

Theoretische Physik 3

Elektrizität und Magnetismus

M. Karowski

WS 2010/2011

Inhaltsverzeichnis

0	Vorbemerkungen	4
0 A	Physikalische Theorie \longleftrightarrow Idealisierte Natur	4
0 B	Physikalische Größen	4
0 C	Physikalische Grundgrößen	4
I	Einleitung: Experimentelle Grundlagen und Definitionen	5
1	Elektrische Ladung und elektrisches Feld	5
1 A	Coulombkraft	5
1 B	Ladungserhaltung	5
1 C	Elektrisches Potential	7
2	Magnetisches Feld	9
2 A	Lorentzkraft	9
2 B	Faradaysches Induktionsgesetz	9
2 C	Vektorpotential	10
3	Erzeugung von elektr. und magn. Feldern	12
3 A	Gauß	12
3 B	Ampere, Biot-Savart, Oersted	14
II	Elektrodynamik	17
4	Maxwellsche Gleichungen	17
4 A	Gleichungen für die Felder \vec{E} und \vec{B}	17
4 B	Maxwellsche Ergänzung	17
4 C	Gleichungen für die Felder \vec{D} und \vec{H}	18
4 D	Spezialfälle:	18

5	Elektrostatik im Vakuum	18
5 A	Poisson- und Laplacegleichung	18
5 B	Leiter	19
5 C	Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung	20
5 D	Faraday-Käfig	20
5 E	Beispiele	21
5 F	Methode der Greenschen Funktionen	22
5 G	Multiplolentwicklung	23
6	Elektrostatik der Dielektrika	24
6 A	Differentialgleichung	24
6 B	Randbedingungen	24
6 C	Polarisation	25
6 D	Beispiel	26
6 E	Zusammenfassung	26
7	Stationäre Ströme	26
7 A	Ohmsches Gesetz	26
7 B	Magnetostatik	27
7 C	Magnetisierung	29
8	Quasistationäre Ströme	31
8 A	Induktivität	31
8 B	Transformator	32
8 C	R,L,C–Stromkreise	32
8 D	Leistung im Wechselstromkreis	33
9	Energiesatz	34
9 A	Energiedichte des elektrischen Feldes	34
9 B	Energiedichte des magnetischen Feldes	35
9 C	Poyntingscher Satz	36
9 D	Kräfte im elektromagnetischen Feld	37
9 E	Maxwellscher Spannungstensor	38
10	Elektromagnetische Wellen	40
10 A	Wellengleichung	40
10 B	Anwendung auf elektromagnetische Wellen	42
11	Wellenoptik	45
11 A	Reflexion und Brechung	45
11 B	Beugung	46
11 C	Interferenz	49
12	Retardierte Potentiale	49
12 A	Inhomogene Wellengleichung	50
12 B	Harmonisch schwingende Ladung	51
12 C	Hertzscher Dipol	51
12 D	Poyntingvektor	52

III	Einsteins „Relativitätstheorie“	53
13	Vierdimensionale Formulierung der Elektrodynamik	53
13 A	Vierervektoren und Vierertensoren	53
13 B	Maxwellsche Gleichungen	54
13 C	Viererpotential	55
14	Relativitätsprinzip und Lorentztransformationen	56
14 A	Inertialsysteme	56
14 B	Michelson Versuch	57
14 C	Gleichzeitigkeit für entfernte Orte	58
14 D	Lorentztransformationen	58
14 E	Minkowskiraum	60
14 F	Längenkontraktion, Zeitdilatation usw	61
14 G	Lorentz-Invarianz und -Kovarianz	62
14 H	Beispiele für 4-Tensoren	64
15	Relativistische Mechanik	67
15 A	Bewegungsgleichung eines Massenpunktes	67
15 B	Energie	68
15 C	Viererimpulserhaltung	68
16	Relativistische Elektrodynamik	69
16 A	Kovarianz der Maxwellgleichungen	69
16 B	Transformationsformeln	69
16 C	Ebene Wellen	71
16 D	Bewegte Materie mit $\epsilon, \mu \neq 1$	72
17	Einsteins „Allgemeine Relativitätstheorie“	74
17 A	Allgemeine Relativität - Äquivalenzprinzip	74
17 B	Nichteuklidischer Raum	75
17 C	Dynamik	75
17 D	Folgerungen	76
IV	Feldtheorie	77
18	Lagrangesche Formulierung	77
18 A	Mechanik	77
18 B	Freies relativistisches Teilchen	78
18 C	Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld	79
18 D	∞ -viele Freiheitsgrade	81
18 E	Elektromagnetisches Feld	84
19	Symmetrien und Erhaltungssätze	86
19 A	Mechanik	86
19 B	Feldtheorie	88
19 C	Elektrodynamik	89

0 Vorbemerkungen

0 A Physikalische Theorie \longleftrightarrow Idealisierte Natur

Das heißt

Physik ist eine approximative Wissenschaft

Zum Beispiel:

$$\text{Newtons Mechanik} \begin{cases} \subset \text{ Einsteins Relativitätstheorie} \subset \dots \\ \subset \text{ Heisenbergs Quantenmechanik} \subset \dots \end{cases} \subset \dots \subset \text{Physik}$$

Das soll heißen:

$$\begin{aligned} \text{falls Geschwindigkeit klein} &\Rightarrow \text{„Newton} \approx \text{Einstein“} \\ \text{falls Wirkung klein} &\Rightarrow \text{„Newton} \approx \text{Heisenberg“} \end{aligned}$$

0 B Physikalische Größen

Physikalische Größe $X = \text{reelle Zahl} \times \text{Einheit}$

Zum Beispiel: Höhe der Raumes $h = 3.6 \text{ m} = 11.5 \text{ ft} = \dots$

Dimension einer physikalische Größe $X = [X] \Rightarrow$

Klasseneinteilung der physikalische Größen: z. B. $[Höhe] = [Breite] = [Länge]$

Physikalische Größen gleicher Dimension:

$$\begin{aligned} [A] = [B] &\Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ können in gleichen Einheiten gemessen werden} \\ [A] = [B] &\Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ können addiert werden} \end{aligned}$$

es folgt: in Gleichungen haben alle Summanden die gleiche Dimension, d.h. die Einheiten können heraus gekürzt werden \Rightarrow

Gleichungen physikalischer Größen sind unabhängig von Einheiten

0 C Physikalische Grundgrößen

Länge, Masse, Zeit, elektrischer Strom
oder Länge, Masse, Zeit
oder ...

Naturgesetz \Rightarrow Relation zwischen Dimensionen und Einheiten: z.B.:

$$\begin{aligned} \text{Newton: Kraft} &= \text{Masse} \times \text{Beschleunigung} \\ \Rightarrow [Kraft] &= [Masse] \times [Länge] \times [Zeit^{-2}] \\ \text{und } 1 \text{ N} &= 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ sec}^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Coulomb: Kraft} &= \text{Ladung} \times \text{elektr. Feld} \\ \Rightarrow [Kraft] &= [Ladung] \times [\text{Spannung}] \times [Länge^{-1}] \\ \text{und } 1 \text{ N} &= 1 \text{ C} \cdot 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

Teil I

Einleitung: Experimentelle Grundlagen und Definitionen

1 Elektrische Ladung und elektrisches Feld

Eigenschaften elektrischer Felder (Erzeugung siehe §3)

1 A Coulombkraft

Definition: Ein Teilchen hat die Ladung q und ein elektrisches Felde die Feldstärke \vec{E} , wenn auf das Teilchen die Kraft wirkt

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}} \text{ „Coulombkraft“}$$

Dadurch sind q und \vec{E} nur bis auf einen Faktor definiert: $q \rightarrow q/\lambda$, $\vec{E} \rightarrow \lambda\vec{E}$, Festlegung von λ in §3 A).

Es werden 2 Konventionen benutzt:

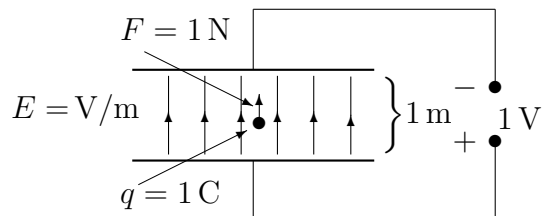
$$\left. \begin{array}{l} q \\ \vec{E} \end{array} \right\} \text{ im SI-System (MKSA)} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} q^* = q/\sqrt{4\pi\epsilon_0} \\ \vec{E}^* = \sqrt{4\pi\epsilon_0}\vec{E} \end{array} \right\} \text{ im Gauß-System (cgs)}$$

Einheiten:

Ladung: 1 Coulomb = 1 C [z.B. für Elektron $q = -e_0 = -1.602 \cdot 10^{-19}$ C]

el. Feld: $1 \frac{\text{Volt}}{\text{Meter}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

Es gilt $1 \text{ Newton} = 1 \text{ N} = 1 \text{ C} \times 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$



1 B Ladungserhaltung

Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta V}$$

Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})}{\Delta V} = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$$

Ladung im Volumen V

$$Q_V = \int_V d^3x \rho(\vec{r})$$

Erhaltungssatz: Zeitliche Änderung von Q_V

$$\frac{d}{dt}Q_V = \dot{Q}_V = - \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r})$$

∂V = Rand von V , $d\vec{f}$ = Flächenelement \times Einheitsvektor $\perp \partial V$ (nach außen)

Mathematik

Definition: Divergenz \vec{j} = Quelledichte von \vec{j} im Punkt \vec{r}

$$\boxed{\text{div } \vec{j}(\vec{r}) = \lim_{\substack{V \rightarrow 0 \\ \vec{r} \in V}} \frac{1}{V} \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r})}$$

In Kartesischen Koordinaten für $\vec{r} = 0$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{j} &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \left\{ \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y} dx dy (-j_z(x, y, 0) + j_z(x, y, \Delta z)) + \dots \right\} \\ &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \Delta x \Delta y \Delta z \left\{ \frac{\partial}{\partial z} j_z + \dots \right\} = \frac{\partial}{\partial z} j_z + \frac{\partial}{\partial y} j_y + \frac{\partial}{\partial x} j_x = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

da $j_z(x, y, \Delta z) = j_z(x, y, 0) + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} j_z + \dots$, $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{„Nabla“}$

$$\boxed{\text{div } \vec{j}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})}$$

Gaußscher Satz: Für beliebiges Volumen V gilt

$$\boxed{\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r})}$$

Beweis: Sei $V = V_1 \cup V_2$

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= \int_{V_1} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \int_{V_2} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \\ \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}) &= \int_{\partial V_1} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}) + \int_{\partial V_2} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Sei $V = V_1 \cup \dots \cup V_N$, $V_i \rightarrow 0$

