbestimmt und tragen Fehler. Das Ziel einer Fehlerrechnung ist es, den wesentlichen Anteil einer zu erwartenden Abweichung zu erfassen, wobei kleinere Beiträge vernachlässigt werden können. Dies wird zusätzlich durch die Rundungsregel (7) gerechtfertigt. Als Konsequenz können

(9) kleine Fehlerbeiträge bei der Fehlerfortpflanzung unberücksichtigt bleiben,

wodurch sich der Rechenaufwand verringert. Fehler können vernachlässigt werden, wenn sie nur etwa 10 % oder weniger gegenüber anderen Fehlern betragen.

Schließender Vergleich

Jede Schlussfolgerung aus Ergebnissen folgt durch quantitativen Vergleich: auf Abhängigkeiten bei Variation eines Parameters, zwischen Theorie und Experiment, durch Vergleich mit vorhandenen Daten (Literaturwerten).

Zahlen allein sind aus mathematischer Sicht *identisch* oder *disjunkt* und lassen aus praktischer Sicht keinen sinnvollen Vergleich zu. Die Fehlerintervalle dagegen ermöglichen einen schließenden Vergleich, der darin besteht, die grundsätzlich kontinuierliche Menge von Ergebnissen (Ergebnisintervallen) auf eine diskrete Menge von (konventionellerweise drei) Aussagen abzubilden:

(10a) Ergebnisse werden als (uneingeschränkt) gleich bewertet, wenn sich die Fehlerintervalle gegenseitig erfassen.

(10b) Ergebnisse werden als verträglich bezeichnet, wenn sie sich noch im Rahmen der dreifachen Fehlerintervalle erfassen.

(10c) Ergebnisse werden (erst dann) als signifikant unterschiedlich betrachtet, wenn die Abweichung über die dreifachen Fehlerintervalle hinausgeht.

Statistische Grundlagen (Fehlermodell)

Die Fehler setzen sich aus zufälligen und systematischen Beiträgen zusammen, wobei den zufälligen Anteilen statistische Betrachtungen und Modelle zugrunde gelegt werden.

Statische Aussagen unterliegen zwei elementaren Grundsätzen. Sie kennzeichnen *Ensembleeigenschaften*, wobei kein Schluss von einem Einzelfall auf die Gesamtheit möglich ist, und sie stellen (lediglich) *Wahrscheinlichkeitsaussagen* mit endlicher Genauigkeit und (damit verbundener) endlicher Sicherheit dar.

Messwerte sind *normalverteilt*, dies ist eine empirisch beobachtete Tatsache. Normalverteilungen (Gaußverteilungen) sind durch zwei Parameter gekennzeichnet. Der Erwartungswert μ beschreibt die Lage der Verteilung und wäre mit dem "tatsächlichen" Wert der Messgröße gleichzusetzen. Die Standardabweichung σ ist ein repräsentatives Maß für die *Streuung*; sie ist konventionell als Fehler der Messung festgesetzt. Bezeichnet man mit X die Größe, und ist x_i ein (beliebiger) Einzelmesswert, so wäre das Messergebnis:

(10) $X = x \pm \Delta x$ mit $x = x_i$ und $\Delta x = \sigma$.

Ein Einzelmesswert ergibt jedoch keine Kenntnis der Standardabweichung der Verteilung, die erst, zumindest näherungsweise, mit einer *Stichprobe*, d.h. einer Messreihe berechnet werden kann. Die Messreihe liefert dann aber mit dem Mittelwert \bar{x} einen besseren Schätzwert für X , wobei aufgrund der mathematischen Ähnlichkeit zwischen Ausgangs- und Mittelwertverteilung aus der Stichprobe auch die als Fehler benötigte Standardabweichung der Verteilung der Mittelwerte berechnet werden kann. Das Ergebnis einer Messung durch eine Messreihe (*Stichprobenschätzung*) ist dann ($n =$ Stichprobenumfang = Anzahl der Messungen):

(11) $X = x \pm \Delta x$

mit $x = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

und $\Delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$

Dem Fehler Δx in (11) liegen Rechenbeziehungen für σ_{n-1} (Näherungswert der Standardabweichung einer Verteilung aus einer Stichprobe) und für die Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$ der Mittelwertverteilung zugrunde:

(12a,b) $\sigma \approx \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ und $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Das *zentrale Schwankungsintervall* ($\mu \pm \sigma$) einer Normalverteilung umfasst 68 % der Verteilungswerte (siehe Abbildung 1). Umgekehrt erfasst dann ein gleich großes *Fehlerintervall* ($x_i \pm \sigma$) um einen beliebigen Verteilungswert (Ergebniswert) den Erwartungswert mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 68 %.

Die (gewählte) Breite des Fehlerintervalls bestimmt die "Schärfe" der Aussage, d.h. die Genauigkeit, jedoch nur mit einer zugehörigen, endlichen Wahrscheinlichkeit, der statistischen Sicherheit. Beide Größen verbindet eine Art "Unschärferelation": Je genauer eine Aussage getroffen, d.h. je kleiner das Fehlerintervall festgesetzt wird, desto geringer wird die Sicherheit der Aussage, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das angegebene Intervall den "tatsächlichen" Wert erfasst.

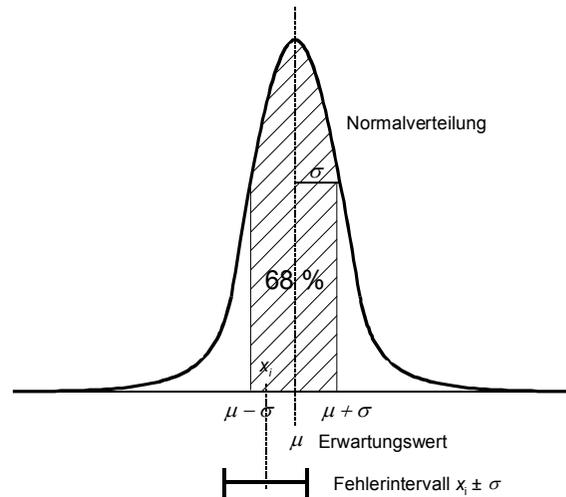


Abb. 1 Normalverteilung mit zentralem Schwankungsintervall ($\mu - \sigma, \mu + \sigma$) und einem Fehlerintervall ($x_i \pm \sigma$)

Zur Wiederholung: in der Physik und Messtechnik wird als Fehler die einfache Standardabweichung mit einer statistischen Sicherheit von ungefähr 68 % (etwa 2/3) zugrunde gelegt, wobei auf der anderen Seite eine *Irtumswahrscheinlichkeit* von ungefähr 32 % (etwa 1/3) verbleibt. In anderen Fachgebieten müssen aus besonderen Gründen höhere Sicherheiten zugrunde gelegt werden. In den Biowissenschaften und der Medizin zum Beispiel ist die dreifache Standardabweichung als Fehlermaß festgesetzt, die eine statistische Sicherheit von 99,7 % gewährt.

Systematische Fehler

Neben den zufälligen Schwankungen gibt es Ursachen, die zu einseitigen und bestimmten Abweichungen von den tatsächlichen Werten führen, wie z.B. verbogene Zeiger, schiefstehende Waagen oder Kalibrierfehler. Sie werden als *systematische Fehler* bezeichnet. Systematische Fehler sind grundsätzlich vermeidbar, aber schwer erkennbar (die zufälligen Fehler offenbaren sich durch die Streuung). Im Rahmen dieses Praktikums sollen zufällige und systematische Fehler nicht weiter unterschieden und quantitativ gleich behandelt werden.

Messfehler

Die bei einer Messung auftretenden Fehlerbeiträge des Messwerts lassen sich grob drei Fallgruppen zuordnen. In der Praxis dominiert vielfach einer der Anteile, so dass die anderen gemäß (9) als nicht beitragend vernachlässigt werden können.

Zu einer Messung gehört oft eine vorhergehende Einstellung (Anlegen eines Maßstabs, Auslösen einer Stoppuhr, Justierung oder Einstellung an einer optischen Apparatur, Einstellung eines zusätzlichen "Parameters", wie z.B. einer Temperatur), wobei im Folgenden nicht unterschieden werden soll, ob der Einfluss auf den Messwert allein aus dem Messverfahren oder zusätzlich aus erforderlichen Einstellungen herrührt.

Kontrollmessung

Die Grunderscheinung der Fehler liegt in dem Streuverhalten, d.h. in den zu erwartenden Abweichungen der Messwerte untereinander. Dies muss bei jeder Messung überprüft werden, indem mindestens eine Wiederholungsmessung (einschließlich der zu der Messung gehörenden "Einstellungen") als Kontrollmessung durchgeführt wird. Tritt eine deutliche Abweichung auf, so ist eine Messreihe aufzunehmen. Ist im anderen Fall eine Abweichung nicht wahrnehmbar, d.h. nicht *auflösbar*, so muss der Fehler nach anderen Gesichtspunkten abgeschätzt werden (siehe Auflösungsvermögen und Schätzfehler)

Streuung: Messreihe und Streufehler

Zeigt eine Messgröße eine deutliche Streuung, so muss aus statistischer Sicht eine Stichprobe erhoben, d.h. eine Messreihe aufgenommen und nach (11) ausgewertet werden.

Auflösungsvermögen: Schätzfehler

Viele Messverfahren zeigen keine Streuung und liefern stabile Messwerte. Dies lässt aus statistischer Sicht nicht auf die Abwesenheit von Fehlern schließen, sondern liegt daran, dass jedes Messverfahren und jede Zahlendarstellung (Skala, Anzeige) ein begrenztes *Auflösungsvermögen* besitzt, das die getrennte Wahrnehmbarkeit von Werten einschränkt. Alle realen Werte haben *diskreten* Charakter und zeigen sich stabil, wenn die Streuung unterhalb dieser Auflösungsgrenze liegt.

Ein Fehler muss dann auf der Grundlage der Skalen- oder Anzeigaufösung (digitale Anzeigen) und gegebenenfalls unter Berücksichtigung zusätzlicher Umstände subjektiv abgeschätzt werden, und man spricht von einem *praktischen Schätzfehler*.

Bei Analogskalen (Skala/Zeiger) kann innerhalb der Skalenintervalle (Skalenteile) in den meisten Fällen eine weitere *Schätzstelle* abgelesen werden. Die Ablesemöglichkeit bzw. der Fehler hängt dabei stark von der Skalenausführung und den *Parallaxeeinflüssen* ab. Typisch für die Ablesegenauigkeit ist:

(13) Analoganzeigen:

$$\Delta_{\text{Schätz}} = 0,1 \text{ bis } 0,5 \text{ Skt (Skalenteile)} .$$

Dabei stellen 0,5 Skalenteile eine Obergrenze dar, wenn das Schätzen eines Zwischenwerts nicht möglich ist und ein ganzes Anzeigintervall als Fehlerintervall herangezogen werden muss.

Bei Digitalanzeigen wird der Anzeigefehler wegen der Unkenntnis des Rundungsmechanismus mit $(\pm) 1$ in der letzten Stelle der Anzeige angenommen:

(14) Digitalanzeigen: $\Delta_{\text{Schätz}} = 1 \text{ d (Digit)}$.

Gerätevoraussetzungen: Nennfehler

Jedes Messverfahren bzw. Messgerät zeigt bauartbedingte Fehler, die vom Hersteller untersucht und mit den Gerätedaten angegeben werden müssen. Diese Fehler werden als *Nennfehler* bezeichnet. Die Nennfehler sind oft systematischer Natur (z.B fehlerbehaftete Kalibrierung).

