Einführung in die Hydromechanik

Grundlagen

Der Reihe nach werden, soweit dies erforderlich erscheint, einige Grundbegriffe der Hydromechanik, die sich aus der Hydrostatik (Eigenschaften ruhender Flüssigkeiten) und der Hydrodynamik (Eigenschaften bewegter Flüssigkeiten) zusammensetzt, dargestellt. Dabei wird vorausgesetzt, dass Flüssigkeiten als praktisch inkompressibel betrachtet werden können. Innerhalb der Hydrodynamik wird von der idealen Flüssigkeit zu realen Flüssigkeiten übergegangen. Dann folgt eine relativ ausführliche Darstellung der inneren Reibung von Flüssigkeiten und der Verfahren zur Messung der Viskosität (die Viskosität ist entscheidend für die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit und für den Flüssigkeitstransport durch Leitungen). Danach erfahren Sie, was stationäre, laminare und turbulente Strömungen sind. Ausgehend von einem einfachen Flüssigkeitsstromkreis (bestehend aus Pumpe und Verbraucher) werden schließlich Leitungssysteme behandelt, und es wird der einfache Flüssigkeitsstromkreis mit einem einfachen elektrischen Stromkreis verglichen.

Gewicht, spezifisches Gewicht, Massendichte

Das Gewicht F_g eines Körpers (Volumen V, Masse m) ist darstellbar als Produkt Masse mal Erdbeschleunigung g, $F_g = mg$

$$\frac{F_g}{V} = \gamma \quad \text{heißt spezifisches Gewicht, die Einheit ist} \quad [\gamma] = \mathrm{N/m^3}$$

$$\frac{m}{V} = \rho \quad \text{heißt Massendichte, die Einheit ist} \quad [\rho] = \mathrm{kg/m^3}$$

Entsprechend $F_g = mg$ gilt dann $\gamma = \rho g$.

Druck

Die Größe Druck p ist definiert als die zu einer Fläche A senkrechte Kraft $F_\perp$, dividiert durch diese Fläche.

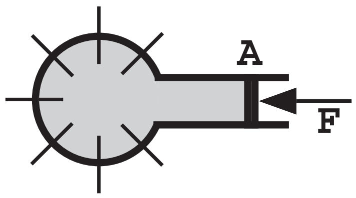
$$p = \frac{F_\perp}{A} \qquad [p] = \mathrm{N/m^2} = \mathrm{Pa}\,(\text{Pascal}) \qquad 10^2\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{hPa}\,(\text{Hektopascal})$$

Zum Bsp. beträgt der Schweredruck von $1\,\mathrm{mm}$ Hg-Säule $1{,}33\,\mathrm{hPa} = 1\,\mathrm{Torr}$ (s. Schweredruck). Druckmesser heißen Manometer.

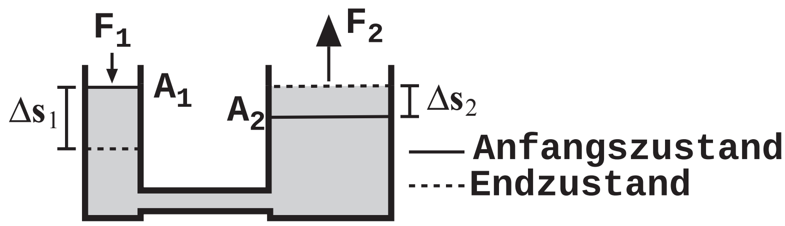
Flüssigkeiten sind praktisch inkompressibel

Im Prinzip hängt das Volumen einer Flüssigkeit von der Temperatur und dem äußeren Druck ab. Da die Volumenänderung bei Druckänderung jedoch sehr klein ist, kann man Flüssigkeiten als inkompressibel ansehen.

Die hydraulische Kraftübertragung



(a) Flüssigkeitsgefüllter Behälter



(b) Hydraulische Presse

Abbildung 1: Zur hydraulischen Kraftübertragung.