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = \sum_i \int_{\partial V_i} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \rightarrow \sum_i V_i \text{div } \vec{j} \rightarrow \sum_i \int_{V_i} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

■

Anwendung auf Ladungserhaltung:

$$\text{Integralform : } \dot{Q}_V + \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0$$

⇒

$$\int_V d^3x \dot{\rho}(\vec{r}) + \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0$$

da V beliebig ⇒

$$\text{lokale Form : } \boxed{\dot{\rho}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0}$$

„Kontinuitätsgleichung“

1 C Elektrisches Potential

Im statische Fall ist $\vec{F} = q\vec{E}$ konservativ (vgl. Mechanik)

⇒ die Arbeit

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

ist unabhängig vom Weg

⇔ für geschlossenen Weg ($\partial A = \text{Rand der Fläche } A$) gilt

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

⇔ ∃ ein mechanisches Potential $V(\vec{r})$ mit $W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$

⇒ ∃ **elektrisches Potential** $\varphi(\vec{r})$

Definition: Potential

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

Elektrische Spannung zwischen \vec{r}_1 und \vec{r}_2

$$U_{12} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)$$

Einheit: 1 Volt = 1 V (vgl. §1A)

Darstellung von \vec{E} durch φ :

Für alle $\vec{r} - \vec{r}_0 = \Delta\vec{r} \rightarrow 0$ gilt

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{E} \rightarrow \Delta\vec{r} \cdot \vec{E}$$

$$\Delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) + \dots = -\Delta\vec{r} \cdot \vec{E} + \dots$$

⇒

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\text{grad } \varphi}$$

= „Gradient“ φ .

Mathematik**Definition: Rotation \vec{E}**

$$\text{rot } \vec{E} = \text{Wirbeldichte von } \vec{E}$$

Sei A eine beliebige Fläche
 \vec{n} der Normalenvektor \perp zu A

$$\text{Komponente von rot } \vec{E} \text{ in Richtung } \vec{n} = \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{E} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{E}$$

$\partial A = \text{Rand von } A$.

In Kartesischen Koordinaten für $\vec{r} = 0$ ($\vec{n} \parallel z$ -Achse):

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{E})_z &= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \left\{ \int_0^{\Delta x} dx (E_x(x, 0, 0) - E_x(x, \Delta y, 0)) + \dots \right\} \\ &= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Delta x \Delta y}{A} \left\{ -\frac{\partial}{\partial y} E_x + \frac{\partial}{\partial x} E_y \right\} = (\vec{\nabla} \times \vec{E})_z \end{aligned}$$

da $E_x(x, \Delta y, 0) = E_x(x, 0, 0) + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} E_x + \dots \Rightarrow$

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}}$$

Stokesscher Satz:

Für beliebige Fläche A gilt

$$\int_A d\vec{f} \cdot \text{rot } \vec{E} = \int_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{E}$$

Beweis: Sei $A = A_1 \cup A_2$

$$\begin{aligned} \int_A d\vec{f} \cdot \text{rot } \vec{E} &= \int_{A_1} d\vec{f} \cdot \text{rot } \vec{E} + \int_{A_2} d\vec{f} \cdot \text{rot } \vec{E} \\ \int_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{E} &= \int_{\partial A_1} d\vec{r} \cdot \vec{E} + \int_{\partial A_2} d\vec{r} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Sei $A = A_1 \cup \dots \cup A_N$, $A_i \rightarrow 0 \Rightarrow$ Beh. wie oben beim Gaußschen Satz. ■

Anwendung auf elektrisches Potential:

Bedingungen für die Existenz des Potentials $\varphi(\vec{r})$ mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$:

$$\text{Integral-Bedingung : } \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 0$$

$\Leftrightarrow \int_A d\vec{f} \cdot \text{rot } \vec{E} = 0$ wegen Stokes, da A beliebig \Leftrightarrow

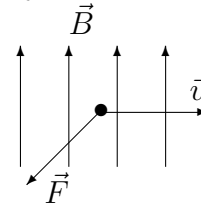
$$\text{lokale Bedingung : } \boxed{\text{rot } \vec{E} = 0}$$

2 Magnetisches Feld

2 A Lorentzkraft

Definition: Ein magnetisches Feld hat die magnetische Induktion \vec{B} , wenn auf ein im Feld bewegtes Teilchen mit der elektrischen Ladung q die Kraft wirkt

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}} \quad \text{„Lorentzkraft“}$$



Beispiele:

i) Kraftdichte auf eine Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$

$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

ii) Kraft auf Strom $I = \int_A df j$ im Draht $\perp \vec{B} = \text{const.}$

$$F = |\vec{F}| = \left| \int_V d^3x \vec{j}(\vec{r}) \right| = \int_0^L dl \int_A df j B = L I B$$

2 B Faradaysches Induktionsgesetz

Drahtring ∂A gegen Magnet bewegt \Rightarrow Strom im Draht,
d.h. ein elektrisches Feld wird entlang ∂A induziert mit der Spannung

$$U = -\dot{\phi}$$

mit

$$U = \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{E}$$

und

$$\phi = \int_A d\vec{f} \cdot \vec{B} = \text{„magn. Induktionsfluss“}$$

Annahme: \vec{E} auch vorhanden ohne Draht \Rightarrow **Faradaysches Induktionsgesetz**

$$\text{Integralform : } \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{E} + \int_A d\vec{f} \cdot \dot{\vec{B}} = 0$$

\Leftrightarrow mit Stokes

$$\int_A d\vec{f} \cdot \text{rot } \vec{E} + \int_A d\vec{f} \cdot \dot{\vec{B}} = 0$$

\Leftrightarrow (da A beliebig)

$$\text{lokale Form : } \boxed{\text{rot } \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0}$$

D.h. $\vec{F} = q\vec{E}$ ist nicht konservativ!!

2 C Vektorpotential

Das \vec{B} -Feld hat keine Quellen (d.h. es gibt keine magnetischen Ladungen)

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

\Leftarrow Faraday

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}}) = \frac{d}{dt} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{const}$$

wegen $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{E} = 0$. Für Magnet $\rightarrow \infty \Rightarrow \vec{B} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{const} = 0$

Mathematik

„Diracsche δ -Funktion“ (δ keine Funktion sondern Distribution)

Definition:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0) \iff \int_a^b dx \delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \in [a, b] \\ 0 & \text{if } 0 \notin [a, b] \end{cases}$$

d.h. $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $\delta(x)$ ist punktiert konzentriert bei $x = 0$. Allgemein:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - y) f(x) = f(y)$$

Entsprechend in 3-Dimensionen $\delta^{(3)}(\vec{r})$.

Satz:

$$\boxed{\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r})}$$

mit $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ „Laplaceoperator“.

Beweis:

$$\text{Formeln: } \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3, \quad \vec{\nabla} r = \vec{\nabla} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

\Rightarrow

$$-\Delta \frac{1}{r} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = \frac{3}{r^3} - \vec{r} \cdot \frac{3}{r^4} \vec{\nabla} r = 0 \quad \text{für } r \neq 0$$

$\Rightarrow \int_V d^3x \Delta \frac{1}{r} = 0$ falls $0 \notin V$ und falls $0 \in V$ gilt für kleine Kugel um 0

$$\int_V d^3x \Delta \frac{1}{r} = - \int_K d^3x \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int_{\partial K} df \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = - \int_{\partial K} df \frac{1}{r^2} = -4\pi$$

\Rightarrow mit $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$

$$\int d^3x' \Delta \frac{1}{R} f(\vec{r}') = -4\pi \int d^3x' \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) f(\vec{r}') = -4\pi f(\vec{r})$$

■

Vektorfeld:

Satz: Jedes Vektorfeld $\vec{X}(\vec{r})$ (mit $\vec{X}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ hinreichend stark) ist eindeutig Summe von Wirbel und Quellen

$$\vec{X}(\vec{r}) = \vec{X}_W(\vec{r}) + \vec{X}_Q(\vec{r}) = \text{rot} \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\text{rot} \vec{X}(\vec{r}')}{R} - \text{grad} \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\text{div} \vec{X}(\vec{r}')}{R}$$

mit $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$. Es gilt (siehe Übung)

$$\text{div} \vec{X}_W(\vec{r}) = 0, \quad \text{rot} \vec{X}_Q(\vec{r}) = 0$$

Beweis: Partielle Integrationen: für $V \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \left((\vec{\nabla} f) \cdot \vec{A} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) &= \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot f \vec{A} \rightarrow 0 \\ \int_V d^3x \left((\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot f + \vec{A} \times \vec{\nabla} f \right) &= \int_V d^3x \vec{\nabla} \times (\vec{A} f) \rightarrow 0 \\ \text{da } \vec{e} \cdot \int_V d^3x \vec{\nabla} \times (\vec{A} f) &= \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} f \times \vec{e}) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\vec{A} f \times \vec{e}) \rightarrow 0 \quad \forall \vec{e} \end{aligned}$$

falls $f \vec{A} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ hinreichend stark \Rightarrow

$$\begin{aligned} &\int d^3x' \left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{X}(\vec{r}')}{R} - \vec{\nabla} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{X}(\vec{r}')}{R} \right) \\ &= \int d^3x' \left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \frac{1}{R} \vec{X}(\vec{r}') \right) - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{R} \vec{X}(\vec{r}') \right) \right) \\ &= - \int d^3x' \Delta \frac{1}{R} \vec{X}(\vec{r}') = 4\pi \vec{X}(\vec{r}) \end{aligned}$$

da $\vec{\nabla}' R = -\vec{\nabla} R$ und $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$. ■

Anwendung auf \vec{B} -Feld

Satz: Für ein quellenfreies Feld \vec{B} existiert ein Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \vec{A} \text{ mit } \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

explizit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{B}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Eichinvarianz: \vec{A} ist nicht eindeutig: \vec{B} is invariant bei

$$\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}) = \text{„Eichtransformation“}$$

da $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}) = 0$.