Typische Praktikumsgeräte, bei denen beitragende Nennfehler auftreten, sind elektrische Messgeräte (Multimeter für U/I/R/C/L, Oszilloskope). Analogmultimeter werden durch ihre *Güteklasse* charakterisiert, die den absoluten Fehler als Prozentwert vom Messbereich angibt:

$$(15) \text{ Güteklasse } k: \Delta k = \frac{k}{100} \cdot \text{Messbereich} .$$

Die Güteklasse ist (neben anderen Kennzeichen) als kleine Zahl (im Wertebereich von etwa 0,5 bis 3) zusammen mit der Stromart (= o.ä. für Gleichstrom; ~ für

Wechselstrom) mit auf der Skala der Geräte angegeben.

Bei Digitalmultimetern setzt sich der Fehler aus einem relativen Anteil in % vom Messwert (% v. M.) und einem konstanten Anteil in *Digits* d (Einheit der letzten Stelle) zusammen:

(16) Fehlerangabe p % v.M. + n d:

$$\Delta x = \frac{p}{100} \cdot \text{Messwert} + n \cdot \text{Einheiten der letzten Stelle} .$$

Im Praktikum sind die Nennfehler in den jeweiligen Platzskripten angegeben, sofern sie einen dominanten Beitrag darstellen, und müssen dann bei den Messergebnissen berücksichtigt werden.

Fehlerfortpflanzung

Die Bestimmung einer gesuchten Ergebnisgröße Z besteht im Allgemeinen aus der Messung einer Reihe von Messgrößen A, B, \dots und der anschließenden Berechnung des Ergebnisses aus diesen Größen. Dementsprechend teilt sich die Fehlerabschätzung auf in die Bestimmung der Messfehler (s.o.) und die anschließende Berechnung des Ergebnisfehlers auf Grund der Rechenbeziehungen zwischen den Messgrößen. Dieser Teil der Fehlerrechnung wird als *Fehlerfortpflanzung* bezeichnet.

Bei der Verknüpfung zufällig verteilter Größen ergibt sich eine "kompensierende" Wirkung, bei der durch das statistische Zusammentreffen positiver und negativer Abweichungen der Fehler des Ergebnisses im Mittel geringer ist als die Summe der Einzelfehler. Die daraus resultierenden Verknüpfungsregeln der Fehlerfortpflanzung erfordern einen höheren Rechenaufwand. Aus Vereinfachungsgründen soll daher im Rahmen dieses Praktikums der ungünstigste, aber rechnerisch einfache Fall angenommen werden, dass die Messgrößen einseitig und bis an den Rand der Fehlerintervalle abweichen. Die daraus resultierenden Fehler-Verknüpfungsregeln heißen *Fehlerfortpflanzungsgesetze für den Maximalfehler*.

Additive Verknüpfung

Bei *Addition und Subtraktion* führt dies direkt zur Summe der Einzelfehler als Gesamtfehler;

$$(17) z = a \pm b \Rightarrow \Delta z = \Delta a + \Delta b ,$$

d.h. bei Addition und Subtraktion addieren sich die absoluten Fehler.

Multiplikative Verknüpfung und Potenzen

Der Fehler bei *Multiplikation bzw. Division* lässt sich durch Ausmultiplizieren bzw. Division der Fehlergrenzen als algebraische Summen berechnen. Die Rechnung bei Multiplikation ist:

$$z = a \cdot b .$$

Zu z wird der obere Grenzwert durch Einsetzen der oberen Werte für a und b berechnet:

$$(z + \Delta z) = (a + \Delta a) (b + \Delta b) = a \cdot b + a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b .$$

Das Produkt $a \cdot b$ ist gleich dem Ergebniswert z , so dass die restlichen Terme auf der rechten Seite die Abweichung des Grenzwerts, d.h. den Fehler Δz darstellen. Unter der Annahme, dass die Fehler grundsätzlich klein gegen die Werte sind, wird das Produkt $\Delta a \cdot \Delta b$ vernachlässigt, und man erhält (zusätzlich nach Umstellen auf der rechten Seite):

$$\Delta z = b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b .$$

Nach Division durch $z = a \cdot b$:

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{b \cdot \Delta a}{a \cdot b} + \frac{a \cdot \Delta b}{a \cdot b} \quad \text{bzw.}$$

$$(18) z = a \overset{\times}{\underset{\div}{\cdot}} b \Rightarrow \delta z = \delta a + \delta b ,$$

d.h. bei Multiplikation und Division addieren sich die relativen Fehler.

Für Potenzen und Wurzeln gilt (18) entsprechend, d.h.;

$$(19) z = a^{\frac{p}{q}} \Rightarrow \delta z = \left| \frac{p}{q} \right| \delta a .$$

Die Fehlerregeln für die arithmetischen Verknüpfungen werden bei kompliziert strukturierten (geschachtelten) Ausdrücken "von innen nach außen" auf die Einzelverknüpfungen angewendet, genau wie bei der Berech-

nung des Ergebniswertes selbst. Dabei muss häufig zwischen den absoluten und relativen Fehlern umgerechnet werden.

Funktionswerte: Grenzwertabschätzung

Enthalten Auswertebeziehungen eine Größe wiederholt, oder gehen Funktionen von Messwerten ein, so kann ein Grenzwert des Ergebnisses (Fehlergrenze) durch Einsetzen der Grenzen der Messwerte berechnet werden. Dabei ist zu beachten, in welcher Weise die Einzelgrößen in den Rechenausdruck eingehen (Summand/Minuend; Zähler/Nenner) und dass identische Größen nur in gleicher Weise abweichend eingesetzt werden können. Der Fehler ergibt sich dann als Differenz zwischen Grenz- und Ergebniswert:

$$\text{Ergebnis } z = f(a, b, \dots),$$

$$\text{oberer Grenzwert } z + \Delta z = f(a \pm \Delta a, b \pm \Delta b, \dots),$$

$$(20) \text{ Fehler } \Delta z = (z + \Delta z) - z.$$

Beispiel: Für die Berechnung der Gitterkonstanten d durch Messung der Lage (Ablenkwinkel α) des ersten Beugungsmaximums an einem Beugungsgitter gilt:

$$d = \frac{\lambda}{\sin \alpha}.$$

Der Wert der Wellenlänge ist vorgegeben:

$$\lambda = (546,1 \pm 0,1) \text{ nm.}$$

Die Messung des Ablenkwinkels ergab:

$$\alpha = (19,13 \pm 0,04) \text{ Grad.}$$

Daraus folgen:

$$d = \frac{546,1 \text{ nm}}{\sin(19,13 \text{ Grad})} = 1,6664... \text{ } \mu\text{m} \text{ und}$$

$$d + \Delta d = \frac{546,2 \text{ nm}}{\sin(19,09 \text{ Grad})} = 1,6701... \text{ } \mu\text{m.}$$

Das (gerundete) Ergebnis lautet dann:

$$d = (1,666 \pm 0,004) \text{ } \mu\text{m.}$$

Fehlerabschätzung bei der Auswertung von Funktionen

Funktionen (lineare oder linearisierte Zusammenhänge) werden im Rahmen dieses Praktikums durch eine grafische Darstellung und visuelle Festlegung einer Ausgleichsgeraden ausgewertet. Eine Fehlerabschätzung erfolgt auch hier durch eine Grenzwertabschätzung an Hand einer zusätzlichen *Grenzgeraden*. Hinweise zum Verfahren und zum praktischen Vorgehen sind im folgenden Skript *GRAFISCHE DARSTELLUNGEN UND GRAFISCHE AUSWERTUNG VON FUNKTIONEN* beschrieben.

ANLAGE II
GRAPHISCHE
DARSTELLUNGEN

NP

Grafische Darstellungen dienen der qualitativen und quantitativen Beurteilung von Gesetzmäßigkeiten (Funktionen) und ermöglichen einen differenzierenden, schließenden Vergleich. Der Mensch besitzt eine sehr große Leistungsfähigkeit bei der Verarbeitung grafischer Information ("Ein Bild sagt mehr als tausend Worte"), und grafische Darstellungen haben eine zentrale Bedeutung bei wissenschaftlichen Arbeiten.

Messbegleitende grafische Darstellungen sind daneben ein nützliches Hilfsmittel zur augenblicklichen Kontrolle einer Messung. Sprünge z.B. in einer sonst glatten Kurve oder andere Abweichungen vom erwarteten Verlauf werden sofort deutlich und ermöglichen eine unmittelbare Prüfung der Umstände, die später nur aufwendig oder gar nicht mehr durchgeführt werden können.

Grafische Darstellungen sind darüber hinaus eine praktische Form der Darstellung numerischer Zusammenhänge als Tabellenersatz.

Der Einsatz von Computern kann grafische Darstellungen nicht ersetzen; vielmehr ist diese oft die Voraussetzung für den sinnvollen Einsatz eines Rechners. Modellselektionen für eine Anpassung, oder die Eliminierung von Ausreißern sind Probleme, die selbst Großrechner kaum befriedigend lösen, die der Mensch aber in vielen Fällen durch einen Blick auf eine grafische Darstellung erledigen kann.

Ausführung von grafischen Darstellungen

- Die Aussagekraft einer grafischen Darstellung hängt stark von ihrer inhaltlichen und äußeren Form ab. Dazu gehören:

Wahl der dargestellten Größen;

Wahl des Koordinatensystems (rechtwinklige Koordinaten, Polarkoordinaten);

Wahl der Achseneinteilungen (linear, logarithmisch), des Achsenmaßstabes und des dargestellten Bereichs;

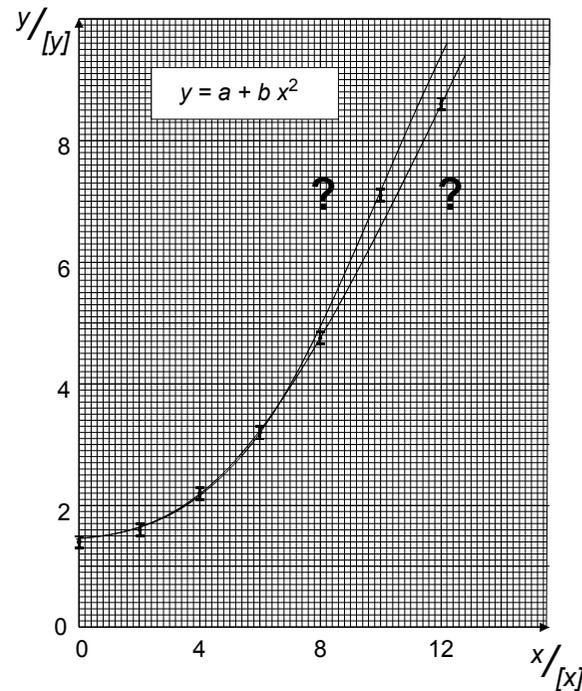


Abb.1a Leistungsfähigkeit grafischer Darstellungen. Die direkte Darstellung ermöglicht keine eindeutige Entscheidung über den Kurvenverlauf.

und (nicht zuletzt) eine sorgfältige Ausführung der Darstellung.

Die Darstellung muss den Sachverhalt vollständig und korrekt wiedergeben. Durch die Art der Ausführung darf weder Information verlorengehen, noch z.B. eine zu große Genauigkeit vorgetäuscht werden.

Ein Beispiel zeigen die Abbildungen 1a und 1b.