Der Wanddruck in einem flüssigkeitsgefüllten Behälter (*Abbildung 1a*) ist (abgesehen von dem überlagerten Schweredruck) überall gleich. Darauf beruht die hydraulische Kraftübertragung, z.B. bei hydraulischen Pressen (*Abbildung 1b*) und Bremsen. Wegen der Druckgleichheit $p_1 = p_2$ gilt

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow \frac{\text{Kleine Kraft}}{\text{Kleine Fläche}} = \frac{\text{Große Kraft}}{\text{Große Fläche}}$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} \rightarrow \text{ Die Kräfte verhalten sich wie die Flächen.}$$

Wegen der Inkompressibilität, also $\Delta V_1 = \Delta V_2$ bzw. $A_1 \Delta s_1 = A_2 \Delta s_2$ (s. *Abbildung 1b*) gilt

$$p_1 \Delta V_1 = p_2 \Delta V_2 \quad \overset{\substack{\Delta V = A\,\Delta s \\ F = p\,A}}{\Longrightarrow} \quad F_1 \Delta s_1 = F_2 \Delta s_2$$

Druck mal Volumenänderung links
gleich
Druck mal Volumenänderung rechts

Kleine Kraft mal großem Weg
gleich
große Kraft mal kleinem Weg

Häufig formuliert man die rechte Aussage auch so: Was an Kraft gespart wird, muss an Weg zugelegt werden, und umgekehrt. Beide Gleichungen besagen Energieerhaltung.

Der Schweredruck einer Flüssigkeit

Für den Schweredruck der Flüssigkeit auf den Boden des Gefäßes (s. *Abbildung 2*) gilt

$$\begin{aligned} p &= \frac{F_g}{A} = \frac{\gamma_f\, V}{A} \\ &= \frac{\gamma_f\, H\, A}{A} = \gamma_f\, H \\ &= \rho_f\, g\, H \end{aligned}$$

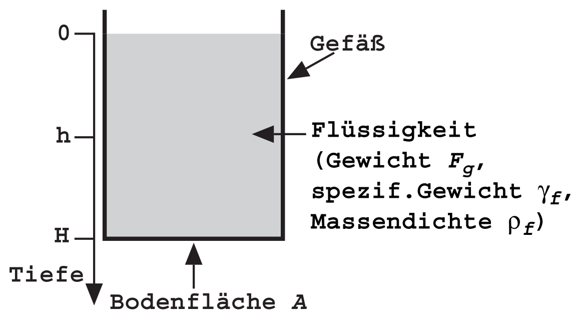


Abbildung 2: Gefäß mit Flüssigkeit.

Entsprechend gilt für den Schweredruck der Flüssigkeit in der Tiefe h unter der Flüssigkeitsoberfläche:

$$p = \gamma_f \, h = \rho_f \, g \, h$$

Wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit ist ρ_f konstant. Daher ist $p \propto \rho$; der Schweredruck einer Flüssigkeit ist proportional zur Höhe der darüber befindlichen Flüssigkeitssäule.

Größe des atmosphärischen Normaldrucks

Der atmosphärische Normaldruck p_0 ist gleich dem Schweredruck von 760 mm Hg-Säule, wozu man 760 Torr sagt, bzw. gleich dem Schweredruck von 10 m Wassersäule.

$$\begin{aligned} p_0 &= \rho_{\mathrm{Hg}} \, g \, 760 \text{ mm} \\ &= \rho_{\mathrm{H_2O}} \, g \, 10 \text{ mm} \end{aligned}$$

Der Auftrieb

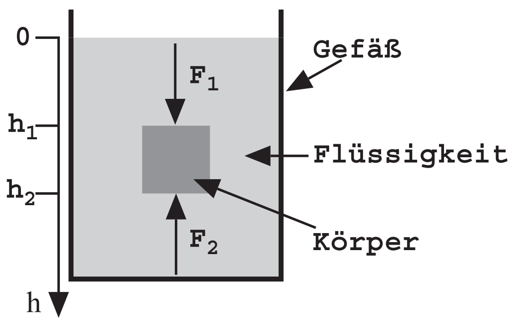


Abbildung 3: Körper in Flüssigkeit.