Elektrisches Potential bei $\dot{\vec{B}} \neq 0$ Faraday $0 = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \dot{\vec{A}}) \Rightarrow \exists \varphi$ mit

$$\vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Zusammenfassung

Gleichungen für \vec{E} und \vec{B}

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array}}$$

3 Erzeugung von elektrischen und magnetischen Feldern

Elektrische Ladungen haben 2 Eigenschaften:

1. Elektrische und magnetische Felder erzeugen Kräfte auf Ladungen

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

2. Elektrische Ladungen erzeugen elektrische und magnetische Felder.

3 A Gauß

Coulombkraft zwischen 2 Ladungen Q und q im Abstand r

$$|\vec{F}| = \text{konst.} \frac{Qq}{r^2}$$

d.h. die Ladung Q erzeugt in ihrer Umgebung ein elektrische Feld

$$|\vec{E}| = |\vec{F}|/q = \text{konst.} \frac{Q}{r^2}$$

konst. hängt vom Material der Umgebung ab:

$$\text{konst.} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon}$$

$\epsilon =$ Dielektrizitätskonstante des Materials = 1 im Vakuum,

$\epsilon_0 =$ materialunabhängig, hängt von der Definition von q und \vec{E} ab (s. §1 A)

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{1}{4\pi c^2} 10^7 \frac{C^2}{Ns^2} \frac{C^2}{Ns^2} \text{ im SI-System (MKSA)} \\ \epsilon_0^* &= \frac{1}{4\pi} \text{ im Gaußsystem} \end{aligned}$$

Definition: Elektrische Verschiebungsdichte erzeugt durch die Ladung Q bei $\vec{r} = 0$ (im homogenen Medium)

$$\boxed{\vec{D}_Q = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}} \quad (\text{materialunabhängig})$$

$$\boxed{\vec{D}_Q = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}_Q} = \text{Materialgleichung}$$

\vec{D} -Feld einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$

$$\vec{D}_\rho = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

(gilt im homogenen Medium, Randeffekte später)

Beispiele:

i) **Monopol** bei $\vec{r} = 0$, mit Ladung q

$$\begin{aligned} \vec{D}_q &= \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{q}{4\pi} \vec{\nabla} \frac{1}{r} \quad \text{da } \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -r^{-2} \vec{\nabla} r = -\frac{\vec{r}}{r^3}. \\ \Rightarrow \vec{E}_q &= -\vec{\nabla} \varphi \quad \text{mit } \varphi_q = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \frac{1}{r} \quad \text{Coulombpotential} \end{aligned}$$

Beachte $\varphi_q = O(r^{-1})$

Allgemein:

$$\varphi_\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

ii) **Dipol** bei $\vec{r} = 0$, mit Dipolmoment $\vec{p} = q\vec{a}$

(\vec{a} infinitesimal klein, d.h. $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \frac{1}{r} - \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}\right) + \dots$)

$$\begin{aligned} \vec{D}_{\vec{p}} &= \frac{q}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} \right) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \\ \varphi_{\vec{p}} &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

Beachte $\varphi_{\vec{p}} = O(r^{-2})$

Gaußsches Gesetz für eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$: Sei Q_V die elektrische Ladung im Volumen V , dann gilt

$$\boxed{\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{D}_\rho = Q_V} \quad \text{Integral Form}$$

$$\stackrel{\text{Gauß}}{\Leftrightarrow} \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_\rho = \int_V d^3x \rho$$

$$\stackrel{V \text{ beliebig}}{\Leftrightarrow} \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_\rho = \rho} \quad \text{lokale Form}$$

d.h. die elektrischen Ladungen sind die Quellen des D-Feldes.

Beweis: Sei $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{R}/R^3 = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} 1/R = -\Delta 1/R = 4\pi\delta^{(3)}(\vec{R}) \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_\rho = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \int d^3x' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\vec{r}') 4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \rho(\vec{r})$$

Beispiel: Ladungsverteilung einer Punktladung

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \Rightarrow \rho(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{q}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{q}{4\pi} \Delta \frac{1}{r} = q\delta^{(3)}(\vec{r}) \end{aligned}$$

3 B Ampere, Biot-Savart, Oersted

(stationärer Fall $\dot{\rho} = 0$ d.h. $\dot{\vec{D}} = 0$)

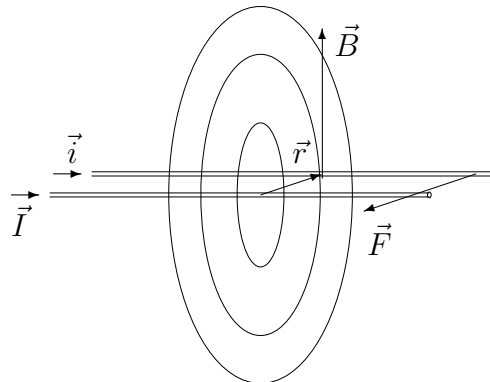
Ampere: Kraft zwischen 2 stromführenden Leitern (parallel und ∞ -lang) im Abstand r mit Strom I und i :

$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}} = \frac{F}{L} \propto \frac{Ii}{r}$$

d.h. der Strom I erzeugt in seiner Umgebung ein

magnetisches Feld $B_I = \frac{F}{Li} \propto \frac{I}{r}$

$$\vec{B}_I \propto \frac{\vec{I}}{r} \times \frac{\vec{r}}{r}$$



Biot-Savart: Magnetisches Feld von einem „Stromstück“ $I\Delta\vec{s}$ bei $\vec{r} = 0$

$$\Delta\vec{B}_I = \text{konst.} \frac{I\Delta\vec{s}}{r^2} \times \frac{\vec{r}}{r}$$

durch Integration $I \times \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Rightarrow$ Ampere. Die Konstante hängt vom Material der Umgebung ab

$$\text{konst.} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mu$$

$\mu =$ „Permeabilität“ des Materials = 1 im Vakuum,

$\mu_0 =$ materialunabhängig

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \text{ im SI-System (MKSA)} \\ \mu_0^* &= \frac{4\pi}{c^2} \text{ im Gaußsystem} \end{aligned}$$

Definition: „Magnetische Feldstärke“ erzeugt durch das Stromstück $I\Delta\vec{s}$ bei $\vec{r} = 0$ (im homogenen Medium)

$$\boxed{\Delta\vec{H}_I = \frac{I}{4\pi r^2} \Delta\vec{s} \times \frac{\vec{r}}{r}} \quad (\text{materialunabhängig})$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}} \quad = \text{Materialgleichung}$$

\vec{H} -Feld einer Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$

$$\vec{H}_j = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

(gilt im homogenen Medium, Randeffekte später)

mit $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ wegen $\vec{\nabla} 1/R = -\vec{R}/R^3$ auch

$$\vec{H}_j = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}$$

Oerstedesches Gesetz für Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ (auch Amperesches Durchflutungsgesetz genannt)

($\dot{\rho} = 0$) Sei I_A der Strom, der durch die Fläche A fließt, dann gilt

$$\boxed{\int_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{H}_j = I_A} \quad \text{Integral Form}$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{\Leftrightarrow} \int_A d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}_j = \int_A d\vec{f} \cdot \vec{j}$$

$$\stackrel{A \text{ beliebig}}{\Leftrightarrow} \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H}_j = \vec{j}} \quad \text{lokale Form}$$

d.h. die elektrischen Ströme sind die Wirbel des \vec{H} -Feldes.

Bew. dass Biot-Savart \Rightarrow Oersted: mit $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$ und partieller Integration gilt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H}_j &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \left(\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{R} \vec{j}(\vec{r}') \right) - \Delta \frac{1}{R} \vec{j}(\vec{r}') \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \left(\vec{\nabla} \frac{1}{R} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')) + 4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \right) \\ &= \vec{j}(\vec{r}) \end{aligned}$$

da $\vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}') = -\vec{\nabla}' f(\vec{r} - \vec{r}')$, $\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{R})$ und $\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') = -\dot{\rho}(\vec{r}') = 0$.

Beispiele:

i) ∞ -lange Spule mit Windungszahl/Länge = N/L und Strom I . Sei A eine Fläche $L \times d$, die die N Windungen senkrecht schneidet. Da $H_{\text{außen}} = 0 \Rightarrow$

$$\int_A d\vec{f} \cdot \vec{j} = NI = \int_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{H} = LH_{\text{innen}}$$

$$H_{\text{innen}} = \frac{N}{L}I$$

ii) Stomschleife ∂A : $d^3x \vec{j}(\vec{r}') \rightarrow I d\vec{r}'$ mit $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, für $\vec{r} \notin A$ gilt

$$\vec{H}_I = \frac{I}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int_{\partial A} d\vec{r}' \frac{1}{R} = \frac{I}{4\pi} \vec{\nabla} \int_A d\vec{f}' \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{R}$$

Bew: Sei \vec{e} konstanter Vektor

$$\begin{aligned} & -\vec{e} \cdot \int_{\partial A} \left(d\vec{r}' \times \vec{\nabla} \frac{1}{R} \right) \stackrel{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})}{=} - \int_{\partial A} d\vec{r}' \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{e} \right) \frac{1}{R} \\ & \stackrel{\text{Stokes}}{=} - \int_A d\vec{f}' \cdot \vec{\nabla}' \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{e} \right) \frac{1}{R} \stackrel{bac = cab}{=} \int_A d\vec{f}' \cdot \left(\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{e} \right) - \vec{e} \Delta \right) \frac{1}{R} \\ & = \vec{e} \cdot \vec{\nabla} \int_A d\vec{f}' \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{R} \text{ für } \vec{r} \notin A \end{aligned}$$

wegen $\vec{\nabla}' \rightarrow -\vec{\nabla}$ und $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$; da \vec{e} beliebig \Rightarrow Beh.

iii) Magnetischer Dipol: speziell kleine Stromschleife $A = |\Delta \vec{f}| \rightarrow 0$ bei 0

$$\vec{H}_I = \frac{I}{4\pi} \vec{\nabla} \int_A d\vec{f}' \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{R} \rightarrow \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\vec{m} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

mit

$$\boxed{\vec{m} = I \Delta \vec{f}} = \text{„magnetisches Moment“}$$

(siehe elektr. Dipol. §3 A)

Zusammenfassung

Gleichungen für \vec{D} und \vec{H} (falls $\dot{\rho} = 0$)

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} \end{aligned}}$$

Teil II

Elektrodynamik

4 Maxwell'sche Gleichungen

4 A Gleichungen für die Felder \vec{E} und \vec{B}

Faraday's Induktionsgesetz } \Leftrightarrow „Maxwell'sche Gleichungen“ für \vec{E} und \vec{B} :
 \neq magnetischer Monopole }

$$\left[\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \exists \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\vec{r}, t) \\ \vec{A}(\vec{r}, t) \end{array} \right. \text{ mit } \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array} \end{array} \right]$$

:

Eichinvarianz: \vec{E} und \vec{B} sind invariant bei der Eichtransformation:

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \dot{\Lambda} \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \end{aligned}$$

mit $\Lambda(\vec{r}, t)$ beliebig.