Netzpapier

- Grafische Darstellungen müssen auf Netzpapier mit geeigneten Achseneinteilungen angefertigt werden:

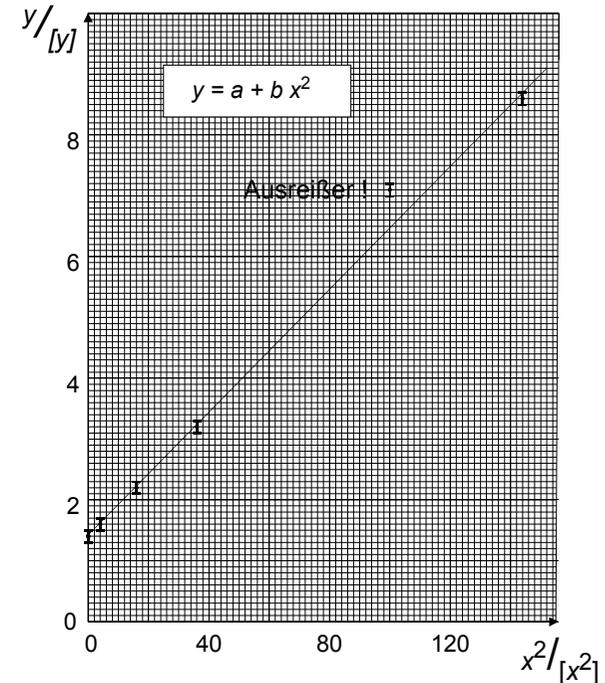


Abb. 1b Die linearisierte Darstellung lässt den wahrscheinlichen Verlauf erkennen. Bei einer messbegleitenden Darstellung hätte der Ausreißer rechtzeitig erkannt und überprüft werden können.

mm-Papier für lineare Darstellungen;

einfach logarithmisches Papier für die Darstellungen von Exponentialfunktionen;

Spezialpapiere für besondere Fälle (doppelt-logarithmisches Papier, Polarkoordinatenpapier, Wahrscheinlichkeitspapier etc.).

- Die grafischen Darstellungen für das Praktikum müssen auf gedrucktem Original-Netzpapier angefertigt werden (im Praktikum erhältlich).

Teilung der Achsen

- Der Achsenmaßstab und das dargestellte Intervall müssen so gewählt werden, dass sämtliche Information der Messung unverfälscht wiedergegeben wird.

Durch die Wahl des Maßstabs und des Ausschnitts darf weder eine zu hohe Genauigkeit vorgetäuscht werden noch Genauigkeit verloren gehen.

Zeigen beide dargestellten Größen eine ausgeprägte Abhängigkeit voneinander, so sollte die zur Verfügung stehende Fläche voll ausgeschöpft werden. Wird das Verhalten einer in etwa konstanten Größe dargestellt, so ist ein geeigneter Kompromiss zu wählen. Ein zu großer (zu wenig gestreckter) Maßstab würde mögliche Tendenzen nicht erkennen lassen, ein zu kleiner Maßstab wegen der Streuung der Messwerte eine unübersichtliche Punktwolke ergeben ("Sternenhimmel").

- Die Darstellung muss eine vollständige Beurteilung des Sachverhalts ermöglichen.

So sollte bei einer erwarteten Nullpunktgeraden der Nullpunkt in die Darstellung einbezogen werden, um den Verlauf der (u.U. extrapolierten) Ausgleichsgeraden am Nullpunkt beurteilen zu können.

- Die Teilung der Achsen soll einfach sein,

z.B. ein, zwei oder fünf Einheiten pro cm des Netzpapiers bei linearen Darstellungen. Komplizierte Teilungen machen das Ablesen und Eintragen mühsam und sind häufige Ursache von Fehlern.

Bezeichnung der Achsen

- Die Hauptteilstriche der Achsen müssen mit Maßzahlen versehen werden. Die Achsen selbst werden mit den durch die Einheiten dividierten Symbolen der dargestellten Größen bezeichnet (die Maßzahlen stellen die Quotienten aus Größe und Einheit dar).

Zur Übersichtlichkeit wird empfohlen, Symbol und Einheitenzeichen (Zähler und Nenner) klar getrennt zu halten und nicht miteinander zu verrechnen. Beispiel:

$$\frac{v}{10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \text{und nicht} \quad 10^2 \frac{v}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}},$$

$$\frac{1}{T} / 10^{-3} \text{K}^{-1} \quad \text{und nicht} \quad \frac{10^3 \text{K}}{T}.$$

Alternativ kann man die Achsen nur mit den Größen bezeichnen (Name und Symbol; in klaren Fällen genügt das Symbol) und die Einheiten an Stellen neben der Achse vermerken.

Falsch ist es, Einheiten in *eckige* Klammern zu setzen. Eckige Klammern werden um Größen zur Bezeichnung ihrer Einheit verwendet; z.B.:

$$[p] = 1 \text{ mmHg}$$

zum Hinweis auf eine praktisch-experimentell benutzte, aber SI-unverträgliche Druckeinheit.

Eintragung der Messwerte und Fehlergrenzen

- Messwerte werden durch Punkte, Kreuze oder kleine Kreise markiert.

Die Fehler können in Form von Fehlerbalken eingetragen werden, wobei es im Allgemeinen ausreichend ist, nur einige, repräsentative Fehlerbalken darzustellen.

Kurven (Theoriekurven, Anpassungskurven, Ausgleichskurven)

- Kurven in grafischen Darstellungen können (im Allgemeinen zwei) unterschiedliche Bedeutungen haben:

Eine *Theoriekurve* setzt auf der Basis eines Modells eine Funktion *qualitativ und quantitativ* voraus (Funktionstyp und Parameter).

Eine *Anpassungskurve* ("Fit"-Kurve) setzt einen Funktionstyp *qualitativ* voraus, passt die Parameter aber frei den Messwerten an, so dass sich eine optimale Näherung ergibt (Minimum für die Summe der Abweichungsquadrate).

Wegen der unterschiedlichen Möglichkeiten muss die genaue Bedeutung einer durchgezogenen Kurve in der Darstellung erläutert werden.

Naturwissenschaftlich nicht sinnvoll ist es, Messpunkte einzeln durch einen Polygonzug zu verbinden, weil dies der Zufälligkeit der einzelnen Messwerte widerspricht, und sich Naturvorgänge im "klassischen" Bereich im Allgemeinen stetig differenzierbar, d.h. "glatt" verhalten.

Legende

- Die gesamte Darstellung muss eine ausreichende und eindeutige Erklärung des gezeigten Zusammenhangs enthalten (Legende).

Dazu gehören sowohl übergeordnete Bezeichnungen des Sachverhalts (z.B. "*Drehbewegungen; Winkel-Zeit-Gesetz*") als auch Hinweise, die den Zusammenhang zum Text herstellen oder die Messumstände beschreiben (z.B. "*Messreihe II; ohne Zusatzgewichte*").

Grafische Auswertung von Funktionen

Die numerische Auswertung bzw. Anpassung einer Funktion an eine Messreihe ist mit erheblichem Rechenaufwand verbunden (was heutzutage durch Rechner und Auswertprogramme allerdings kein Problem mehr darstellt). Häufig ist eine lineare Funktion anzupassen (lineare Regression):

- Dies kann einfach, anschaulich und mit sehr gutem Ergebnis visuell mit Hilfe einer grafischen Darstellung durchgeführt werden, indem unter kritischer Beachtung von Lage und Verteilung der Punkte zu den Messwerten nach visueller Schätzung eine *Anpassungsgerade (Bestgerade)* mit einem Lineal eingetragen wird.

Die Leistungsfähigkeit dieser "visuellen Mittelwertrechnung" wird dadurch deutlich, dass sich die Ergebnisse wenig von dem des (aufwendigen) numerischen Verfahrens unterscheiden. Zusätzlich ist zu berücksichtigen, dass auch bei einer numerischen Auswertung die Anfertigung der grafischen Darstellung zur Beurteilung der Anpassung unerlässlich ist (das Rechenverfahren passt an jede vorliegende Punktmenge eine Gerade an, auch wenn die Werte keinem linearen Verlauf folgen).

Höhere Funktionen können durch eine geeignete Linearisierung grafisch angepasst werden (s.u.). Nichtlineare Funktionen lassen sich nur numerisch auswerten. Grundlage aller Anpassungsverfahren ist die Methode der kleinsten Abweichungsquadrate.

Grafische Auswertung einer linearen Funktion

- Die Anpassungsgerade ist so zu wählen, dass die Messpunkte in allen Bereichen des vorliegenden Intervalls symmetrisch zu ihr liegen. Einzelne, weit entfernte Punkte (Ausreißer) dürfen dabei unberücksichtigt bleiben, da sie, gemessen an der anzunehmenden Verteilung, *überrepräsentiert* sind und damit eine große Irrtumswahrscheinlichkeit besitzen.

Beurteilungsgrundlage ist auch hier die Zufälligkeit der einzelnen Werte unter Annahme einer Normalverteilung.

Ist neben der zufälligen Streuung eine systematische Tendenz erkennbar (z.B. eine leichte Krümmung oder Abweichungen vom linearen Verlauf in bestimmten Bereichen), so müssen bei der Beurteilung dem physikalischen Problem oder der Messmethode angemessene, zusätzliche Kriterien berücksichtigt werden (siehe ergänzende Hinweise).

Die Parameter der Funktion können durch Auswertung der Anpassungsgeraden bestimmt werden:

- Der *Achsenabschnitt* kann direkt am Schnittpunkt der Anpassungsgeraden mit der Ordinate (die dann über dem Abzissenwert 0 errichtet sein muss) abgelesen werden.
- Zur Bestimmung der *Steigung* werden ein Steigungsdreieck festgelegt, die zugehörigen Differenzen abgelesen und der Differenzenquotient berechnet.

Das Steigungsdreieck soll möglichst groß gewählt werden, um zusätzliche Ablesefehler aus der Darstellung gering zu halten. Wegen der Zufälligkeit der einzelnen Messpunkte werden dabei im Allgemeinen keine Messpunkte selbst zur Berechnung des Differenzenquotienten herangezogen werden können. Zur Kontrolle der Auswertung soll das Steigungsdreieck mit in die Darstellung eingetragen werden.

Bei der Bestimmung der Parameter ist zu berücksichtigen, dass die Variablen physikalische Größen sind, und somit auch die Parameter (Achsenabschnitt, Steigung) Einheiten tragen.

Grafische Fehlerbestimmung

Zur grafischen Bestimmung der Fehler wird eine zweite Anpassungsgerade eingetragen, die den *Grenzfall* des linearen Zusammenhangs wiedergibt (*Grenzgerade*) (Abb. 2). Die Grenzgerade soll die Bestgerade etwa in der Mitte des Punktebereichs kreuzen, so dass sowohl der Achsenabschnitt als auch die Steigung variiert werden. Die Wahl der Grenzgeraden muss sich dabei kritisch an der *Streuung*, den *Fehlerbalken* und eventuellen *systematischen Anteilen* beim Punkteverlauf orientieren (im Rahmen des Praktikums ist es ausreichend, nur eine der beiden möglichen Grenzgeraden festzulegen).

- Das Fehlerintervall Δy des Achsenabschnitts wird direkt durch die Grenzgerade auf der Ordinate (y -Achse) als Differenz zwischen Best- und Grenzwert markiert.
- Als Fehler der Steigung wird die Differenz der Steigungen der Bestgeraden und der Grenzgeraden angegeben.