Befindet sich ein Körper (*Abbildung 3*) in einer Flüssigkeit, so ist die Kraft F_2 auf ihn von unten größer als die Kraft F_1 auf ihn von oben, der Körper erfährt daher einen Auftrieb

$$F = F_2 - F_1$$

Auftrieb, wenn der Körper vollständig in die Flüssigkeit eintaucht:

$$\begin{aligned} \Delta F &= (p_2 - p_1) \, A \\ &= \gamma_f \, (h_2 - h_1) \, A \\ &= \gamma_f \, V_k \end{aligned}$$

Auftrieb, wenn der Körper nur teilweise in die Flüssigkeit eintaucht:

$$\Delta F = \gamma_f \, V_{k \text{ in } f}$$

mit $V_{k \text{ in } f}$ als eintauchendes Körpervolumen.

In beiden Fällen gilt: Der Auftrieb ist gleich dem Gewicht der vom Körper verdrängten Flüssigkeit.

Sinken, Schweben, Aufsteigen

Auf einen in einer Flüssigkeit (γ_f) vollständig untergetauchten Körper (γ_k, V_k) wirkt

nach unten die Gewichtskraft	$F_g = \gamma_k \; V_k$
nach oben der Auftrieb	$\Delta F = \gamma_f \; V_k$.

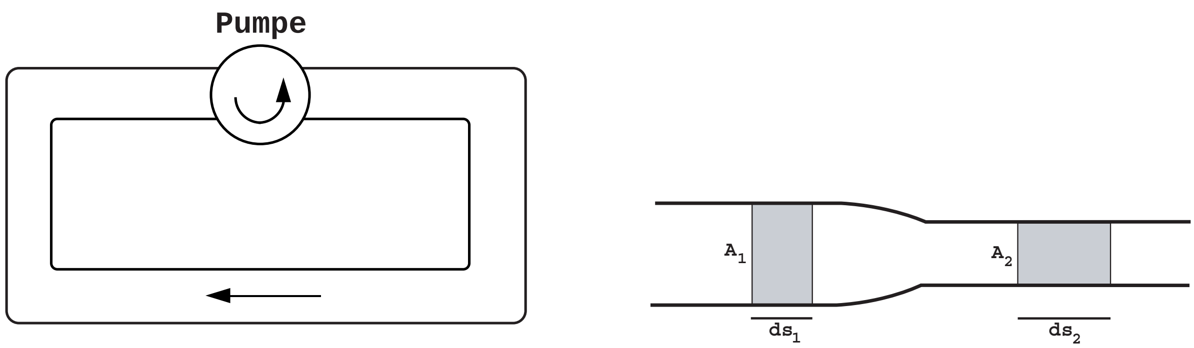
Der Körper sinkt, wenn	$\gamma_k > \gamma_f$
schwebt, wenn	$\gamma_k = \gamma_f$
steigt auf, wenn	$\gamma_k < \gamma_f$.

Schwimmen

Ein schwimmender Körper taucht nur noch teilweise in die Flüssigkeit ein, und zwar so weit, dass der Auftrieb und die Gewichtskraft dann gleich gross sind.

Während wir bisher nur Eigenschaften ruhender Flüssigkeiten kennengelernt haben (Hydrostatik), werden wir uns im folgenden mit Eigenschaften bewegter Flüssigkeiten beschäftigen (Hydrodynamik).

Volumenstrom, Volumenstromstärke



(a) Flüssigkeitsstromkreis

(b) Volumenstrom

Abbildung 4: Veranschaulichung des Volumenstroms und der Volumenstromstärke.