Beweis:

$$\begin{aligned} \vec{E}' - \vec{E} &= \vec{\nabla}\dot{\Lambda} - \vec{\nabla}\dot{\Lambda} = 0 \\ \vec{B}' - \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Lambda = 0 \end{aligned}$$

4 B Maxwell'sche Ergänzung

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\rho} \neq 0 \\ \text{Ladungserhaltung} \\ \text{Oersted-gesetz} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Widerspruch zur Ladungserhaltung} \\ \dot{\rho} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Maxwell: } \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{H} \rightarrow \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}}$$

$\Rightarrow \dot{\rho} = \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{D}}$ o.k. wegen Gauß.

4 C Gleichungen für die Felder \vec{D} und \vec{H}

Die Erzeugung von elektromagnetischen Felder durch Ladungen und Ströme wird beschrieben durch die „Maxwellsche Gleichungen“ für \vec{D} und \vec{H} :

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$	Gaußsches Gesetz
$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j}$	Oerstedtsches Gesetz

$$\Rightarrow \text{Kontinuitätsgleichung: } \dot{\rho} = \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{D}} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{j}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}!$$

Materialgleichungen:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

4 D Spezialfälle:

- i) $\frac{\partial}{\partial t} \cdot = 0, \vec{j} = 0$: Statik
- ii) $\frac{\partial}{\partial t} \cdot = 0$: Stationärer Fall, Gleichstrom,...
- iii) $\dot{\vec{D}}$ klein: Quasistationärer Fall, Wechselstrom,...
- iv) Allgemein: Elektromagnetische Wellen, Licht,...

5 Elektrostatik im Vakuum

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot = 0, \vec{j} = 0, \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

5 A Poisson- und Laplacegleichung

Maxwell

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{Gleichung für das elektrische Potential } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\text{Poissongleichung } \Delta \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

speziell $\rho = 0$

$$\text{Laplacegleichung } \Delta \varphi = 0$$

5 B Leiter

$$\vec{j} = 0$$

Im Leiter sind Ladungen frei beweglich \Rightarrow

1) **E-Feld** $\vec{E} = 0$ im Leiterinneren, $\varphi = \text{const}$ auf Leiter,

denn falls $\vec{E} \neq 0 \Rightarrow$ Kraft auf Ladungen im Leiter \Rightarrow Strom $\vec{j} \neq 0$

2) **Ladungsdichte** $\rho = 0$ im Leiterinneren,

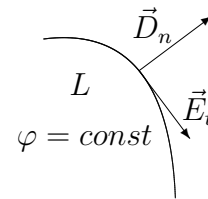
denn falls $\rho \neq 0 \Rightarrow \vec{E} \neq 0$

Aber \exists Oberflächenladungsdichte

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A}$$

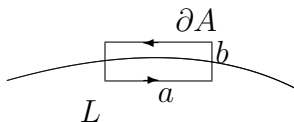
3) **Randbedingungen** auf Leiteroberfläche

- a) Tangentialkomponente $\vec{E}_t = 0$
 b) Normalkomponente $D_n = \sigma$



Beweis:

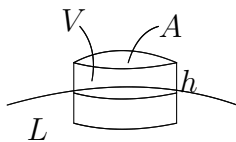
a) „schmales Rechteck“



$$0 = \int_A d\vec{f} \cdot \text{rot } \vec{E} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{E} = a (E_t^{\text{aus}} - E_t^{\text{in}}) + O(b)$$

$$\text{mit } b \rightarrow 0, a \rightarrow 0 \Rightarrow E_t^{\text{aus}} = 0$$

b) „fache Dose“



$$Q_V = \int_V d^3x \rho \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{D} = A (D_n^{\text{aus}} - D_n^{\text{in}}) + O(h)$$

$$\text{mit } h \rightarrow 0, A \rightarrow 0 \Rightarrow D_n^{\text{aus}} - D_n^{\text{in}} = Q_V/A = \sigma$$

■

Allgemein gilt an Grenzflächen

- a) \vec{E}_t ist stetig: $\vec{E}_t^{(1)} - \vec{E}_t^{(2)} = 0$
 b) D_n hat Sprung: $D_n^{(1)} - D_n^{(2)} = \sigma$

5 C Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung

Mathematik

Greensche Sätze:

1. $\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \phi \vec{\nabla} \psi = \int_V d^3x \left((\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \psi) + \phi \Delta \psi \right)$
2. $\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) = \int_V d^3x (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi)$

Beweis:

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \phi \vec{\nabla} \psi \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi)$$

■

Anwendung auf Poisson-Gleichung

Satz: Gegeben eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und ein Leiter L :

Die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

mit den Randbedingungen $\varphi(\vec{r}) = \varphi_L = \text{const}$ für $\vec{r} \in L$ ist eindeutig, wenn $\varphi(\vec{r}) \lesssim 1/r$ für $r \rightarrow \infty$ und

- a) φ_L gegeben oder
- b) Q_L gegeben ist

Beweis: Seien φ und φ' Lösungen und $\phi = \varphi - \varphi' \Rightarrow \Delta \phi = 0 \Rightarrow$ mit Green 1 ($V = \mathbb{R}^3 - L$):

$$\int_V d^3x (\vec{\nabla} \phi)^2 = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \phi \vec{\nabla} \phi = 0 \quad \text{weil}$$

a) $\phi = 0$ auf ∂V

b) $\phi = \phi_L = \text{const}$ auf $L \Rightarrow$

$$\phi_L \int_{\partial L} d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \phi = -\phi_L \int_{\partial L} d\vec{f} \cdot (\vec{E} - \vec{E}') = \frac{1}{\epsilon_0} \phi_L \int_{\partial L} df (\sigma - \sigma') = \frac{1}{\epsilon_0} \phi_L (Q_L - Q'_L) = 0$$

für a) und b) $\Rightarrow \vec{\nabla} \phi = 0 \Rightarrow$ in V ist $\phi = \text{const} = 0$, da $\phi \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ ■

5 D Faraday-Käfig

Sei $\rho = 0$ in V umgeben von $L \Rightarrow \varphi = \text{const} \Rightarrow \vec{E} = 0$ in V ,
da $\varphi = \text{const}$ eindeutige Lösung von $\Delta \varphi = 0$.

5 E Beispiele

i) Punktladung: Lösung von

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r})$$

ist

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \text{ d.h. } \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

ii) Beliebige Ladungsverteilung: Lösung von

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$$

ist

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \text{ d.h. } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

iii) Plattenkondensator: zwei parallele Ebenen

Potential φ unabhängig von x, y

Lösung von $\Delta\varphi = \varphi''(z) = 0$

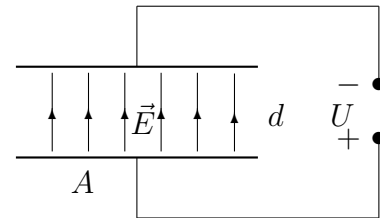
ist $\varphi = -az + b$, $a, b = \text{const}$

Spannung $U = \varphi(0) - \varphi(d) = ad$

Feld: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = -\epsilon_0 \vec{\nabla}\varphi = \epsilon_0 a \vec{e}_z$

Flächenladungsdichte: $\sigma = D_n = \epsilon_0 a = \epsilon_0 U/d$

Ladung: $Q = A\sigma = A\epsilon_0 U/d$



$$Q = CU \text{ „Kondensatorgleichung“}$$

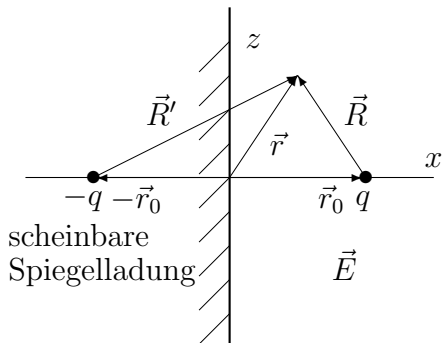
mit

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \text{ „Kapazität“ des Kondensators.}$$

Einheit: $1 \frac{\text{As}}{\text{V}} = 1 \text{ F} = 1 \text{ Farad.}$

iv) Influenzladungen - das Spiegelungsprinzip

Punktladung vor leitender Ebene (geerdet: $\varphi_L = 0$), mit $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{R}' = \vec{r} + \vec{r}_0$



$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

d.h. Potential von Ladung q bei $\vec{r}_0 + \text{Leiter}$

\equiv Potential der Ladung q bei $\vec{r}_0 +$ Potential der Ladung $-q$ bei $-\vec{r}_0$

Beweis: i) $\Delta\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)$ für $x > 0$

ii) $\varphi = 0$ auf Leiter, da $R = R'$ für $x = 0$ ■

Das Spiegelungsprinzip gilt auch für andere Leiter.

5 F Methode der Greenschen Funktionen

Mathematik Gegeben Gebiet G mit Rand ∂G : Inhomogene Differentialgleichung (hier $x \equiv \vec{x}$)

$$\Delta u(x) = -f(x)$$

Definition: $g(x, y)$ heißt die Greensche Funktion zu G , wenn

$$\begin{aligned}\Delta_y g(x, y) &= -\delta(x - y) \\ g(x, y) &= 0 \quad \text{für } y \in G\end{aligned}$$

(d.h. Dirichlet Randbedingung)

Satz: Die Lösung von $\Delta u(x) = -f(x)$ in G mit der Randbedingung $u(x)$ gegeben auf ∂G ist

$$u(x) = \int_G dy g(x, y) f(y) - \int_{\partial G} df_y u(y) \nabla_y g(x, y)$$

Beweis: Green 2

$$\int_{\partial V} df (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = \int_V dx (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi)$$

$$\psi = u(y), \quad \phi = g(x, y)$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} df_y (g(x, y) \nabla u(y) - u(y) \nabla_y g(x, y)) &= \int_V dy (g(x, y) \Delta u(y) - u(y) \Delta_y g(x, y)) \\ - \int_{\partial V} df_y \cdot u(y) \nabla_y g(x, y) &= \int_V dy (-g(x, y) f(y) + u(x) \delta(x - y))\end{aligned}$$

■

Beispiele:

i) $G = \mathbb{R}^3$ Greensche Funktion

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

ii) $G =$ Halbraum $x > 0$

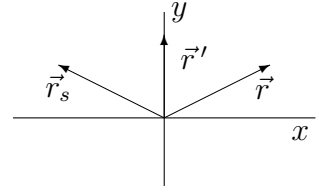
$$\begin{aligned}\Delta u(\vec{r}) &= 0 \\ u(\vec{r}) &= \begin{cases} a & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -a & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Greensche Funktion