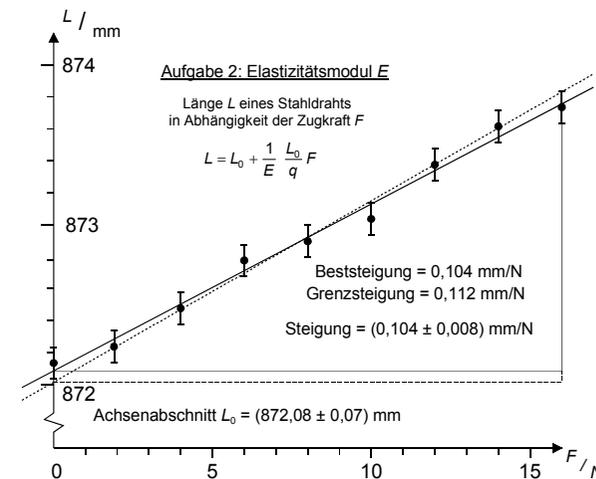


Abb. 2 Grafische Auswertung einer linearen Funktion. Konstante Fehler $\Delta l = 0,1$ mm und $\Delta F = 0,001$ N (kleiner als die Zeichengenauigkeit). Qualitativ wird ein linearer Zusammenhang gut wiedergegeben. Die Streuung der Messwerte und die geschätzten Fehler (Fehlerbalken) sind konsistent. Anstiegsquotienten:

$$\text{Steigung} = \frac{(873,74 - 872,08) \text{ mm}}{16 \text{ N}} = 0,1038 \text{ mm N}^{-1}$$

$$\text{Grenzsteigung} = \frac{(873,80 - 872,01) \text{ mm}}{16 \text{ N}} = 0,1119 \text{ mm N}^{-1}$$

Eine Messung ist als konsistent zu betrachten, wenn Fehlerbalken und Streuung von etwa gleicher Größe sind. Zu kleine Fehlerbalken lassen auf unberücksichtigte Fehleranteile oder eine falsche oder knappe Fehlerabschätzung schließen. Zu große Fehlerbalken deuten wieder auf inkorrekte Fehlerabschätzungen oder auf zusätzliche systematische Fehler hin.

Aus statistischer Sicht müsste als Kriterium die Anzahl der Messwerte berücksichtigt werden, was in eine visuelle Beurteilung aber nur schwer einbezogen werden kann. Grafische Auswertungen liefern daher in der Regel zu große Fehler.

Auswertung nichtlinearer Funktionen

Nichtlineare Funktionen können in vielen Fällen durch Wahl geeigneter Variablen (*Substitution*) oder durch eine rechnerische *Transformation* formal linearisiert werden.

Variablensubstitution

Die Parabel $s = a t^2$ wird linear, wenn s nicht über t , sondern über t^2 aufgetragen wird. Die "Projektion" $K = K_0 \cos \alpha$ wird linear (im Bereich für $\alpha = 0$ bis $\pi/2$), wenn K nicht über α , sondern über $\cos \alpha$ aufgetragen wird.

Exponentialfunktionen (einfachlogarithmische Darstellung)

Häufig sind e-Funktionen der Form $y = C_0 e^{-kx}$ auszuwerten, wobei eine Linearisierung der Exponentialfunktion durch eine logarithmische Transformation der Funktionsgleichung erreicht werden kann:

$$y = C_0 e^{-kx} \mid \ln \Rightarrow \ln y = \ln C_0 - kx.$$

Die Funktion wird formal linear, wenn der *Logarithmus* der Variablen y gegen x aufgetragen wird (in mathema-

tischer Strenge dürften nur reine Zahlen, d.h. die Verhältnisse y/C_0 logarithmiert werden. Es ändert sich jedoch nichts am Ergebnis, wenn die Maßzahlen von y logarithmiert werden).

Wegen der häufigen Anwendung ist Netzpapier erhältlich, dessen Ordinate logarithmisch geteilt ist (*einfach logarithmisches Papier*), so dass die y -Werte direkt und ohne Berechnung der Logarithmen eingetragen werden (und vom Leser nachvollzogen werden) können. Dem Papier sind dekadische Logarithmen zugrunde gelegt, so dass eine Einheit im logarithmischen Maßstab immer einer *Dekade* der Ausgangsgröße entspricht. Die absolute Lage der logarithmischen Achse ist (wie bei linearen Teilungen auch) zunächst unbestimmt und muss durch den Bereich der Messwerte festgelegt werden.

Auswertung und Fehlerbestimmung erfolgen grundsätzlich wie bei einer linearen Funktion. Auf zwei wichtige Punkte (Fehlerquellen!) soll jedoch hingewiesen werden:

- Bei der Bestimmung der Ordinatendifferenz muss berücksichtigt werden, dass durch Verwendung des logarithmischen Maßstabs die Achsen-Maßzahlen nicht die Logarithmen, sondern die Ausgangswerte selbst sind. Für die Berechnung des Differenzenquotienten können der Darstellung somit nur (zwei) y -Werte (y_1, y_2) entnommen werden, die für die Berechnung des Anstiegs dann logarithmiert werden müssen:

$$-k = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\Delta x} = \frac{\ln \frac{y_2}{y_1}}{\Delta x}$$

Da die Beurteilung des Zusammenhangs durch die grafische Darstellung (Festlegung einer Anpassungsgeraden und des Anstiegsdreiecks durch zwei Punkte) und die rechnerische Auswertung des Anstiegs unabhängig voneinander sind, wird man für die Auswertung natürliche Logarithmen wählen, um den Exponentialkoeffizienten (k) direkt zu erhalten (siehe Beispiel im Anhang).

- Auch die Konstruktion der Grenzgeraden erfordert eine besondere Betrachtungsweise. Eine typische Eigenschaft des logarithmischen Maßstabs ist die zunehmende Stauchung im großen und Streckung im kleinen Wertebereich. Dadurch nimmt (bei kon-

stanten absoluten Fehlern) die Streuung der Messwerte und die Größe der Fehlerbalken mit kleiner werdenden Werten stark zu. Entsprechend muss die Lage der Ausgleichsgeraden und der Grenzgeraden mehr an den größeren Messwerten mit ihrer besseren Genauigkeit (ihrem *größeren Gewicht*) orientiert werden.

Abb. 3 zeigt ein Beispiel für eine logarithmische Darstellung und Auswertung.

Doppellogarithmische Darstellungen

Potenzfunktionen mit beliebigem Exponenten können durch eine doppellogarithmische Darstellung linearisiert werden.

Ergänzende Hinweise

In vielen Fällen stößt eine formalistische und unkritische Anwendung der angegebenen Grundsätze auf Grenzen. Unerwartete Kurvenverläufe machen eine kritische Diskussion der Messung notwendig; sie haben immer einen Grund, der herausgefunden werden muss. Ein unkritisches Aufgeben der Beurteilung (*"es ist etwas Falsches herausgekommen"*) geht an der elementaren Problemstellung vorbei, aus Messungen und Beobachtungen eine Aussage abzuleiten. Gekrümmte Kurvenverläufe bei linearen Erwartungen lassen auf systematische Mess-einflüsse oder unzutreffende theoretische Vorstellungen schließen. Sehr unsystematische Abweichungen sind schwieriger zu erklären und lassen eher Fehler bei den Messungen oder Auswertungen vermuten.

Beispiel

Logarithmische Auftragung des Stromes über der Zeit bei einer Kondensatorentladung. Die Messfehler der Zeit- und Stromwerte betragen 0,5 ms bzw. 1 mA:

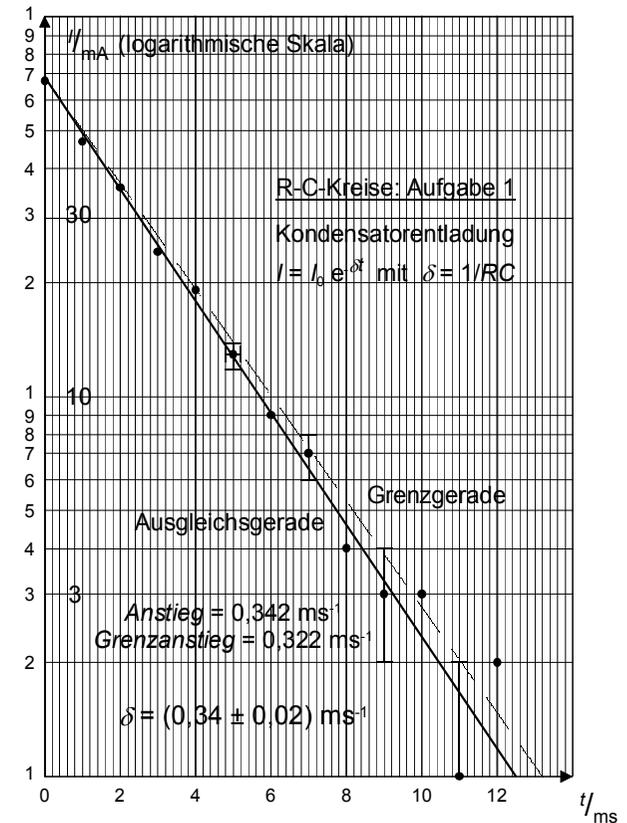


Abb. 3: Auswertung einer Exponentialfunktion

$$\text{- Steigung} = \delta = \frac{\ln \frac{67 \text{ mA}}{1,1 \text{ mA}}}{12 \text{ ms}} = 0,342 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{- Grenzsteigung} = \delta + \Delta\delta = \frac{\ln \frac{67 \text{ mA}}{1,4 \text{ mA}}}{12 \text{ ms}} = 0,322 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{Ergebnis: } \delta = (0,34 \pm 0,02) \text{ ms}^{-1}$$

| | |
|--|----|
| ANLAGE III PHYSIKALISCHE GRÖSSEN UND EINHEITEN | NP |
|--|----|

Physikalische Größen

Als physikalische Größe bezeichnet man eine eindeutig verabredete bzw. definierte und grundsätzlich messbare Eigenschaft von physikalischen Objekten und Erscheinungen, mit deren Hilfe physikalische Vorgänge beschrieben werden können. Beispiele sind *Länge, Zeit, Geschwindigkeit, Kraft, Arbeit und Energie, elektrische Spannung, magnetische Feldstärke, Temperatur*, usw.

Die physikalischen Gesetzmäßigkeiten stellen Zusammenhänge zwischen den Größen her, durch die neue (abgeleitete) Größen aus vorhandenen Ausgangsgrößen gewonnen werden. Zurückgehend kann man auf diese Weise sämtliche beobachtbaren physikalischen Größen auf einige wenige Grundgrößen zurückführen. Durch die Gesetzmäßigkeiten sind die Rollen von Ausgangs- und abgeleiteten Größen nicht vorgegeben, und es wurden aus praktischen bzw. messtechnischen Gründen folgende Größen als Grundgrößen mit ihren Einheiten als *SI-Basiseinheiten* durch Vereinbarung festgelegt:

| | | |
|----------------------------------|---------------|--------------|
| Länge l , | Einheit 1 m | (Meter); |
| Masse m , | Einheit 1 kg | (Kilogramm); |
| Zeit t , | Einheit 1 s | (Sekunde); |
| Elektrische Stromstärke I , | Einheit 1 A | (Ampere); |
| Temperatur T , | Einheit 1 K | (Kelvin); |
| Stoffmenge n , | Einheit 1 mol | (Mol); |
| Lichtstärke I , | Einheit 1 cd | (Candela). |

Dimensionen und Einheiten

Physikalische Größen werden durch ihre *Größenart* und ihre wertmäßige, *quantitative Angabe* charakterisiert. Die Größenart wird auch als *Dimension* bezeichnet. Die Dimensionen der Grundgrößen entsprechen den Begriffen selbst; also Länge, Masse, Zeit, Stromstärke, Temperatur, Stoffmenge und Lichtstärke. Die Dimensionen der abgeleiteten Größen ergeben sich aus den jeweili-

gen Definitionsgleichungen. Die Dimension der Beschleunigung ist demnach $Länge/Zeit^2$, die der Kraft (= Masse \times Beschleunigung) $Masse \times Länge/Zeit^2$.