Voraussetzung dafür, dass eine Flüssigkeit strömt, ist eine Druckdifferenz Δp. In dem abgebildeten Flüssigkeitsstromkreis (*Abbildung 4a*) wird diese Druckdifferenz durch eine Pumpe erzeugt.
Flüssigkeitsströmungen werden beschrieben durch die Größe Volumenstromstärke I = Volumenstrom $\dot{V}$.

$$I = \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} = \dot{V} \qquad [I] = \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

Herzvolumenstrom

Der Herzvolumenstrom beträgt bei $\Delta p = 160\,\mathrm{hPa}$ ca. $6\,\mathrm{l\,min}^{-1}$

Kontinuitätsgleichung

Die Volumenstromstärke einer inkompressiblen Flüssigkeit ist unabhängig vom Leistungsquerschnitt. Es gilt (s. *Abbildung 4b*):

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 \\ \frac{\mathrm{dV}_1}{\mathrm{dt}} &= \frac{\mathrm{dV}_2}{\mathrm{dt}} \\ A_1 \frac{\mathrm{ds}_1}{\mathrm{dt}} &= A_2 \frac{\mathrm{ds}_2}{\mathrm{dt}} \\ A_1\, v_1 &= A_2\, v_2 \end{aligned}$$

Verhältnisse beim Blutkreislauf

Die Querschnittsfläche der Aorta beträgt etwa 3,5 cm^2, die aller Kapillaren etwa 3500 cm^2. Als Folge davon fließt das Blut in den Kapillaren etwa 1000 mal langsamer als in der Aorta, was von großer Bedeutung ist für den Stoffwechsel.

Die ideale Flüssigkeit

Abbildung 5: Ein Zuwachs an kinetischer Energie ist begleitet von einer betragsgleichen Abnahme an potentieller Energie (Energieerhaltung).

Als ideale Flüssigkeit bezeichnet man eine Flüssigkeit, wenn sie strömend keine Wärme erzeugt. Im Fall einer strömenden idealen Flüssigkeit gilt für die Größe Energie unter der Voraussetzung eines abgeschlossenen Systems

$$E_{ges} = E_k + E_p = const.$$

mit E_{ges} Gesamtenergie, E_p potentielle Energie und E_k kinetische Energie.
Aus dem Energieerhaltungssatz folgt mit $E_{ges} = p_{ges}\, \Delta V$ und unter der Voraussetzung der Inkompressibilität $\Delta V = A_1\, \Delta s_1 = A_2\, \Delta s_2$:

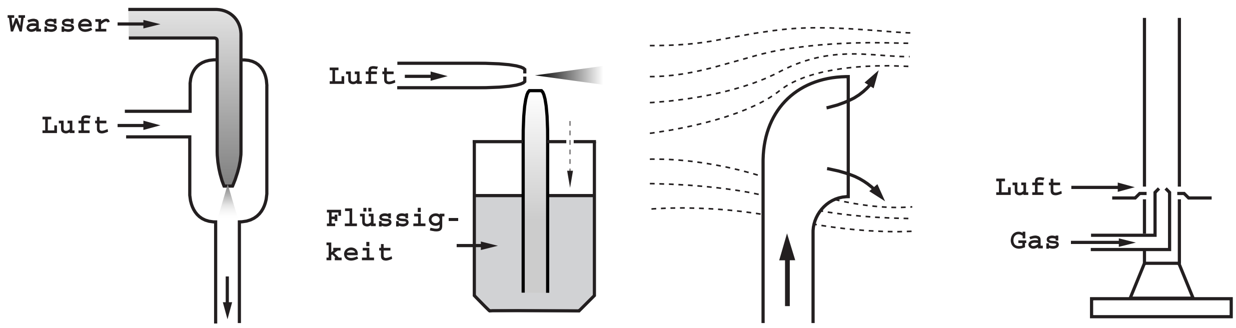
$$\begin{aligned} p_{ges}\, \Delta V &= p_{st}\, \Delta V + \frac{1}{2}\, m\, v^2 \\ &= p_{st}\, \Delta V + \frac{1}{2}\, \rho_f\, \Delta V\, v^2 \\ p_{ges} &= p_{st} + \frac{1}{2}\, \rho_f\, v^2 \end{aligned}$$

Die Bernoullische Gleichung

$$p_{ges} = p_{st} + \frac{1}{2}\rho_f v^2$$

In dieser Form heißt der Energieerhaltungssatz Bernoullische Gleichung. Sie besagt, dass im Fall einer idealen Flüssigkeit der längs einer Leitung konstante Gesamtdruck aus zwei Anteilen besteht: dem statischen Druck p_{st} und dem Staudruck $(\rho_f/2)\ v^2$. Der statische Druck kann in einem seitlich an der Leitung angebrachten Rohr als Schweredruck der darin befindlichen Flüssigkeitssäule gemessen werden. Der Staudruck lässt sich mit dem Prandtlschen Staurohr messen.