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_s - \vec{r}'|} \right), \quad \vec{r}_s = \text{Spiegelpunkt von } \vec{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} g(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{x - x'}{R^3} - \frac{x_s - x'}{R^3} \right), \quad \text{für } x' = 0$$

$$R = (x^2 + (y - y')^2 + z^2)^{1/2}$$



$$u(\vec{r}) = - \int_{\partial G} d\vec{f}' u(\vec{r}') \vec{\nabla}' g(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$= \frac{a}{4\pi} \int_0^\infty dy' \int_{-\infty}^\infty dz' \left(\frac{2x}{(x^2 + (y - y')^2 + z^2)^{3/2}} - (y' \rightarrow -y') \right), \quad y \pm y' \rightarrow y'$$

$$= \frac{a}{4\pi} 2x \int_{-y}^y dy' \int_{-\infty}^\infty dz' (x^2 + y'^2 + z'^2)^{-3/2} = \frac{a}{4\pi} 2x \int_{-y}^y \frac{2}{x^2 + y'^2} dy'$$

$$= \frac{2a}{\pi} \arctan \frac{y}{x}$$

wegen

$$\int_{-\infty}^\infty (c^2 + u^2)^{-3/2} du = \frac{2}{c^2}$$

$$x \int_0^y \frac{1}{x^2 + u^2} du = \arctan \frac{y}{x}$$

Kugel mit Radius RSpiegelpunkt für \vec{r} innen $\vec{r}_s = \vec{r} R^2 / r^2$:

Greensche Funktion

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\frac{r}{R}}{|\vec{r}_s - \vec{r}'|} \right)$$

mit $g(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ für $\vec{r}'^2 = R^2$

5 G Multipolentwicklung

Potential einer Ladungsverteilung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

für \vec{r} groß: Taylorentwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \exp \left\{ -\vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \right\} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla})^2 \frac{1}{r} + \dots$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{r^5} + \dots$$

$$= \frac{1}{r} + \sum_i \frac{x_i x'_i}{r^3} + \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{r^5} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) + \dots$$

Es folgt

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} + \dots \right)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{Ladung} \quad q &= \int d^3x \rho(\vec{r}) \\ \text{Dipolmoment} \quad \vec{p} &= \int d^3x' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \\ \text{Quadrupolmoment} \quad Q_{ij} &= \int d^3x' \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Z.B. reiner Quadrupol

Beachte: n -ter Beitrag = $O(r^{-n})$

6 Elektrostatik der Dielektrika

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot = 0, \vec{j} = 0, \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

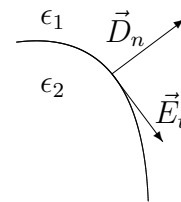
6 A Differentialgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi, \text{Gau\ss: } \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \text{Materialgl. } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \Rightarrow$$

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \rho$$

6 B Randbedingungen

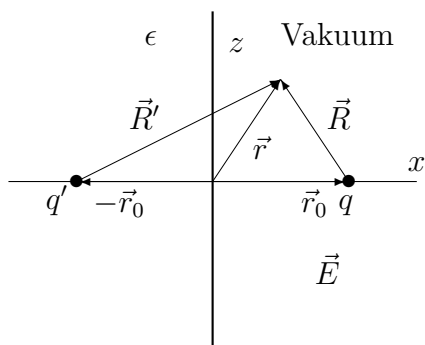
$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{E}_t \text{ ist stetig: } \vec{E}_t^{(1)} - \vec{E}_t^{(2)} &= 0 \\ \text{b) } D_n \text{ hat Sprung: } D_n^{(1)} - D_n^{(2)} &= \sigma \end{aligned}$$



(siehe §5 B)

Beispiele:

i) Ladung q vor dielektrischem Halbraum (siehe auch §5 E): Spiegelungsprinzip



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{q}{R} - \frac{q'}{R'} & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{\epsilon} \frac{q''}{R} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

mit

$$q' = q \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}, \quad q'' = q \frac{2\epsilon}{\epsilon + 1} < q$$

Beweis: zu zeigen:

1.

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \begin{cases} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

2:

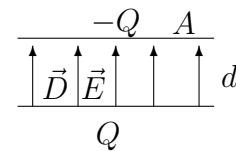
- a) \vec{E}_t ist stetig bei $x = 0$
- b) D_n ist stetig bei $x = 0$, wegen $\sigma = 0$

siehe Übung ■

ii) Plattenkondensator

Gauß $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow Q/A = \sigma = D = \epsilon_0 \epsilon E = \epsilon_0 \epsilon U/d$

$Q = CU$ mit $C = \frac{A}{d} \epsilon_0 \epsilon > C_{\text{Vakuum}}$



d.h. bei $Q =$ gegeben ist $E < E_{\text{Vakuum}}$ (falls $\epsilon > 1$)

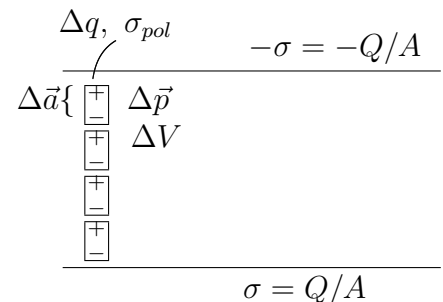
6 C Polarisation

Erklärung für $\epsilon > 1$ im Dielektrikum:

Sei ein Dielektrikum im Kondensator mit Ladung Q

Gauß $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow D = \sigma = D_{\text{Vakuum}}$

Frage: $E = E_{\text{Vakuum}} + ?$:



\vec{E} -Feld erzeugt Dipole im Material im Volumen ΔV : $\Delta\vec{p} = \Delta q \Delta\vec{a} \propto \vec{E}$ (gilt meist für \vec{E} klein) \Rightarrow Dipoldichte

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V} = \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = \text{„Polarisation“}$$

mit $\chi = \text{„Suszeptibilität“} > 0$ ($\chi = 0$ im Vakuum)

Es gilt:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}$$

d.h.

$$\epsilon = 1 + \chi > 1$$

Beweis: \vec{P} erzeugt „Polarisationsladungsdichte“ = σ_{pol} (Scheinladung)

$$\sigma_{\text{pol}} = \lim \frac{-\Delta q}{\Delta A} = -\lim \frac{\Delta a \Delta q}{\Delta V} = -P$$

(falls $\vec{P}(\vec{r}) \neq \text{const}$ gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{\text{pol}}$). σ_{pol} erzeugt elektrisches Feld antiparallel \vec{P} mit $\epsilon_0 \vec{E}_{\text{pol}} = -\vec{P} \Rightarrow$

E -Feld im Dielektrikum

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{Vakuum}} + \vec{E}_{\text{pol}} = \vec{E}_{\text{Vakuum}} - \vec{P}/\epsilon_0$$

\Rightarrow

$$\vec{D} = \vec{D}_{\text{Vakuum}} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{Vakuum}} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

d.h. Abschwächung $E/E_{\text{Vakuum}} = 1/\epsilon$ und Kapazitätserhöhung $C/C_{\text{Vakuum}} = \epsilon$. ■

Bemerkung: es gibt Fälle mit $\vec{P}(\vec{E}) \neq \text{const}$. \vec{E}

z.B. $\chi(\vec{E})$ wenn \vec{E} groß oder $\vec{P} \parallel \vec{E}$ oder $\vec{P}(\vec{E})$ nicht eindeutig (Ferroelektrikum)

6 D Beispiel

Kugel im homogenen Feld: $\vec{E} \rightarrow \text{const}$. \vec{E}_∞ für $r \rightarrow \infty$

$$\varphi_{\text{außen}} = -\vec{E}_\infty \cdot \vec{r} + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 \frac{\vec{E}_\infty \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\varphi_{\text{innen}} = -\frac{3}{\epsilon + 2} \vec{E}_\infty \cdot \vec{r}$$

zu zeigen: $\Delta\varphi = 0$ und \vec{E}_t , D_n stetig bei $r = R$ (siehe Übung)

Bemerkungen: a) $\vec{E}_{\text{außen}} = \text{homogenes Feld} + \text{Dipolfeld}$; b) $(\epsilon \rightarrow \infty) \Rightarrow \text{leitende Kugel}$

6 E Zusammenfassung

Mikroskopische Beschreibung: \vec{E} -Feld \Rightarrow Polarisationsladungen $\rho_{\text{pol}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_{\text{pol}})$$

Makroskopische Beschreibung: Polarisation $\vec{P} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

7 Stationäre Ströme

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot = 0, \vec{j} = \text{const}$$

7 A Ohmsches Gesetz

\vec{E} -Feld im Leiter \Rightarrow Kraft auf Ladungen im Leiter \Rightarrow Bewegung der Ladungen (wegen Reibung keine Beschleunigung sondern stationäre Bewegung) \Rightarrow Strom proportional \vec{E}

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$$

$\sigma = \underline{\text{Leitfähigkeit}}$ (materialabhängig)

Strom im Draht:

$$I = \int df j = A\sigma \frac{U}{l}$$

⇒

$$U = RI \text{ „Widerstandsgleichung“}$$

mit

$$R = \frac{l}{A\sigma} \text{ „Widerstand“}$$

SI-Einheit: 1 Ohm = 1 Ω = 1 V / A

Reibung ⇒ Joulsche Erwärmung

$$\begin{aligned} \text{Leistungsdichte} &= \lim \frac{\Delta \text{Arbeit}}{\Delta t \Delta V} \\ &= \lim \frac{\Delta q \vec{E} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t \Delta V} = \vec{E} \cdot \rho \vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

$$\text{Leistung} = N = \int d^3x \vec{E} \cdot \vec{j}$$

SI-Einheit: 1 Watt = 1 W = 1 V A = 1 J / s

Für Draht: $N = Al \cdot Ej = UI = RI^2 = U^2/R$

7 B Magnetostatik

Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Materialgleichung

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

Differentialgleichung:

Vektorpotential: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A}$ mit

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

⇒

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0 \mu} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{j}$$

im homogenen Medium ⇒

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \mu \vec{j}$$

In

$$\text{„Coulombeichung“: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

(möglich durch Umeichung $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$) ergibt sich

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_0 \mu \vec{j}}$$

entspricht der Poissongleichung in der Elektrostatik!