Die quantitative Angabe einer physikalischen Größe erfolgt durch eine *Maßzahl* und eine *Einheit* (Maßeinheit). Die Einheiten legen (quantitative) Vergleichsgrößen fest, und die Maßzahlen sagen aus, wie oft eine Einheit in der zu beschreibenden Größe enthalten ist:

$$\text{Physikalische Größe} = \text{Maßzahl} \times \text{Einheit.}$$

Einheitensystem

Ausgehend von den Beziehungen zwischen den Größen lässt sich ein Einheitensystem aufbauen, indem man Einheiten für die Grundgrößen festlegt, und die Einheiten aller weiteren Größen als abgeleitete Einheiten aus den Verknüpfungsgleichungen herleitet. Ein derartiges Einheitensystem wird als *kohärentes Einheitensystem* bezeichnet. Es gibt seit geraumer Zeit internationale Konferenzen zur Entwicklung und Einführung eines solchen Einheitensystems. Das so geschaffene System führt den Namen *Système International d'Unités* oder kurz SI. Es setzt sich zunehmend in allen Bereichen der Naturwissenschaften und in den Gesetzgebungen der Nationalstaaten über Maße und Gewichte durch und wird auch im Praktikum ausschließlich verwendet.

Prinzipiell ist es möglich, für jede Größe beliebige und unterschiedliche Einheiten nebeneinander festzulegen. Diese Situation wird aus der historischen Entwicklung heraus noch vielfach vorgefunden. Sie hat neben der erschwerten Vergleichbarkeit den Nachteil, dass eine große Zahl von Umrechnungsfaktoren erforderlich ist, die aufwendig mit großer Genauigkeit bestimmt werden müssen. (Solche Umrechnungsfaktoren waren z.B. das mechanische und das elektrische Wärmeäquivalent).

Auf den nachfolgenden Seiten ist eine kurze Übersicht über das SI mit den Grundgrößen, einigen Ergänzungsgrößen, den Einheitenvorsätzen für Teile und Vielfache und einer Auswahl abgeleiteter Größen angegeben.

Definition der Basiseinheiten

(Zur Information, nicht zum Auswendiglernen).

Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $1/299792458$ Sekunden durchläuft.

Das Kilogramm ist die Einheit der Masse; es ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps (eines im Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) in Sèvres bei Paris aufbewahrten Zylinders von ca. 39 mm Durchmesser und gleicher Höhe aus einer Pt-Ir-Legierung).

Die Sekunde ist das 9192631770 fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

Das Ampere ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stroms, der, durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft von 2×10^{-7} N hervorrufen würde.

Das Kelvin¹⁾, die Einheit der thermodynamischen Temperatur, ist der $273,16$ te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers. (Der Nullpunkt der Celsiusskala wurde exakt zu $273,15$ K definiert.)

Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviele Einzelteilchen besteht, wie Atome in $0,012$ kg des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind. (Die Anzahl ist gleich dem Zahlenwert der Avogadro-Konstante).

Die Candela ist die Lichtstärke einer Strahlungsquelle, welche monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hz in eine bestimmte Richtung aussendet, in der die Strahlstärke $1/683$ Watt pro Steradian beträgt.

¹⁾ Temperaturen können neben K in $^{\circ}\text{C}$ angegeben werden, wobei im wissenschaftlichen Bereich die Kelvin-Skala zu bevorzugen ist. Zur Umrechnung gilt durch Definition:

$$t / ^{\circ}\text{C} = T / \text{K} + 273,15 .$$

Temperaturdifferenzen werden in Kelvin angegeben, d.h.

$$30,7 ^{\circ}\text{C} - 21,3 ^{\circ}\text{C} = 9,4 \text{ K} !$$

Wichtige Größen und Einheiten des SI

Ergänzungsgrößen (Basisgrößen siehe oben)

| | | | |
|------------|----------|--|---|
| Winkel | α | $\alpha = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}}$ | $1 \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1 \text{ rad}^{2)3)}$ (Radiant) |
| Raumwinkel | Ω | $\Omega = \frac{\text{Fläche}}{\text{Radius}^2}$ | $1 \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} = 1 \text{ sr}^{2)}$ (Steradian) |

²⁾Die Einheiten bzw. Einheitenamen Radiant und Steradian sind symbolische Namen als Hinweis auf die Größenart (Winkel, Raumwinkel), die aus der Zahlenwertangabe selbst nicht hervorgeht. In abgeleiteten Einheiten oder Einheitenverknüpfungen fallen die Einheitenbezeichnungen gegebenenfalls weg (z.B. bei Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung).

³⁾Neben der obigen Definition der Winkeleinheit als *Bogenmaß* ist das Grad-Maß gebräuchlich. Die Umrechnung ergibt sich aus dem Vollwinkel mit $2 \pi \text{ rad} = 360^\circ$ (Grad) zu $1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$ bzw. $1^\circ \approx 0,0175 \text{ rad}$.

Mechanik, Wärme, Hydrodynamik

| | | | |
|-----------------------|-----------|---|--|
| Geschwindigkeit | \vec{v} | $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ | $1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1 \text{ m s}^{-1}$ |
| Winkelgeschwindigkeit | ω | $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ | $\frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ s}^{-1}$ |
| Beschleunigung | \vec{a} | $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ | $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ m s}^{-2}$ |
| Winkelbeschleunigung | α | $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$ | $\frac{1}{\text{s}^2} = 1 \text{ s}^{-2}$ |
| Frequenz | f, ν | $f = \frac{1}{T}$ | $\frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Hz}$ (Hertz) |
| Kreisfrequenz | ω | $\omega = \frac{2\pi}{T}$ | $\frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ s}^{-1}$ |
| Impuls | \vec{p} | $\vec{p} = m \vec{v}$ | $1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}} = 1 \text{ kg m s}^{-1}$ |
| Drehimpuls | \vec{L} | $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ | $1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ |

| | | | |
|-------------------------|-----------|------------------------------------|---|
| Kraft | \vec{F} | $\vec{F} = m \vec{a}$ | $1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N}$ (Newton) |
| Drehmoment | \vec{M} | $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ | 1 N m |
| Trägheitsmoment | I | $I = \int r^2 dm$ | 1 m ² kg |
| Arbeit | W | $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ | 1 N m = 1 J (Joule) |
| Energie | E | alle Formen | 1 J (Joule) ⁴⁾ |
| Leistung | P | $P = \frac{dW}{dt}$ | $1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ W}$ (Watt) |
| Dichte | ρ | $\rho = \frac{dm}{dV}$ | $1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1 \text{ kg m}^{-3}$ |
| Druck | p | $p = \frac{F}{A}$ | $1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa}$ (Pascal) ⁵⁾ |
| Wärmekapazität | C | $C = \frac{dQ}{dT}$ | 1 J K ⁻¹ |
| Dynamische Viskosität | η | $F = \eta A \frac{dv}{dz}$ | $1 \frac{\text{N m}}{\text{m}^2 \text{ m/s}} = 1 \text{ Pa s}$ |
| Kinematische Viskosität | ν | $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ | $1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ |

⁴⁾ Im ernährungsphysiologischen Bereich findet man noch heute die überholte Energieeinheit 1 cal \approx 4,18 J.

⁵⁾ Als zwischenzeitlicher Einheitenname für 10⁵ Pa bestand die Bezeichnung 1 bar (Bar). Diese Bezeichnung wird noch häufig verwendet.

Elektrizitätslehre

| | | | |
|-------------------------|----------------|--|---|
| Ladung | Q | $Q = \int I dt$ | $1 \text{ A s} = 1 \text{ C (Coulomb)}$ |
| Elektrische Feldstärke | \vec{E} | $\vec{F} = Q \vec{E}$ | $1 \frac{\text{N}}{\text{A s}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ |
| Magnetische Erregung | H | $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$ | $1 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ |
| Magnetischer Fluss | $\vec{B}^{6)}$ | $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ | $1 \frac{\text{V s}}{\text{m}^2} = 1 \text{ T (Tesla)}$ |
| Elektrische Spannung | U | $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ | $1 \frac{\text{N m}}{\text{A s}} = 1 \text{ V (Volt)}$ |
| Elektrischer Widerstand | R | $R = \frac{U}{I}$ | $1 \frac{\text{V}}{\text{A}} = 1 \Omega \text{ (Ohm)}$ |
| Kapazität | C | $C = \frac{Q}{U}$ | $1 \frac{\text{A s}}{\text{V}} = 1 \text{ F (Farad)}$ |
| Induktivität | L | $U_L = -L \frac{dI}{dt}$ | $1 \frac{\text{V s}}{\text{A}} = 1 \text{ H (Henry)}$ |

6) Der magnetische Fluss B wird in der Literatur häufig auch als *magnetische Feldstärke* bezeichnet.

Radioaktivität und Dosimetrie

| | | | |
|-----------------|---------------|--|--|
| Aktivität | A | $A = \frac{dN}{dt}$ | $1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Bq (Bequerel)}^{7)}$ |
| Energiedosis | D_E | $D_E = \frac{E_{\text{absorbiert}}}{m}$ | $1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1 \text{ Gy (Gray)}$ |
| Ionendosis | D_Q | $D_Q = \frac{Q_{\text{ionisiert in Luft}}}{m}$ | $1 \frac{\text{C}}{\text{kg}}^{8)}$ |
| Äquivalentdosis | $D_{\dot{A}}$ | $D_{\dot{A}} = RBW D_E$ | $1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1 \text{ Sv (Sievert)}^{9)}$ |

7) Eine ältere Aktivitätseinheit ist 1 Ci (Curie) = $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq.

8) Eine ältere Einheit für die Ionendosisleistung ist 1 R (Röntgen) = $2,58 \cdot 10^{-4}$ C/kg

9) Eine ältere, im englischsprachigen Raum noch vielfach gebräuchliche Einheit für die Äquivalentdosis ist 1 rem (Rem) = 0,01 Sv.

Einheitenvorsätze für Teile und Vielfache

| | | | | | |
|------------|---------------|-----------|--|-----------|----------|
| 10^{-18} | a (Atto) | 10^{-2} | c (Zenti) | 10^3 | k (Kilo) |
| 10^{-15} | f (Femto) | 10^{-1} | d (Dezi) | 10^6 | M (Mega) |
| 10^{-12} | p (Pico) | | | 10^9 | G (Giga) |
| 10^{-9} | n (Nano) | 10^1 | D (Deka) | 10^{12} | T (Tera) |
| 10^{-6} | μ (Mikro) | 10^2 | h (Hekto) | 10^{15} | P (Peta) |
| 10^{-3} | m (Milli) | | | 10^{18} | E (Exa) |
| | | | wissenschaftlich weniger gebräuchlich und zu vermeiden | | |

Größenordnung

Unter dem Hinweis auf die *Größenordnung* versteht man *etwa innerhalb eines Faktors 10*, d.h. die charakteristische *Zehnerpotenz* des Zahlenwertes. Größenordnungsabschätzungen kennzeichnen häufig die Arbeits- und Sprechweise des Physikers und anderer Naturwissenschaftler. Werte liegen in der *gleichen Größenordnung*, wenn sie sich um weniger als den Faktor 10 unterscheiden. Die Zahlen 3247,16 und 8000 haben die gleiche Größenordnung, aber auch 8000 und 20000, nämlich 10^3 bzw. 10^4 . Die Größenordnung der Elektronenmasse ist 10^{-30} kg, ihr genauer Wert beträgt $9,10938188(72) \cdot 10^{-31}$ kg.

| | |
|--|----|
| ANLAGE IV KONSTANTEN UND FORMELZEICHEN | NP |
|--|----|

Physikalische Konstanten

Die Fehler sind in Klammern gesetzt und geben die Schwankung der letzten Stellen der Werte an. Einige Konstanten sind durch gesetzmäßige Zusammenhänge miteinander verbunden.