Anwendung der Bernoullischen Gleichung



(a) Wasserstrahlpumpe (b) Zerstäuber (c) Schiffsentlüfter (d) Bunsenbrenner

Abbildung 6: Darstellung einiger Anwendungen der Bernoullischen Gleichung.

Sämtliche Anwendungen in *Abbildung 6* nutzen den verminderten Druck im Gebiet höherer Strömungsgeschwindigkeit.

Reale Flüssigkeiten

Die Strömung einer realen Flüssigkeit ist immer mit der Entwicklung von Wärme verbunden. Grund dafür ist die Reibung der Flüssigkeitsteilchen untereinander.
Drückt man über einen Kolben (s. *Abbildung 7*) eine reale Flüssigkeit aus einem Vorratsgefäß durch ein Rohr mit offenem Auslauf, so kann wegen der inneren Reibung die Flüssigkeit nicht beliebig schnell ausfließen, die Reibung erzeugt einen Strömungswiderstand, und der sich aus Stempeldruck und Schweredruck zusammensetzende Gesamtdruck nimmt längs des Rohres ab.

Die Viskosität

Die innere Reibung einer strömenden Flüssigkeit wird beschrieben durch die Materialgröße Viskosität η , die man wie folgt definieren kann: Um eine Platte (Fläche A) in einer Flüssigkeit (Viskosität η) im Abstand d von einer festen Wand mit konstanter Geschwindigkeit v zu bewegen, braucht man die Kraft

$$F = \eta A \frac{v}{d} \qquad \text{(Newtonsche Gleichung)}$$

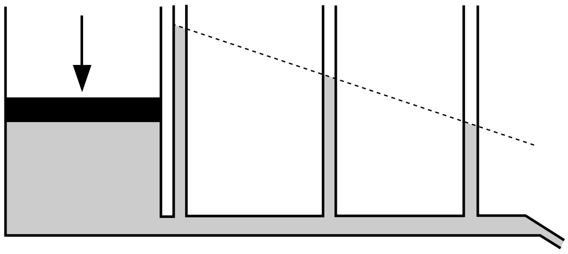


Abbildung 7: Durch einen Kolben erzeugter Druck.

Um eine Kugel (Radius r) durch eine Flüssigkeit (Viskosität η) im Abstand von einer festen Wand mit konstanter Geschwindigkeit v zu bewegen, braucht man die Kraft

$$F = 6\,\pi\,\eta\,r\,v \qquad \text{(Stokessches Gesetz)}$$

η heißt Koeffizient der inneren Reibung oder Viskosität, $^1/_\eta$ heißt Fluidität.

$$\begin{aligned} [\eta] &= \mathrm{Ns/m^2} &&= \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}} \\ 10^{-1}\,\mathrm{Ns/m^2} &= 1\,\mathrm{g\,cm^{-1}\,s^{-1}} &&= 1\,\mathrm{P}\,\text{(Poise)} \end{aligned}$$

Aus praktischen und historischen Gründen wird häufig die Einheit Poise verwendet.
Wenn $\eta \neq 0$, heißt eine Flüssigkeit real; $\eta = 0$ definiert die ideale Flüssigkeit.
Die Viskosität ist temperaturabhängig: mit steigender Temperatur nimmt die Viskosität einer Flüssigkeit ab.

Viskosimeter

Als Viskosimeter bezeichnet man Messgeräte zur Bestimmung der Viskosität.