⇒ allgemeine Lösung (siehe §5 Eii)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

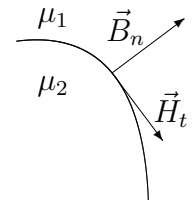
⇒

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

= Biot-Savartsches Gesetz (siehe §3B)

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{a) } B_n \text{ ist stetig: } B_n^{(1)} - B_n^{(2)} = 0 \\ \text{b) } \vec{H}_t \text{ hat Sprung: } H_t^{(1)} - H_t^{(2)} = \xi \end{array}$$



ξ = **Flächenstromdichte**

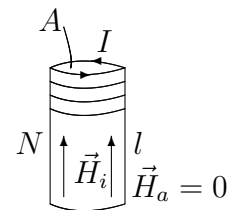
Beweis: wie in §5 B 3) und §6 B ■

Beispiel: ∞ -lange Spule mit Windungsdichte N/l , Strom I

d.h. Flächenstromdichte $\xi = IN/l$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \Rightarrow \text{Randbedingung (mit } H_t^a = 0)$$

$$\Rightarrow H = H_t^i = \xi = \frac{N}{l} I$$



Selbstinduktivität

Magnetischer Fluß durch eine Windung der Spule = ϕ_1

⇒ Fluß durch alle Windungen

$$\phi = N\phi_1 = N \int_A df B = NA\mu_0\mu H = A\mu_0\mu \frac{N^2}{l} I$$

⇒

$$\boxed{\phi = LI} \quad \text{„Spulengleichung“}$$

mit

$$\boxed{L = \text{„Selbstinduktivität“}}$$

SI-Einheit: 1 Henry = 1 H = 1 V s / A

für ∞ -lange Spule

$$L = \frac{AN^2}{l} \mu_0 \mu$$

7 C Magnetisierung

Materie in Spule mit Strom I

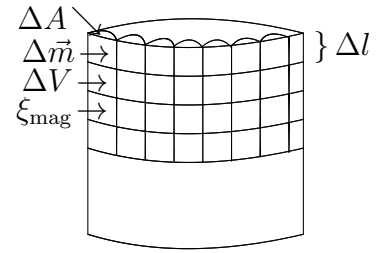
Sei Material in der Spule mit Strom I

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \Rightarrow H = \xi = H_{\text{Vakuum}}$$

Frage: $B = B_{\text{Vakuum}} + ? = \mu_0 H_{\text{Vakuum}} + ?$

B -Feld erzeugt magnetische Dipole im Material:

$$\Delta \vec{m} \propto \vec{B} \text{ in } \Delta V \Rightarrow \text{Dipoldichte}$$



$$\boxed{= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} = \vec{M} = \kappa \vec{H} = \text{„Magnetisierung“}}$$

mit $\kappa = \text{„magnetische Suszeptibilität“}$ ($\kappa = 0$ im Vakuum)

Es gilt:

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \kappa) \vec{H}}$$

d.h.

$$\boxed{\mu = 1 + \kappa}$$

Beweis: nach §3B iii): magnetische Dipol $\Delta \vec{m} \Leftrightarrow$ Ringstrom I_{mag} mit

$$\Delta m = I_{\text{mag}} \Delta A = I_{\text{mag}} \frac{\Delta V}{\Delta l} \Rightarrow$$

„Magnetisierungsstromdichte“ (Scheinstrom)

$$\xi_{\text{mag}} = \lim \frac{I_{\text{mag}}}{\Delta l} = \lim \frac{\Delta m}{\Delta V} = M$$

$\Rightarrow \xi_{\text{mag}}$ erzeugt magnetisches Feld parallel zu \vec{M}

$$\vec{B}_{\text{mag}} = \mu_0 \vec{M}$$

(beachte Vorzeichen anders als im elektrischen Fall!)

$\Rightarrow B$ -Feld in Materie

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{Vakuum}} + \vec{B}_{\text{mag}} = \vec{B}_{\text{Vakuum}} + \mu_0 \vec{M}$$

\Rightarrow

$$\vec{H} = \vec{H}_{\text{Vakuum}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{\text{Vakuum}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{B}$$

d.h. Verstärkung $B/B_{\text{Vakuum}} = \mu$ und $L/L_{\text{Vakuum}} = \mu$ falls $\mu > 1$ ■

Es gibt 3 Arten von magnetisierbaren Stoffen:

a) Diamagnetismus

Einschalten von $\vec{B} \Rightarrow \dot{\vec{B}} \Rightarrow \dot{\phi} = A\dot{B}$, mit $A = \pi R^2$

\Rightarrow Ringspannung $U = -\dot{\phi} \Rightarrow E\text{-Feld } E = U/(2\pi R)$

\Rightarrow Kraft auf $F = qE$ auf Elektronen der Atomhülle

\Rightarrow Beschleunigung $a = R\ddot{\phi} = F/m = -\frac{q}{m} \frac{\dot{\phi}}{2\pi R} = -\frac{q}{m} \frac{\dot{B}\pi R^2}{2\pi R}$

$\Rightarrow \Delta\dot{\phi} = \Delta\omega = \int dt\ddot{\phi} = -\frac{q}{2m} \int dt\dot{B} = \boxed{-\frac{q}{2m} B = \omega_{\text{Larmor}}}$

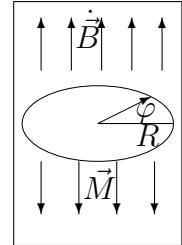
\Rightarrow Strom $\Delta I = \frac{q}{T} = q \frac{\omega_{\text{Larmor}}}{2\pi} = -\frac{q^2}{m} \frac{B}{4\pi}$

\Rightarrow magn. Moment $\Delta m = A\Delta I = -\pi R^2 \frac{q^2}{m} \frac{B}{4\pi} = -\frac{q^2 R^2 B}{4m} = \frac{1}{2} q R^2 \omega_{\text{Larmor}}$

\Rightarrow Magnetisierung $\vec{M} = -n \frac{q^2 R^2}{4m} \vec{B}$, mit $n = \text{Elektronendichte}$

d.h. \vec{M} antiparallel \vec{B} . Mit $\vec{M} = \kappa \vec{H} = \kappa \vec{B}/(\mu_0 \mu)$ und $q = -e_0$

$$\boxed{\kappa = -\frac{\mu_0 \mu n e_0^2 R^2}{4m} \approx -10^{-9} \dots -10^{-5} < 0, \text{ d.h. } \mu < 1 \text{ aber } \mu \approx 1.}$$



\Rightarrow Diamagnetismus bei allen Stoffen, wird aber oft überdeckt durch:

b) Paramagnetismus

Wenn im Material (durch Wärme statistisch ausgerichtete) magnetische Momente vorhanden sind, \Rightarrow durch B -Feld \rightarrow Ausrichtung $\Rightarrow \vec{M}$ parallel $\vec{B} \Rightarrow \kappa_{\text{para}} > 0, \mu > 1$.

$$\kappa_{\text{para}} \approx 10^{-8} \dots 10^{-5}$$

$$\kappa_{\text{para}} \text{ ist temperaturabhängig } \approx \frac{\text{const}}{T}$$

bei manchen Stoffen bei T klein \Rightarrow

c) Ferromagnetismus

Für

$$T < T_{\text{Curie}} = \begin{cases} 1101 \text{ K für } Fe \\ 1411 \text{ K für } Co \\ 649 \text{ K für } Ni \end{cases}$$

ist

i) $M/H \approx \mu = \mu(H) \approx 50 \dots 1000$

ii) $\vec{M}(H)$ nicht notwendig eindeutig

iii) \vec{M} nicht notwendig parallel \vec{H}, \vec{B}

($T > T_{\text{Curie}} \Rightarrow$ Paramagnetismus)

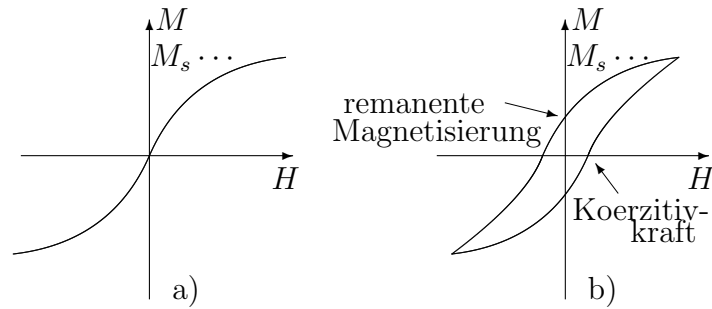


Abbildung 1: a) magnetisch weich, b) magnetisch hart mit Hysteresiskurve. M_s = Sättigungsmagnetisierung

8 Quasistationäre Ströme

\vec{j} , $\vec{B} \neq \text{const.}$, $\dot{\vec{D}}$ klein

Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$$

8 A Induktivität

Gegeben n Stromkreise $\partial A_1, \dots, \partial A_n$ mit Strömen I_1, \dots, I_n

Sei μ const. \Rightarrow

$$\vec{B} = \sum_{k=1}^n \vec{B}_k, \quad \vec{B}_k = B\text{-Feld erzeugt durch } I_k$$

$$\vec{B}_k \propto \vec{H}_k \propto I_k$$

\Rightarrow magnetischer Fluß durch ∂A_i

$$\int_{A_i} d\vec{f} \cdot \vec{B} = \phi_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} I_k$$

mit L_{ik} = wechselseitige Induktivität, L_{ii} = Selbst-Induktivität.

Für $n = 1$

$$\phi = LI$$

speziell für Spule $L = \mu_0 \mu N^2 A / l$ (siehe §7 B)

Allgemein: Fluß vom k -ten Strom durch i -ten Kreis

$$\begin{aligned} L_{ik} I_k &= \int_{A_i} d\vec{f} \cdot \vec{B}_k = \int_{A_i} d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}_k) \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial A_i} d\vec{r}_i \cdot \vec{A}_k \\ &= \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_{\partial A_i} d\vec{r}_i \cdot \int_{\partial A_k} d\vec{r}_k \frac{I_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \end{aligned}$$

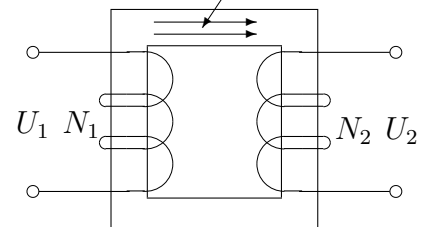
(mit $d^3x_k \vec{j}(\vec{r}_k) \rightarrow d\vec{r}_k I_k$ in Formel für \vec{A}_k nach §7Bii) \Rightarrow

$$L_{ik} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_{\partial A_i} d\vec{r}_i \cdot \int_{\partial A_k} d\vec{r}_k \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} = L_{ki}$$

8 B Transformator

Magn. Fluß im Kern $\phi = \int df B$
 Faradays Induktionsgesetz:
 Spannung in 1 Windung $U_0 = -\dot{\phi}$
 Spannung in Spule 1 $U_1 = -N_1 \dot{\phi}$
 Spannung in Spule 2 $U_2 = -N_2 \dot{\phi}$