| | |
|---|---|
| Vakuum-Lichtgeschwindigkeit | $c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ (exakt) |
| Magnetische Feldkonstante | $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V s}}{\text{A m}} = 1,256 \dots 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ (exakt) |
| Elektrische Feldkonstante | $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,854 \dots 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ (exakt) |
| Gravitationskonstante | $G = 6,673(10) \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ |
| Plancksches Wirkungsquantum | $h = 6,626\,068\,76(52) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ |
| Elementarladung | $e = 1,602\,176\,462(63) \cdot 10^{-19} \text{ C}$ |
| Spezifische Elektronenladung | $e/m_e = 1,758\,820\,174(71) \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$ |
| Ruhemasse des Elektrons | $m_e = 9,109\,381\,88(72) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ |
| Ruhemasse des Protons | $m_p = 1,672\,621\,58(13) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ |
| Ruhemasse des Neutrons | $m_n = 1,674\,927\,16(13) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ |
| Avogadro-Konstante | $N_A = 6,022\,141\,99(47) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ |
| Universelle (molare) Gaskonstante | $R = 8,314\,472(15) \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ |
| Loschmidt-Konstante | $n_0 = N_A/V_m = 2,686\,777\,5(47) \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ |
| Molvolumen des idealen Gases unter Normalbedingungen ($T = 273,15 \text{ K}$, $p = 101,325 \text{ kPa}$) | $V_M = 22,413\,996(39) \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$ |
| Boltzmann-Konstante | $k = 1,380\,650\,3(24) \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ |

| | |
|---|--------------------------------------|
| Fallbeschleunigung im Praktikumsgebäude (1. Obergeschoss) $\beta = 52^\circ 27' 35(5)''$, $h = 59(3) \text{ m}$ | $g = 9,812\,777(5) \text{ m s}^{-2}$ |
|---|--------------------------------------|

Empfohlene Formelzeichen für physikalische Größen

Raum und Zeit

| | | | |
|------------------------|--|-----------|-------------------------------------|
| x, y, z | Kartesische Ortskoordinaten | t | Zeit |
| \vec{r} | Ortsvektor | T | Periodendauer |
| l, s | Weglänge | f, ν | Frequenz |
| A, S | Fläche | ω | Kreisfrequenz |
| V | Volumen | τ | Abklingkonstante (Zeitkonstante) |
| α, β, \dots | ebener Winkel | \vec{v} | Geschwindigkeit |
| θ, ϕ | | ω | Winkelgeschwindigkeit |
| Ω | Raumwinkel | \vec{a} | Beschleunigung |
| k | Wellenzahl | α | Winkelbeschleunigung |
| δ | Abklingkonstante (Dämpfungskoeffizient) | g | Fallbeschleunigung |
| | | c | Vakuumlichtgeschwindigkeit |

Mechanik

| | | | |
|-----------|-----------------|------------|-------------------------|
| m | Masse | ϵ | Dehnung |
| ρ | Dichte | E | Elastizitätsmodul |
| \vec{p} | Impuls | G | Schubmodul |
| \vec{L} | Drehimpuls | μ | Poisson-Zahl |
| I, J | Trägheitsmoment | η | dynamische Viskosität |
| \vec{F} | Kraft | ν | kinematische Viskosität |
| \vec{G} | Gewichtskraft | E | Energie |
| \vec{M} | Drehmoment | W | Arbeit |
| p | Druck | E_p | potentielle Energie |
| σ | Normalspannung | E_k | kinetische Energie |
| τ | Schubspannung | P | Leistung |

Thermodynamik

| | | | |
|-----|--------------------|-----------|----------------------------|
| Q | Wärme | β | Spannungskoeffizient |
| T | Kelvin-Temperatur | λ | Wärmeleitfähigkeit |
| t | Celsius-Temperatur | A | Temperaturleitfähigkeit |
| S | Entropie | C | Wärmekapazität |
| U | innere Energie | c | spezifische Wärmekapazität |
| F | freie Energie | κ | Isentropenindex c_p/c_v |
| H | Enthalpie | | |

Elektrizität und Magnetismus

| | | | |
|--------------|--|-----------|---|
| Q | Ladung | \vec{B} | magnetische Feldstärke (magnetische Flussdichte) |
| ρ | Raumladungsdichte | Φ | magnetischer Fluss |
| σ | Flächenladungsdichte | μ_0 | magnetische Feldkonstante |
| ϕ | elektrisches Potential | μ | Permeabilität |
| U | elektrische Spannung | \vec{M} | Magnetisierung |
| \vec{E} | elektrische Feldstärke | χ_m | magnetische Suszeptibilität |
| \vec{D} | dielektrische Verschiebung | \vec{J} | magnetische Polarisierung |
| ϵ | Dielektrizitätskonstante | R | Widerstand |
| ϵ_0 | elektrische Feldkonstante | ρ | spezifischer Widerstand |
| \vec{P} | elektrische Polarisierung | σ | Leitfähigkeit |
| \vec{p} | elektrisches Dipolmoment | Z | Impedanz |
| I | elektrische Stromstärke | C | Kapazität |
| \vec{j} | Stromdichte | L | Selbstinduktionskoeffizient |
| \vec{H} | magnetische Feldstärke (magnetische Erregung) | \vec{S} | Poynting-Vektor |
| | | \vec{A} | magnetisches Vektorpotential |

Atom- und Kernphysik

| | | | |
|----------|--|-----------|-------------------------------|
| e | Elementarladung | A | Nukleonenzahl |
| n | Hauptquantenzahl | Z | Ordnungszahl (Ladungszahl) |
| L, l_i | Bahndrehimpulsquantenzahl | N | Neutronenzahl |
| S, s_i | Spinquantenzahl | λ | Zerfallskonstante |
| M, m_i | Orientierungsquantenzahl (Magnetquantenzahl) | τ | mittlere Lebensdauer |
| J, j_i | Gesamt-Drehimpulsquantenzahl der Elektronenhülle | $T_{1/2}$ | Halbwertszeit |
| | | A | Aktivität |
| I, J | Kern-Spinquantenzahl | | |
| F | Gesamt-Drehimpulsquantenzahl eines Teilchens | | |

Das griechische Alphabet

Eine Reihe der großen und einige kleine Buchstaben ($\iota, \omicron, \upsilon$) stimmen mit den lateinischen Buchstaben überein oder sind ihnen so ähnlich, dass sie als Symbole keine Verwendung finden.

| | | | | | | | | |
|----------|------------|---------|-----------|------------|---------|----------|-----------------|---------|
| A | α | Alpha | I | ι | Jota | P | ρ | Rho |
| B | β | Beta | K | κ | Kappa | Σ | σ | Sigma |
| Γ | γ | Gamma | Λ | λ | Lambda | T | τ | Tau |
| Δ | δ | Delta | M | μ | My | Y | υ | Ypsilon |
| E | ϵ | Epsilon | N | ν | Ny | Φ | ϕ, φ | Phi |
| Z | ζ | Zeta | Ξ | ξ | Xi | X | χ | Chi |
| H | η | Eta | O | \omicron | Omikron | Ψ | ψ | Psi |
| Θ | θ | Teta | Π | π | Pi | Ω | ω | Omega |

| | |
|--------------------------|----|
| ANLAGE V | NP |
| KERNSTRAHLUNGSDETEKTOREN | |

Kernstrahlungsdetektoren und Meßelektronik



Geiger-Müller-Zählrohr (Auslösezählrohr)

Beim Durchgang radioaktiver Strahlung durch Materie werden durch inelastische Stöße Elektronen aus den Atomverbänden herausgeschlagen und die Atome ionisiert. Geschieht dies durch Anlegen einer Spannung innerhalb eines elektrischen Feldes, so werden sich die entstandenen freien Ladungsträger (Elektronen, Ionen) bewegen und einen Strom verursachen, der nachgewiesen werden kann.

Zählrohre sind gasgefüllte Elektrodensysteme mit koaxialer Elektrodenanordnung. Als Zählgase finden meist Edelgase Verwendung (Ne, Ar, He). Beim *Geiger-Müller-Zählrohr* (GM-Zählrohr; *Hans Geiger*; 1882-1945; dt. Physiker; *Ernst-Wilhelm Müller*; *1911; dt. Physiker; 1951 Prof. an der FU Berlin) ist die angelegte Spannung so groß (typisch 500 V), daß die durch die Strahlung gebildeten primären Ladungsträger (*Primärionisation*) in dem elektrischen Feld sehr stark beschleunigt werden und weitere Atome des Zählgases ionisieren (*Sekundärionisation*). Es entstehen *Ladungslawinen*, deren Größe unabhängig von der Primärionisation, und damit allerdings auch unabhängig von der Energie des eingefallenen Strahlungsquants ist. Durch zusätzliche *Löschgase* wird erreicht, daß der Ionisationsprozess wieder abbricht und zu keiner dauernd brennenden Gasentladung führt.

Der durch ein *Ereignis* ausgelöste, kurzzeitige Strom im Zählrohrkreis verursacht an einem Außenwiderstand R einen kurzzeitigen Spannungsabfall (Impuls), der über einen Kondensator ausgekoppelt wird. Die Impulse des GM-Zählrohrs sind wegen der hohen Gasverstärkung so groß, daß sie ohne weitere Nachverstärkung direkt einem Zählgerät zugeführt werden können.

Bei gleichbleibender Strahlungsintensität ist die Zählrate von der angelegten Spannung abhängig (Zählrohrcharakteristik). Die *Einsatzspannung* ist der untere, kritische Spannungsgrenzwert für die Lawinenbildung. Es schließt sich ein Bereich an, in dem die Zählrate nur wenig von der Spannung abhängt (*Zählrohrplateau*) und innerhalb dessen ein *Arbeitspunkt* für den Zählrohrbetrieb gewählt wird. Ein leichter Anstieg der Zählrate innerhalb dieses Plateaus wird durch eine Vergrößerung des effektiven Nachweisvolumens und durch eine mit der Spannung steigende Zahl von Fehl- und Nachentladungen verursacht. Mit noch größerer Spannung wird schließlich eine Dauerentladung ausgelöst.

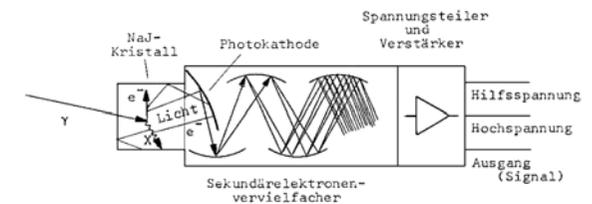
Nach dem Nachweis eines Ereignisses kommt es kurzzeitig zu einer Abnahme der Feldstärke im Zählrohr durch die Abschirmung des negativen Potentials der Zählrohrwand, durch die nur langsam abwandernde Raumladungswolke der positiven Ionen und zusätzlich durch den Spannungsabfall am Außenwiderstand. Während dieser *Totzeit* kann kein weiteres Strahlungsquant im Zählrohr nachgewiesen werden.

Der Vorteil des GM-Zählrohrs liegt im einfachen Aufbau und den großen Ausgangsimpulsen durch die hohe Gasverstärkung. Die Nachteile sind ein fehlendes *Energieauflösungsvermögen* und die Begrenzung auf kleine Zählraten wegen der vergleichsweise großen Totzeit.

Natrium-Jodid-Szintillationsdetektor

Natrium-Jodid-Szintillationsdetektoren (NaJ-Detektoren) dienen dem Nachweis von γ -Strahlung und beruhen auf dem (inneren) Photoeffekt. In einem NaJ-Kristall wird das γ -Quant durch Photoeffekt gestoppt und die gesamte Quantenenergie auf ein Elektron übertragen (Primärelektron). Das Elektron wird freigesetzt und verursacht zusammen mit dem nachfolgenden Röntgenquant eine Kaskade weiterer elektronischer Anregungsprozesse, an deren Ende durch deren spontanen Zerfall eine bestimmte Lichtmenge entsteht, die der primären - Energie äquivalent ist.