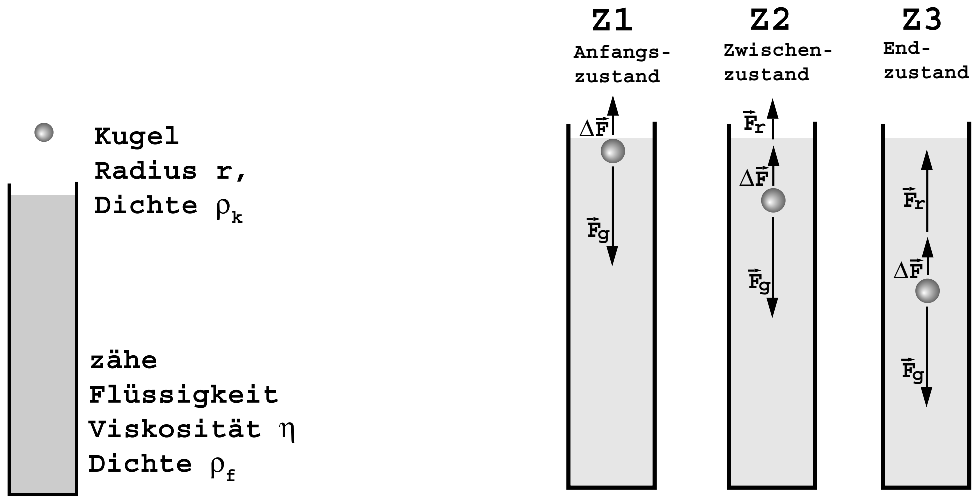
Das Kugelfallviskosimeter

Das Kugelfallviskosimeter besteht aus einem mit der zu untersuchen den Flüssigkeit gefüllten zylindrischen Gefäß und einer Kugel. Gemessen wird die Zeit, in der die Kugel in der Flüssigkeit eine bestimmte Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchfällt.

Das Kapillarviskosimeter

Beim Kapillarviskosimeter wird die zu untersuchende Flüssigkeit durch eine Kapillare geleitet. Gemessen wird die Zeit, in der ein bestimmtes Flüssigkeitsvolumen durch die Kapillare strömt.

Fall einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit



(a) Aufbau (b) unterschiedliche Zustände

Abbildung 8: Kugelfallviskosimeter

Z1: $F_g - \Delta F$ beschleunigt die Kugel, die Geschwindigkeit wächst
Z2: Proportional zur wachsenden Geschwindigkeit wächst die Reibungskraft F_r, die die Wechselwirkung der Kugel mit der Flüssigkeit beschreibt. Die beschleunigende Kraft wird dadurch kleiner und damit die Beschleunigung, d.h. die Geschwindigkeitszunahme pro Zeit.
Z3: Durch Zunahme von F_r hat sich ein Kräftegleichgewicht eingestellt, die beschleunigend Kraft ist zu Null geworden, die Geschwindigkeit hat den konstanten Wert v_e angenommen. Man spricht im Endzustand von einem dynamischen Kräftegleichgewicht.

Fällt die Kugel in der Flüssigkeit, so wirken auf sie die drei Kräfte (s. *Abbildung 8*)

$$\begin{array}{rcl} \text{Gewicht} & F_g & = \gamma_k\, V_k \\ \text{Auftrieb} & \Delta F & = \gamma_f\, V_k \\ \text{Reibungskraft} & F_r & = 6\,\pi\,\eta\,r\,v \end{array}$$

Im Endzustand ist $F_g - \Delta F = F_r$ bzw.

$$\begin{aligned} \gamma_k\, V_k - \gamma_f\, V_k &= 6\,\pi\,\eta\,r\,v_e \\ \rho_k\, g\, V_k - \rho_f\, g\, V_k &= 6\,\pi\,\eta\,r\,v_e \\ \eta &= \frac{2}{9}\,\frac{(\rho_k - \rho_f)\; g\, r^2}{v_e} \end{aligned}$$

Diese Beziehung ermöglicht die Berechnung von η, wenn man v_e gemessen hat.

Die Strömung als Geschwindigkeitsfeld

Strömungen sind gekennzeichnet durch eine örtlich und zeitlich veränderliche Geschwindigkeit $\vec{v}\,(\vec{r}, t)$ des strömenden Mediums; man spricht von einem Geschwindigkeitsfeld.

Stationäre Strömungen

Strömungen heißen stationär, wenn die Strömungsgeschwindigkeit an jeder Stelle des Raumes zeitlich konstant ist; dann ist $\vec{v}$ nicht mehr explizit von der Zeit abhängig, $\vec{v}\,(\vec{r})$.