B -Feld nur im Kern, wenn μ groß

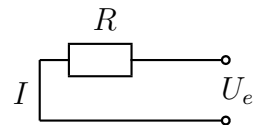


$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

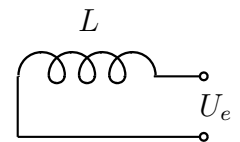
8 C R,L,C–Stromkreise

Äußere (eingeprägte) Spannung U_e

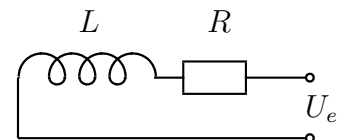
i) R Ohm: $U_e = RI$



ii) L Faraday: $U_e = \dot{\phi} = LI\dot{I}$



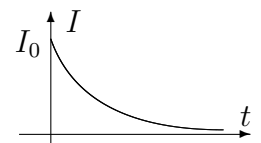
iii) $R + L$ $U_e = U_R + U_L = RI + LI\dot{I}$



Beispiel: $U_e = 0 \Rightarrow$ Differentialgleichung für I : $LI\dot{I} + RI = 0$

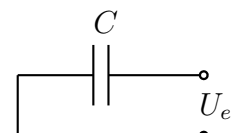
Lösung:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$



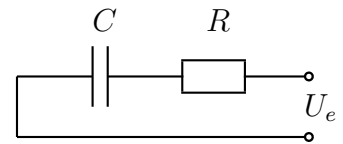
iv) C

$$Q = CU_e \Rightarrow \dot{U}_e = \frac{1}{C} \dot{Q} = \frac{1}{C} I$$



v) $R + C$

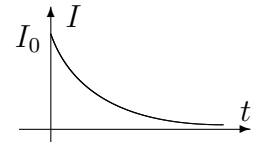
$$\dot{U}_e = RI + \frac{1}{C}I$$



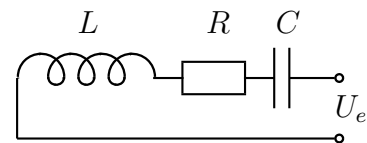
Beispiel: $U_e = 0$, d.h. Entladung des Kondensators über $R \Rightarrow$ Differentialgleichung:
 $RI + \frac{1}{C}I = 0$

Lösung:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

vi) $R + C + L$

$$\dot{U}_e = L\ddot{I} + RI + \frac{1}{C}I$$



Entspricht der Schwingungsgleichung in der Mechanik:

$L \leftrightarrow$ Masse, $R \leftrightarrow$ Reibung, $\frac{1}{C} \leftrightarrow$ Feder, $\dot{U}_e \leftrightarrow$ äußere Kraft

Beispiele:

a) Schwingkreis: $U_e = 0$, $R = 0 \Rightarrow L\ddot{I} + \frac{1}{C}I = 0 \Rightarrow$ Lösung:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b) Erzwungene Schwingung: (siehe Übung)

$$U_e = U_0 \cos \Omega t$$

$\Rightarrow I(t) = I_0 \cos(\Omega t - \varphi)$ ist eine Lösung mit

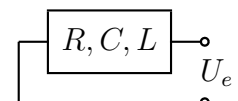
$$\frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2}, \quad \text{Scheinwiderstand, Impedanz}$$

$$\tan \varphi = \frac{\Omega L - 1/(\Omega C)}{R}, \quad \varphi = \text{Phasenverschiebung, } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

8 D Leistung im Wechselstromkreis

$$U_e = U_0 \cos \omega t$$

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$



Momentane Leistung:

$$N(t) = U_e I = U_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi)$$

$$= U_0 I_0 \left(\underbrace{\cos^2 \omega t \cos \varphi}_{\geq 0} + \underbrace{\cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi}_{\text{oszilliert}} \right)$$

Mittlere - = Wirkleistung (mit $T = 2\pi/\omega$)

$$\langle N \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt N(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi$$

Falls U und I in Phase, d.h. $\varphi = 0$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0 = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

z.B. $U_{\text{eff}} = 230 \text{ V} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0 \leftrightarrow U_0 = 325 \text{ V}$.

9 Energiesatz

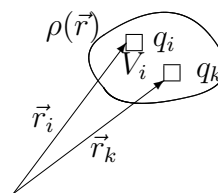
9 A Energiedichte des elektrischen Feldes

Maxwell usw

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0} \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho} \quad \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi} \quad \boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}}$$

Sei eine Ladungsverteilung ρ approximiert durch q_i/V , ($V \rightarrow 0$):
Elektrisches Potential der Ladung Δq_i bei \vec{r}_i am Ort \vec{r}_k :

$$\varphi_i(\vec{r}_k) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} = C_{ik} q_i$$



Potentielle Energie der Ladung q_k im Feld von q_i

$$\varphi_i q_k = C_{ik} q_i q_k$$

Aufbau der Ladungsverteilung $\rho \Rightarrow$ Gesamtenergie der Ladungsverteilung:

$$W = \sum_{i < k} C_{ik} q_i q_k = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} C_{ik} q_i q_k$$

wegen $C_{ik} = C_{ki}$. Mit $V \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &\stackrel{\S 5E}{=} \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) \\ &\stackrel{\text{Maxwell}}{=} \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \varphi = \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{\nabla} \cdot \vec{D} \varphi - \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \varphi) \\ &\stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \frac{1}{2} \int_{\partial V \rightarrow \infty} d\vec{f} \cdot \vec{D} \varphi + \frac{1}{2} \int d^3x \vec{D} \cdot \vec{E} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \vec{D} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

wegen $\varphi \lesssim 1/r$.

Energie des elektrischen Feldes

$$W_e = \int d^3x w_e(\vec{r})$$

$$\boxed{w_e(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}} = \text{Energiedichte}$$

Aufladung eines Plattenkondensators ∞ -groß (siehe §6 Bii))

$$W = \int dt UI = C \int dt U \dot{U} = C \int dU U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{A}{d} \epsilon_0 \epsilon d^2 E^2 = Vol \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

da Feld homogen folgt mit $Vol \rightarrow 0$: Energiedichte $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$

9 B Energiedichte des magnetischen Feldes

Für den quasistationären Fall $\dot{\vec{D}}$ klein (allgm. siehe C, D)

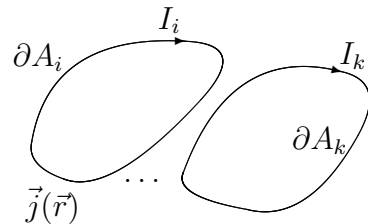
Maxwell usw

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}} \quad \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \quad \boxed{\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}}$$

Sei \vec{j} approximiert durch Drähte ∂A_i mit Strom I_i ,
(d.h. $\vec{j} d^3x \leftrightarrow I_i d\vec{r}$)

Leistung im i -ten Stromkreis

$$\dot{W}_i = N_i = U_i I_i = \dot{\phi}_i I_i \stackrel{\S 8A}{=} \sum_k L_{ik} \dot{I}_k I_i$$



\Rightarrow Gesamtleistung

$$\dot{W} = N = \sum_i N_i = \sum_{i,k} L_{ik} \dot{I}_k I_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i,k} L_{ik} I_k I_i$$

wegen $L_{ik} = L_{ki}$. \Rightarrow Energieaufnahme beim Einschalten

$$\begin{aligned} W &= \int dt \dot{W} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_k I_i \stackrel{\S 8A}{=} \frac{1}{2} \sum_i I_i \phi_i = \frac{1}{2} \sum_i I_i \int_{A_i} d\vec{f} \cdot \vec{B} \\ &= \frac{1}{2} \sum_i I_i \int_{A_i} d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \frac{1}{2} \sum_i I_i \int_{\partial A_i} d\vec{r} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

Im Limes $I_i d\vec{r} \rightarrow \vec{j} d^3x \Rightarrow$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^3x \vec{j} \cdot \vec{A} \stackrel{\text{Oersted}}{=} \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{A} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{H}) \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{2} \int_{\partial V \rightarrow \infty} d\vec{f} \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) + \frac{1}{2} \int d^3x \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{B} \cdot \vec{H} \end{aligned}$$

wegen $|\vec{A}| \lesssim 1/r$.

Energie des magnetischen Feldes

$$W_m = \int d^3x w_m(\vec{r})$$

$$w_m(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \text{Energiedichte}$$

Stromeinschalten bei Spule ∞ -groß (siehe §7 B) $L = \frac{\mu_0 \mu}{l} N^2$

$$W = \int dt UI = L \int dt \dot{I} I = L \int dI I = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu A N^2}{l} \frac{l^2}{N^2} H^2 = Vol \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

da Feld homogen folgt mit $Vol \rightarrow 0$: Energiedichte $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$

9 C Poyntingscher Satz

Allgemeiner Fall:

Maxwell

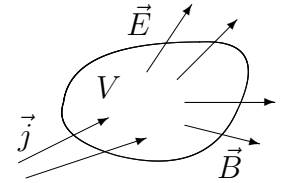
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j}$$

Materialgleichungen

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$



$\epsilon, \mu = const$ allgm. in D

Leistung der Stromdichte \vec{j} im Volumen V (nach §7A)

$$N = \int_V d^3x \vec{E} \cdot \vec{j} \stackrel{\text{Maxwell}}{=} \int_V d^3x \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}}) = - \int_V d^3x (\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} + \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}})$$

$$= - \int_V d^3x (\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \dot{w})$$

(wegen $\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \stackrel{\text{Spat- + Produktregel}}{=} \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) + \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \stackrel{\text{Faraday}}{=} -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}}$)
mit der

Energiedichte des elektromagnetischen Felds

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon \vec{E}^2 + \mu_0 \mu \vec{H}^2)$$

(d.h. $\dot{w} = \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}}$) und dem

Poyntingschen Vektor = Energieflußdichte

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Energieerhaltungssatz

$$\int_V d^3x \left(\dot{w} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} \right) = 0$$

Da V beliebig \Rightarrow

$$\text{lokale Form : } \boxed{\dot{w} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} = 0}$$

oder mit Gauß

$$\text{Integralform : } \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V d^3x w}_{(1)} + \underbrace{\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{S}}_{(2)} + \underbrace{\int_V d^3x \vec{E} \cdot \vec{j}}_{(3)} = 0$$

- (1) elektromagnetische Energie in V
- (2) Abfluß von elektromagnetischer Energie aus V
- (3) Umwandlung in andere Energieformen: Wärme usw

9D Kräfte im elektromagnetischen Feld

Elektrodynamik deformierbarer Medien

Elektromagnetische Energie in V

$$W = \int_V d^3x \frac{1}{2} \left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B} \right)$$

Virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}(\vec{r})$ (mit $\delta\vec{r} = 0$ auf ∂V)

$$\delta W = - \int_V d^3x \vec{f} \cdot \delta\vec{r}$$

mit

$$\vec{f} = \lim \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V} = \text{Kraftdichte}$$

a) elektrische Felder $H, B = 0$, $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$, $w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \Rightarrow$