Der NaJ-Kristall wird in optischen Kontakt mit einem *Sekundärelektronenvervielfacher* gebracht (SEV; engl. Photomultiplier). An der Photokathode des SEV werden durch das Licht Elektronen im Vakuum ausgelöst, die elektrostatisch beschleunigt und an weiteren sogenannten *Dynoden* vervielfacht werden. Die dadurch entstehende Ladungsmenge wird schließlich elektronisch weiter verstärkt. Zum Prinzipaufbau eines NaJ-Detektors siehe folgende Abbildung.



Der gesamte Prozeß ist linear, so daß am Ausgang des Systems ein Impuls erscheint, dessen Höhe der Energie des einfallenden γ -Quants proportional ist und eine *Linie* verursacht (*Photolinie*; *Photopeak*).

Neben dem Photoeffekt finden im Kristall auch Compton-Prozesse statt, bei denen das γ -Quant inelastisch gestreut wird. Für den Fall, daß das gestreute Quant den Kristall wieder verläßt, wird nur ein Teil der Energie auf das System übertragen und nachgewiesen. Wegen der Abhängigkeit von den mit statistischer Verteilung auftretenden Streuwinkeln erscheint dadurch ein zusätzliches *Compton-Plateau* im Spektrum, das bei der maximalen Übertragungsenergie bei einem Streuwinkel von 180° abbricht (*Compton-Kante*).

Umgekehrt finden Compton-Streuprozesse auch in der übrigen Materie des Detektors außerhalb des Kristalls statt, wobei aufgrund der geometrischen Verhältnisse hauptsächlich zurück gestreute γ -Quanten im Bereich der maximalen Übertragungsenergie in den Nachweis-kristall eintreten und dort eine breite, sogenannten *Rückstreulinie* verursachen (Backscatter-peak). Diese Linie ist in den Spektren hier im Praktikum deutlich zu beobachten.

Die Nachweis-Impulse eines NaJ-Detektors sind im wesentlichen durch die statistischen Prozesse im SEV vergleichsweise stark verbreitert. Für das Auflösungs-

vermögen von Kernstrahlungsmessgeräten ist es üblich, als Linienbreite die volle Breite bei halben Maximum zu

berücksichtigen (engl. *FWHM* = Full Width at Half Maximum) und gegenüber der Begriffsbildung in der Optik den Kehrwert des Breite-Lage-Verhältnisses anzugeben:

$$(1) \text{ Auflösungsvermögen} = \frac{FWHM}{\text{Linienlage}}$$

Das Auflösungsvermögen von NaJ-Detektoren bewegt sich im Bereich einiger Prozent (5-10 %)

Auslösezähler

Einfache Detektoren ohne Energieauflösungsvermögen können eingesetzt werden, wenn es ausreichend ist, das integrale Spektrum zu registrieren, wobei die Weiterverarbeitung der Impulse digital durch Zähler (siehe Versuch *RADIOAKTIVER ZERFALL*) oder durch analoge Integration mit einer geeigneten Zeitkonstanten erfolgt. Dabei wird die Pulsfolge in eine der mittleren Pulsrate proportionale Spannung umgesetzt, die mit einem Voltmeter angezeigt oder mit einem Schreiber aufgezeichnet werden kann (Beispiel: Ionendosisleistungsmeßgerät am Versuch *RADIOAKTIVER ZERFALL*).

Spektrometer

Energieauflösende Systeme mit Proportionalzählrohren, Szintillationsdetektoren oder Halbleiterdetektoren als Detektoren bezeichnet man als *Spektrometer*. Sie liefern für jedes im Detektor absorbierte Strahlungsquant (α -, β -Teilchen, Röntgen- oder Gamma-Quant) einen elektrischen Impuls, dessen Höhe zu der im Detektor absorbierten Energie proportional ist. Die Breite und Form der Impulse (typisch 1 μ s bzw. einige Volt) wird durch die *Zeitkonstanten*-Bauglieder in den Verstärkerstufen des Systems bestimmt. Bestimmte Wechselwirkungsprozesse (z.B. der innere Photoeffekt) absorbieren die gesamte Quantenenergie, so daß die Impulshöhe direkt der Energie der Strahlung entspricht (Photolinie). Die Linien (Peaks) eines Spektrums sind dabei an der Häufung von Pulsen gleicher Amplitude zu erkennen. Andere Prozesse (z.B. der Compton-Effekt) absorbieren nur einen Teil der Quantenenergie und liefern kleinere Impulse einer bestimmten Verteilung, die einen zusätzlichen kontinuierlichen *Untergrund* im Spektrum verursachen. Es wird empfohlen, sich am Versuch *GAMMA-SPEKTROSKOPIE* die Impulse des Szintillati-

onsdetektors auf dem Oszilloskop bei langsamer und bei schneller Zeitablenkung anzusehen.

Die Weiterverarbeitung der Impulse, in deren Impulshöhe die Information über die Energie liegt, kann nach unterschiedlichen technischen Methoden erfolgen.

Einkanalanalysator

Besteht die Aufgabe z.B. darin, die Zeitabhängigkeit eines bestimmten Übergangs, d.h. einer bestimmten Linie zu messen, so kann dies einfach durch einen *Einkanalanalysator* erfolgen (EKA; engl. SCA von Single-Channel-Analyzer). Ein EKA besitzt zwei einstellbare Spannungswerte (*Schwellen*) und gibt genau dann einen logischen Ausgangsimpuls ab (Rechteckimpuls fester Höhe und Länge), wenn die Impulshöhe am Eingang in das *Fenster* zwischen den beiden Schwellwerten fällt. Die Ausgangsimpulse können dann gezählt oder anders weiterverarbeitet werden. Ein Nachteil des EKA liegt darin, daß damit nur eine Linie beobachtet werden kann, und daß das Fenster den kontinuierlichen Untergrund mit erfaßt. Die Aufnahme eines (differentiellen) Gesamtspektrums ist nur umständlich und zeitraubend vermittels Durchstimmen des EKA möglich (*Boxcar*-Prinzip).

Vielkanalanalysator

Einfacher und eleganter läßt sich die Aufgabe durch Verwendung eines *Vielkanalanalysators* lösen (VKA; engl. MCA von Multichannel-Analyzer). Ein VKA besteht aus einem *Analog-Digital-Wandler* (AD-Wandler; engl. ADC von Analog-Digital-Converter) und einer Vielzahl von nachgeschalteten Zählstellen (typisch 256 bis 4096 und mehr). Der ADC wandelt die Höhe eines am Eingang eintreffenden Impulses in eine Zahl um. In einem gängigen Verfahren wird durch den Impuls über eine Diode zunächst ein Kondensator aufgeladen und so die Peakhöhe fest gehalten. Danach wird der Kondensator bei konstantem Strom entladen, und die Zeit bis zur vollständigen Entladung durch Zählen von Uhrimpulsen bestimmt (typisch 100 Mhz), so daß die Anzahl dieser Impulse der Peakhöhe und damit der absorbierten Strahlungsenergie entspricht. Diese Zahl wird als Adresse eines Zählers (Kanal) interpretiert, und dessen Inhalt um eins erhöht. Die Zählerinhalte liefern so die Verteilungsfunktion der Strahlungsintensität über der Energie, die z.B. auf einem Bildschirm dargestellt oder zur weiteren Auswertung auch numerisch ausge-

geben werden kann. Weitere Bausteine eines VKA sind ein Rechenwerk zur Ablauf- und Zeitsteuerung und ein Digital-Analog-Wandler (DA-Wandler bzw. DAC) zur Umsetzung von Kanaladressen und -inhalten in analoge Spannungen zur Darstellung auf dem Bildschirm (oder einem Schreiber). Ein DAC steuert durch die Bits der digital kodierten Zahl elektronische Schalter und summiert Einzelströme zu einem Gesamtstrom, der dann an einem Widerstand eine der Zahl proportionale Spannung erzeugt.

Messungen und Auswertungen von Spektren werden durch einen VKA erheblich erleichtert. Intensitäten von Linien können durch numerische Integration der Peaks bestimmt werden, wobei Untergrundanteile aus dem Verlauf der Spektren außerhalb der Linien ermittelt werden können. Im allgemeinen muß bei den Auswertungen zusätzlich die Nachweisempfindlichkeit des Detektors berücksichtigt werden, die stark von der Energie der einfallenden Strahlung abhängig sein kann.

Der Einsatz von Vielkanalanalysatoren beschränkt sich nicht auf die Kernspektroskopie; sie werden in der modernen Meßtechnik für viele Aufgaben verwendet. Einige Beispiele: Mit einem *TPHC* (Time-to-Pulse-Height-Converter) können Pulse erzeugt werden, deren Höhe proportional zum zeitlichen Abstand zwischen einem Start- und einem Stoppimpuls ist. Die Weiterverarbeitung in einem VKA liefert dann z.B. die Lebensdauer eines Zwischenzustands in einer Gamma-Kaskade (Start und Stopp: EKA auf den entsprechenden Peaks) oder eines angeregten Atomzustands (Start: Anregungs-Laserpuls, Stop: vom Atom emittierte Strahlung). Bei der *Sampling-Technik* werden mit einem schnellen Schalter Impulse aus einer kontinuierlich veränderlichen Spannung *herausgeschnitten*; der VKA liefert dann das zugehörige Amplitudenspektrum. Ebenso wichtig sind Anwendungen, bei denen der VKA nicht im bisher betrachteten PHA-Modus (Pulse-Height-Analysis), sondern im MCS-Modus Modus betrieben wird (Multi-Channel-Scaling). Dabei werden eintreffende (Einheits-) Pulse für eine bestimmte Zeit in die einzelnen Kanäle gezählt, und damit die Abhängigkeit der Impulsrate von der Zeit oder von einer zeitlich modulierten Größe registriert. Breite Anwendung findet dies beim *Signal-*

Averaging-Verfahren, wo zur Verringerung statistischer Fehler viele Meßzyklen addiert werden. Als Beispiel seien *Sampling-Oszilloskope* erwähnt, bei denen die Sampling-Technik mit einem VKA in MCS Betrieb kombiniert wird. Die Echtzeit-Darstellung hochfrequenter Signale mit Oszilloskopen wird ab 50 MHz teuer und stößt bei 1000 MHz an technische Grenzen. Da es aber möglich ist, wesentlich schnellere Trigger- und Sampling-Schaltungen zu bauen, kann der Momentanwert eines periodisch wiederkehrenden Signals nacheinander für verschiedene Verzögerungen gegen einen Triggerzeitpunkt gespeichert werden. Die Darstellung der Kurvenform kann dann auf einem "langsamen" Oszilloskop erfolgen.

| | |
|--|----|
| ANLAGE VI STRAHLENSCHUTZANWEISUNG UND DOSIMETRIE | NP |
|--|----|

Hinweise auf Gefährdungen durch ionisierende und radioaktive Strahlungen und mögliche Strahlenschutzmaßnahmen und Grundlagen der Dosimetrie.

Strahlenschutzanweisung

Von ionisierenden und radioaktiven Strahlen können große Gefahren für Gesundheit und Leben des Menschen ausgehen. Der Schutz vor derartigen Strahlungen ist in der *Strahlenschutzverordnung (StrSchV)* gesetzlich geregelt, die dem Schutz von Personen, Einrichtungen und der Umwelt dient. Eine formale Einhaltung von Strahlenschutzmaßnahmen ist deshalb besonders wichtig, weil der Mensch keine Sinnesorgane zur Wahrnehmung dieser Strahlungen besitzt.

Strahlenwirkungen

Die wichtigsten Strahlungstypen sind α -, β -, γ -, Röntgen- (X-) und Neutronenstrahlen, die sich in ihren charakteristischen Eigenschaften, und damit hinsichtlich der Strahlenwirkungen und des Strahlenschutzes, stark unterscheiden.