Stromlinien

Stationäre Strömungen werden häufig durch Stromlinien dargestellt. Das sind Linien, deren Richtung die Richtung von $\vec{v}$ angibt und deren Dichte ein Maß ist für $|\vec{v}|$.

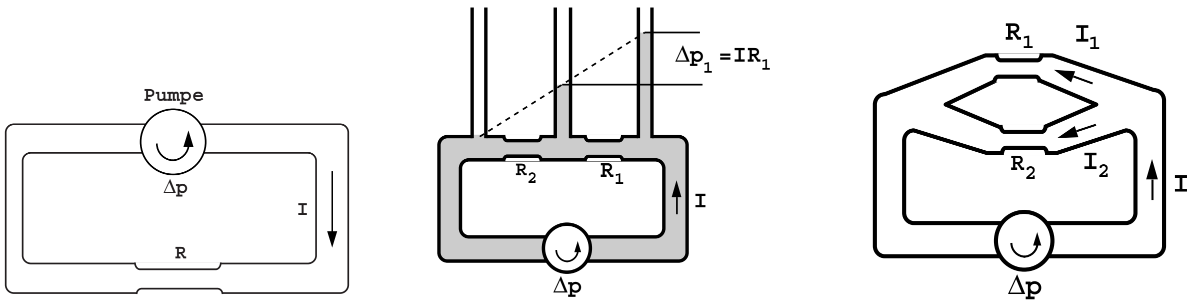
Laminare Strömungen

Bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten gleiten benachbarte Flüssigkeitsschichten aneinander vorbei, ohne sich zu durchmischen. Diese Art der Flüssigkeitsbewegung heißt laminare Strömung. Laminare Strömungen sind also Strömungen ohne Wirbel. Im menschlichen Blutkreislauf strömt das Blut fast überall laminar.

Turbulente Strömungen

Bei größeren Strömungsgeschwindigkeiten gleiten benachbarte Flüssigkeitsschichten nicht mehr aneinander vorbei, sondern sie durchmischen sich. Diese Art der Flüssigkeitsbewegung heißt turbulente (wirbelige) Strömung.
Der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung geschieht bei umso höherer Geschwindigkeit, je größer die Viskosität der Flüssigkeit ist. Dies beruht darauf, dass die zu Wirbeln führenden Strömungen durch größere Viskosität gedämpft werden.

Der Strömungswiderstand



(a) Strömungswiderstand (b) in Reihe (c) parallel

Abbildung 9: Verschiedene Anordnungen von Strömungswiderständen.

Die Größe Strömungswiderstand R (*Abbildung 9a*) ist definiert als Druckdifferenz durch Volumenstromstärke.

$$R = \frac{\Delta p}{I} \qquad [R] = \mathrm{Ns/m^5}$$

R^{-1} heißt Strömungsleitwert. Δp ist die von der Pumpe erzeugte Druckdifferenz oder der Druckabfall an R.

Strömungswiderstände in Serie werden addiert (*Abbildung 9b*):

$$\begin{aligned} \Delta p &= \Delta p_1 + \Delta p_2 \\ I\,R &= I\,R_1 + I\,R_2 \\ R &= R_1 + R_2 \end{aligned}$$

Parallele Strömungswiderstände werden reziprok addiert (*Abbildung 9c*):

$$
\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 \\
\frac{\Delta p}{R} &= \frac{\Delta p}{R_1} + \frac{\Delta p}{R_2} \\
\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}
\end{aligned}
$$

Die Kennlinie $I\,(\Delta p)$

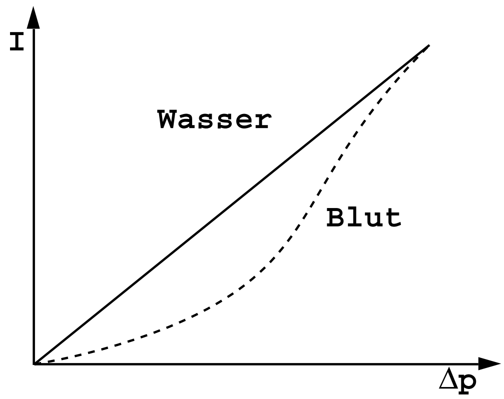


Abbildung 10: Die Kennlinien einer Leitung.

Erzeugt man zwischen den Enden einer Leitung, in der sich eine Flüssigkeit befindet, verschiedene Druckdifferenzen Δp_1, Δp_2, ... so misst man verschiedene Volumenströmungsstärken I_1, I_2, ... Die Kurve $I\,(\Delta p)$ heißt Kennlinie der Leitung (*Abbildung 10*).

Das Ohmsche Gesetz für Flüssigkeitsströmungen

Im allgemeinen ist die Kennlinie einer Leitung keine Gerade. Doch gilt bei nicht zu großen Druckdifferenzen und konstanter Temperatur für viele Flüssigkeiten

$$I \propto \Delta p \quad \text{bzw.} \quad R = \text{const.}$$

Dies ist das sogenannte Ohmsche Gesetz für Flüssigkeitsströmungen.

Newtonsche Flüssigkeiten

Flüssigkeiten, für die $I \propto \Delta p$ bei $\Delta T = 0$, heißen Newtonsche Flüssigkeiten. Wasser ist eine Newtonsche Flüssigkeit, Blut eine nicht-Newtonsche. Beim Blut ist die Viskosität η vom Druck abhängig. Und damit ist auch der Strömungswiderstand R vom Druck abhängig. Der Strömungswiderstand nimmt mit wachsender Druckdifferenz ab (*Abbildung 10*).

Das Hagen-Poisseuillsche Gesetz

Für die Geometrieabhängigkeit des Strömungswiderstandes gilt unter den Voraussetzungen $T = \text{const.}$, laminare Strömung, Newtonsche Flüssigkeit, kreisrundes Rohr:

$$R \propto \frac{l}{A^2}$$

wobei l die Rohrlänge und A die Rohrquerschnittsfläche sind. Außerdem gilt:

$$R \propto \eta$$

wobei η die Viskosität der Flüssigkeit ist.
Zusammenfassend gilt unter den genannten Voraussetzungen das Hagen-Poisseuillsche Gesetz

$$R = 8\,\pi\,\eta\,\frac{l}{A^2}$$

wobei $R = \Delta p / I$ und $A = \pi\, r^2$
R ist also unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit. Die Viskosität, und damit auch der Strömungswiderstand von Flüssigkeiten, nimmt mit steigender Temperatur ab. Bei turbulenter Strömung wird der Strömungswiderstand größer und wächst mit der Strömungsgeschwindigkeit.
Setzt man in der letzten Gleichung unter der Voraussetzung $I = \text{const.}$ $I = {}^{V}\!/_{t}$ und löst nach η auf, so erhält man

$$\eta = \frac{\pi}{8}\,\frac{r^4}{l}\,\frac{\Delta p}{V}\,t$$

Lässt man ein bekanntes Flüssigkeitsvolumen V unter einer bekannten Druckdifferenz Δp durch eine Kapillare fließen, so lässt sich bei bekanntem Kapillarradius r und bekannter Kapillarlänge l die Viskosität η aus einer Messung der Durchflussdauer t bestimmen.

Leitungssysteme

Meist strömen Flüssigkeiten durch verzweigte Leitungen (z.B. Warmwasserheizung, Blutkreislauf). Die Strömungs- und Druckverhältnisse in einem verzweigten Leitungssystem werden für inkompressible Flüssigkeiten durch die sogenannte Kirchhoffschen Gesetze für Flüssigkeitsströmungen beschrieben.

Die Kirchhoffschen Gesetze für Flüssigkeitsströmungen

Das 1. Kirchhoffsche Gesetz (Knotenregel) besagt:
Die Summe der zufließenden Volumenstärken ist gleich der Summe der abfließenden.

Das 2. Kirchhoffsche Gesetz (Maschenregel) besagt:
Die Summe der von Pumpen erzeugten Druckdifferenzen ist gleich der Summe der Druckabfälle an den Strömungswiderständen.