α - und β -Teilchen unterliegen beim Durchgang durch Materie elektrostatischen Wechselwirkungskräften mit der Elektronenhülle und dem Atomkern. Sie werden dadurch stark abgebremst und ionisieren das Bremsmaterial. Neutronen sind ungeladen. Sie können sich relativ frei in Materie bewegen, bis sie schließlich durch einem Einfangprozess gebunden werden. Neutronen sind daher schwer abzubremesen und ionisieren auch nicht. Röntgen- und γ -Strahlen sind elektromagnetische Wellen sehr kurzer Wellenlänge bzw. großer Frequenz und hoher Quantenenergie. Sie haben eine sehr große Reichweite und ionisieren ebenfalls.

Die gesundheitsschädigenden Wirkungen der Strahlungen liegen in Zerstörungen im Bereich der chemischen Beschaffenheit und damit der mikroskopischen Struktur organischer Substanzen (Atome, Moleküle, Zellen) und deren Folgen für den Organismus. Man unterscheidet *somatische Schädigungen* (Körperschäden) und *genetische Schädigungen*. Somatische Schädigungen können direkte Folgen tragen, wie Zerstörung von Zellen und Gewebe bis hin zu verbrennungsartigen Erschei-

nungen, oder auch indirekte Folgen, wie die Erzeugung krankhaft veränderter Zellen, die später Ursache von Krankheiten sein können (Krebs).

Von der Art der Einwirkung unterscheidet man zwischen äußerer Strahlenbelastung durch Exposition (Bestrahlung) oder Kontamination (äußere Verunreinigung) und innerer Strahlenbelastung durch Inkorporation (Inhalation, Einnahme über den Magen-Darm-Trakt oder andere Verabreichungsformen im Umfeld medizinischer Diagnose oder Therapie).

Allgemeine Strahlenschutzgrundsätze

Wegen der großen Gefahren muß mit strahlungserzeugenden Einrichtungen und radioaktiven Stoffen besonders sorgfältig umgegangen werden. Die wichtigsten Grundsätze des Strahlenschutzes sind (28 StrSchV):

- jede unnötige Strahlenexposition oder Kontamination von Personen, Sachgütern oder der Umwelt zu vermeiden, und
- jede Strahlenexposition oder Kontamination von Personen, Sachgütern oder der Umwelt unter Beachtung des Standes von Wissenschaft und Technik unter Berücksichtigung aller Umstände des Einzelfalles auch unterhalb der in der Strahlenschutzverordnung festgesetzten Grenzwerte so gering wie möglich zu halten.

Die Hauptschutzmaßnahme gegen eine äußere Bestrahlung sind eine möglichst gute Abschirmung, ein möglichst großer Abstand von der Strahlungsquelle und eine möglichst kurze Aufenthaltsdauer im Bereich der Strahlung (die drei großen **A** des Strahlenschutzes).

α -Strahlung wird wegen der Größe und Ladung der Partikel stark abgebremst und hat eine sehr geringe Reichweite (typisch 40 mm in Luft und 0,03 mm in Aluminium). Die gesamte Energie der Strahlung wird damit jedoch auf einer sehr kurzen Bremsstrecke abgegeben und führt dort unter Umständen zu starken Schädigungen. α -Strahler sind aus diesen Gründen relativ ungefährlich bei äußerer Einwirkung, da die Strahlung in den oberen, nicht vitalen Hornhautschichten abgebremst wird. Sie ist andererseits sehr gefährlich bei Inkorporation, da den inneren Organen entsprechende schützende Schichten fehlen.

β -Strahlung hat ein vergleichbares Verhalten, jedoch mit deutlich größerer Reichweite (typisch 2 m in Luft und 1 mm in Aluminium). Auch bei äußerer Einwirkung

sind Strahlenschutzmaßnahmen erforderlich, wobei insbesondere die Augen eines besonderen Schutzes bedürfen, da die Augenlinse unter Einwirkung starker β -Strahlung getrübt wird. Jedoch läßt sich die Strahlung noch relativ einfach durch einige Millimeter Plexiglas oder Aluminium abschirmen.

Röntgen- und γ -Strahlen haben dagegen ein großes Durchdringungsvermögen und lassen sich nur schwer abschirmen. Zudem ist keine vollständige Absorption möglich, sondern lediglich eine exponentielle Schwächung entsprechend der Absorberdicke. Zum Abschirmen eignen sich am besten spezifisch schwere Substanzen wie Blei oder Uran. Die Halbwertsdicke von Blei (Schwächung um 50 %) beträgt für die 1,2-MeV-Strahlung von Co-60 etwa 15 mm.

Neutronen sind besonders gefährlich. Als ungeladene Teilchen erfahren sie keine elektrischen Wechselwirkungskräfte und können Materie leicht durchdringen. Wegen der gleichen Masse ersetzen sie leicht Wasserstoffkerne durch Stoß und zerstören damit das Wasserstoffatom. Da Wasserstoff ein zentraler Baustein organischer Verbindungen ist, entstehen daraus folgenschwere Veränderung des labilen, chemischen Gleichgewichts physiologischer Systeme. Schwerere Atomkerne haben große Wirkungsquerschnitte für Neutroneneinfangreaktionen, wobei es zu Kernreaktionen kommt, die ebenfalls stark schädigende Veränderungen der molekularen und chemischen Struktur zur Folge haben. Neutronen lassen sich nur schwer abschirmen; am besten noch mit gleich schweren Stoßpartnern, wie Protonen als Wasserstoffkerne in wasserstoffhaltigen Materialien wie Wasser oder Paraffin.

Dosimetrie

Aktivität

Bei der Betrachtung von Strahlengefährdungen muß zwischen Ursache und Wirkung unterschieden werden. Ursache ist ein Strahlungsfeld, das bei radioaktiven Zerfallsprozessen als *Aktivität* mit der Zahl der Zerfälle pro Zeiteinheit definiert ist:

$$(1) \text{ Aktivität } A = \frac{\text{Zahl der Zerfälle}}{\text{Zeit}}$$

Die Einheit der Aktivität ist damit:

(2) $[A] = 1 \frac{\text{Zerfall}}{\text{s}} = 1 \text{Bq}$ (Bequerel)

Energiedosis

Bringt man eine Probe, z.B. einen organischen Körper, in ein radioaktives Strahlungsfeld, so wird ein Teil der Strahlung absorbiert und verursacht physikalische oder physiologische Wirkungen. Ein anderer Teil dagegen durchläuft den Körper ohne Wechselwirkungen und damit ohne Strahlenschädigungen. Ein Maß für die Strahlenbelastung einer Probe bzw. eines Körpers ist die pro Masseneinheit absorbierte Strahlungsenergie. Diese Größe wird als *Energiedosis* D_E bezeichnet:

(3) $D_E = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{Masse Probekörper}}$

Der Anteil der absorbierten Strahlungsenergie, d.h. die Dosiswerte, hängen von der Strahlenart und der Strahlungsenergie ab und beziehen sich damit immer auf einen bestimmten Stoff als Probensubstanz. Die Einheit der Energiedosis ist:

(4) $[D_E] = \frac{1 \text{Joule}}{\text{kg}} = 1 \text{Gy}$ (Gray)

(Eine ältere Einheit ist 1 rad = 0,01 Gy). Die pro Zeiteinheit empfangene Dosis heißt *Dosisleistung*.

Ionendosis

Die Energiedosis ist schwer meßbar, da die relevanten Energiemengen sehr gering sind (eine letale Strahlendosis würde die Körpertemperatur des Menschen um etwa 2 mK erhöhen und entspräche der Wärmemenge eines Schluckes Kaffee). Als praktische Meßgröße wurde deshalb die *Ionendosis* D_Q eingeführt, die die durch Ionisation der Strahlung in Luft erzeugte Ladungsmenge angibt:

(5) $D_Q = \frac{\text{durch Ionisation erzeugte Ladung}}{\text{Masse Luft}}$

Die Einheit der Ionendosis ist damit:

(6) $[D_Q] = 1 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$

Eine ältere Einheit für D_Q ist 1 R (Röntgen) = $2,58 \cdot 10^{-4}$ C/kg.

Die Ionendosis kann direkt mit Hilfe von *Ionisationskammern* gemessen werden. Die Einheit der Ionendosisleistung ist 1 C/(kg·s) = 1 A/kg.

Der Zusammenhang zwischen Energiedosis und Ionendosis hängt generell von der Quantenenergie der Strahlung und vom Probenmaterial ab. Für Muskel- und Weichteilgewebe gilt jedoch in guter Näherung unabhängig von der Quantenenergie:

(7) $D_E = 40 \frac{\text{Gy}}{\text{C/kg}} D_Q$

Äquivalentdosis

Die biologischen Strahlenwirkungen und Strahlenschädigungen werden neben der Quantenenergie noch von der Strahlenart bestimmt, was durch einen zusätzlichen, dimensionslosen Faktor für die *relative biologische Wirksamkeit* (*RBW-Faktor*) ausgedrückt wird:

| Strahlentyp | RBW-Faktor |
|--|------------|
| γ - β -Strahlung | 1 |
| langsame Neutronen | 5 |
| α -Strahlen, schnelle Neutronen | 10 |

Das Produkt aus Energiedosis und *RBW-Faktor* ergibt die wirkungsrelevante *Äquivalentdosis* $D_{\bar{A}}$. Weil der *RBW-Faktor* dimensionslos ist, stimmen die Einheiten der beiden Größen überein, und zur Unterscheidung erhält die Einheit 1 J/kg für den Fall der Äquivalentdosis den Einheitenamen *Sievert*:

(8) $D_{\bar{A}} = \text{RBW} D_E$ und

(9) $[D_{\bar{A}}] = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1 \text{Sv}$ (Sievert)

Eine ältere Einheit der Äquivalentdosis ist 1 rem = 0,01 Sv.

Typische Strahlenbelastungen

Es gibt eine *natürliche Strahlenbelastung* aus terrestrischer Strahlung (Strahlung aus natürlichen, radioaktiven Materialien der Erdkruste) und kosmischer Strahlung (Höhenstrahlung). Sie beträgt für die Bundesrepublik Deutschland im Mittel 1,1 mSv pro Jahr. (Der Anteil von *Fallout* aus Kernwaffendetonationen ist derzeit auf weniger als 1 % der natürlichen Strahlung zurückgegangen). In bestimmten Regionen des Schwarzwalds liegt die natürliche Belastung bei etwa 2,7 mSv, und es gibt Gebiete auf der Erde, wo die natürliche Belastung aufgrund starker terrestrischer Strahlung mehr als 20 mSv pro Jahr beträgt. Es gibt umfangreiche Untersuchungen über die Strahlenwirkung auf die dort lebende Bevölkerung, wobei jedoch signifikante Auswirkungen nicht belegt werden konnten.

Die nach der gesetzlichen *Strahlenschutzverordnung* zugelassene Erhöhung der Belastung der allgemeinen Bevölkerung durch Strahlung erzeugende Einrichtungen (Röntgenanlagen, Reaktoren, Beschleuniger etc.) darf höchstens 0,3 mSv pro Jahr betragen.

Typische Strahlenbelastungen in der Röntgendiagnose sind ca. 1 mSv für eine einfache Röntgenaufnahmen (Thorax) bis etwa 100 mSv für multiple Röntgen-Kontrastaufnahmen. Typische Teilkörper-Herdbelastungen bei der Strahlentherapie (Krebsbehandlung) gehen bis zu einigen zig-tausend Sv. Der gesetzliche Grenzwert für beruflich strahlenexponierte Personen beträgt 50 mSv pro Jahr für Ganzkörperbestrahlungen. Die letale Dosis (100 % Letalität) liegt bei etwa 8 Sv Ganzkörperbelastung.

An den Versuchsplätzen, an denen mit radioaktiver Strahlung umgegangen wird, sind Dosisleistungsmeßgeräte zur Kontrolle der natürlichen Strahlung und der zusätzlichen Belastung durch die radioaktiven Quellen vorhanden.