Satz: Sei $\epsilon = \epsilon(\rho_m)$ mit $\rho_m = \text{Massendichte} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \int_V d^3x \frac{1}{2} \left(\vec{E} \cdot \delta \vec{D} + \vec{D} \cdot \delta \vec{E} \right) \\ &= \int_V d^3x \left(-\rho \vec{E} + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \vec{\nabla} \epsilon - \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{\nabla} \left(E^2 \rho_m \frac{d\epsilon}{d\rho_m} \right) \right) \cdot \delta\vec{r} \end{aligned}$$

\Rightarrow **Kraftdichte**

$$\vec{f}_e(\vec{r}) = \underbrace{\rho \vec{E}}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \vec{\nabla} \epsilon}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{\nabla} \left(E^2 \rho_m \frac{d\epsilon}{d\rho_m} \right)}_{(3)}$$

- (1): Coulombkraft
- (2): Beitrag von Polarisation
- (3): Beitrag von Volumenänderung (z.B. bei Gasen)

Beweis: i) $\delta W_e = \int_V d^3x \left(\varphi \delta \rho - \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \delta \epsilon \right)$

Produktregel $\vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \cdot \delta \vec{E} + \epsilon_0 E^2 \delta \epsilon \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\vec{E} \cdot \delta \vec{D} + \vec{D} \cdot \delta \vec{E} \right) = \vec{E} \cdot \delta \vec{D} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \delta \epsilon$

$$\vec{E} \cdot \delta \vec{D} = -\vec{\nabla} \varphi \cdot \delta \vec{D} \stackrel{\text{Produktregel}}{=} -\vec{\nabla} \cdot \left(\varphi \delta \vec{D} \right) + \varphi \delta \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varphi \delta \rho + \vec{\nabla}(\dots)$$

$(\vec{\nabla} \cdot (\dots)) \xrightarrow{\text{Gau\ss}} \text{Randterm} \rightarrow 0$, wegen $\delta \vec{r} = 0$ auf ∂V)

ii) $\delta \rho$: Ladungserhaltung: $\dot{\rho} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$ (siehe §1 B) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \delta \rho &= -\vec{\nabla} \cdot (\rho \delta \vec{r}) \Rightarrow \\ \varphi \delta \rho &= -\varphi \vec{\nabla} \cdot (\rho \delta \vec{r}) = \left(\vec{\nabla} \varphi \right) \cdot (\rho \delta \vec{r}) + \vec{\nabla} \cdot (\varphi \rho \delta \vec{r}) \rightarrow -\rho \vec{E} \delta \vec{r} \end{aligned}$$

iii) $\delta \epsilon$: Sei $\epsilon = \epsilon(\rho_m)$ mit $\rho_m = \text{Massendichte}$, mit Massenerhaltung \Rightarrow

$$\begin{aligned} \delta \epsilon &= \frac{d\epsilon}{d\rho_m} \delta \rho_m = -\frac{d\epsilon}{d\rho_m} \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \delta \vec{r}) \\ &= -\frac{d\epsilon}{d\rho_m} \cdot \left(\vec{\nabla} \rho_m \delta \vec{r} + \rho_m \vec{\nabla} \delta \vec{r} \right) = -\vec{\nabla} \epsilon \cdot \delta \vec{r} - \frac{d\epsilon}{d\rho_m} \rho_m \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{r} \end{aligned}$$

(da $\vec{\nabla} \epsilon = \frac{d\epsilon}{d\rho_m} \vec{\nabla} \rho_m$)

$$\Rightarrow E^2 \delta \epsilon = \left(-E^2 \vec{\nabla} \epsilon + \vec{\nabla} \left(E^2 \frac{d\epsilon}{d\rho_m} \rho_m \right) \right) \cdot \delta \vec{r} + \vec{\nabla}(\dots)$$

■

a) **magnetische Felder** $E, D = 0$, $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$ analog \Rightarrow **Kraftdichte**

$$\vec{f}_m(\vec{r}) = \vec{j} \times \vec{B} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \vec{\nabla} \mu + \frac{1}{2} \mu_0 \vec{\nabla} \left(H^2 \rho_m \frac{\partial \mu}{\partial \rho_m} \right)$$

9 E Maxwellscher Spannungstensor

Satz: Die Kraftdichten lassen sich schreiben als

$$\begin{aligned} \vec{f}_e(\vec{r}) &= \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{D} \right) \vec{E} - \vec{D} \times \dot{\vec{B}} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left(\alpha \vec{D} \cdot \vec{E} \right) \\ \vec{f}_m(\vec{r}) &= \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right) \vec{H} - \dot{\vec{D}} \times \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left(\beta \vec{B} \cdot \vec{H} \right) \end{aligned}$$

mit $\alpha = 1 - \frac{\rho_m}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m}$, $\beta = 1 - \frac{\rho_m}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \rho_m}$ (können meist vernachlässigt werden).

Die **Gesamtkraftdichte** $\vec{f} = \vec{f}_e + \vec{f}_m$ ist

$$f_k = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik} - \frac{d}{dt} \left(\vec{D} \times \vec{B} \right)_k$$

mit dem **Maxwellscher Spannungstensor**

$$T_{ik} = D_i E_k + B_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \left(\alpha \vec{D} \cdot \vec{E} + \beta \vec{B} \cdot \vec{H} \right)$$

(T_{ik} symmetrisch)

Beweis: Wegen $\epsilon_0 E^2 \vec{\nabla} \epsilon = -\epsilon_0 \epsilon \vec{\nabla} E^2 + \epsilon_0 \vec{\nabla} (\epsilon E^2)$

$$\vec{f}_e = \rho \vec{E} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon \vec{\nabla} E^2 - \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{\nabla} \left(\epsilon E^2 \left(1 - \frac{\rho_m}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \right) \right)$$

weiter (mit $\vec{\nabla}_D$ wirkt auf \vec{D} usw)

$$\begin{aligned} \rho \vec{E} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon \vec{\nabla} (E^2) &\stackrel{\text{Maxwell}}{=} (\vec{\nabla}_D \cdot \vec{D}) \vec{E} + \vec{\nabla}_E (\vec{D} \cdot \vec{E}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} - (\vec{\nabla}_E \cdot \vec{D}) \vec{E} + \vec{\nabla}_E (\vec{D} \cdot \vec{E}) \\ &\stackrel{\text{bac-cab}}{=} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} + \vec{D} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\ &\stackrel{\text{Maxwell}}{=} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} - \vec{D} \times \dot{\vec{B}} \end{aligned}$$

entsprechend

$$\vec{f}_m = \vec{j} \times \vec{B} + \frac{1}{2} \mu_0 \mu \vec{\nabla} H^2 - \frac{1}{2} \mu_0 \left(\mu H^2 \left(1 - \frac{\rho_m}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \rho_m} \right) \right)$$

und

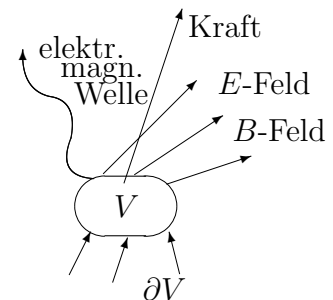
$$\begin{aligned} \vec{j} \times \vec{B} + \frac{1}{2} \mu_0 \mu (\vec{\nabla} H^2) &\stackrel{\text{Maxwell}}{=} (\vec{\nabla}_H \times \vec{H} - \dot{\vec{D}}) \times \vec{B} + \vec{\nabla}_H (\vec{B} \cdot \vec{H}) \\ &\stackrel{\text{bac-cab}}{=} -\vec{\nabla}_H (\vec{B} \cdot \vec{H}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}_H) \vec{H} - \dot{\vec{D}} \times \vec{B} + \vec{\nabla}_H (\vec{B} \cdot \vec{H}) \\ &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{H} - (\vec{\nabla}_B \cdot \vec{B}) \vec{H} - \dot{\vec{D}} \times \vec{B} \\ &\stackrel{\text{Maxwell}}{=} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{H} - \dot{\vec{D}} \times \vec{B} \end{aligned}$$

■

Gesamtkraft Sei V ein beliebiges Volumen

$$f_k = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik} - \frac{d}{dt} (\vec{D} \times \vec{B})_k$$

$$F_k = \int_V d^3x f_k = \underbrace{\int_{\partial V} dA_i T_{ik}}_{F_k^{\text{stationär}}} - \frac{d}{dt} \underbrace{\int_V d^3x (\vec{D} \times \vec{B})_k}_{P_k^{\text{el.mag.}}}$$



hier $d\vec{A}$ = Flächenelement.

Interpretation:

$\vec{F}^{\text{stationär}}$ = stationäre Kraft auf die Oberfläche von V

$\vec{P}^{\text{el.mag.}}$ = Impuls des elektromagnetischen Feldes

Faraday + Maxwell: Für \vec{F} gilt das Nahwirkungsprinzip (Lokalität)

Impulserhaltung: Mit dem Impulssatz der Mechanik $\vec{F} = \dot{\vec{P}}^{\text{mech}} \Rightarrow$ Impulssatz für den Gesamtimpuls

$$\vec{F}^{\text{stationär}} = \dot{\vec{P}}^{\text{mech}} + \dot{\vec{P}}^{\text{el.mag.}}$$

mit der **elektromagnetische Impulsdichte**

$$\vec{P}^{\text{el.mag.}} / \text{Vol} = \vec{D} \times \vec{B} = \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

mit $c =$ Lichtgeschwindigkeit (siehe §10 A) und $\vec{S} =$ Poyntingvector (Energieflußdichte) (siehe §9 C).

10 Elektromagnetische Wellen

Hier keine Ladungen und Ströme, homogenes Medium ($\epsilon, \mu = \text{const}$)

10 A Wellengleichung

Maxwell

Materialgleichungen

$$\begin{array}{lll} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 & \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \end{array}$$

Differentialgleichung für \vec{E}

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{E}} &= \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \ddot{\vec{D}} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \vec{\nabla} \times \dot{\vec{H}} = -\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\ &= c^2 (\Delta \vec{E} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})) = c^2 \Delta \vec{E} \end{aligned}$$

mit

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}$$

(entsprechend für \vec{B}). Es folgt

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{r}, t) = \square \vec{E} = 0 \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B}(\vec{r}, t) = \square \vec{B} = 0 \end{array}} \quad \text{Wellengleichung für } \begin{cases} \vec{E} \\ \vec{B} \end{cases}$$

mit $\square =$ Wellenoperator.

Diskussion der Wellengleichung $\square \phi(\vec{r}, t) = 0$

a) **ebene Welle** in x-Richtung: $\phi(x, t)$ unabhängig von y, z

$$\square \phi(\vec{r}, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(x, t) = 0$$

Lösung

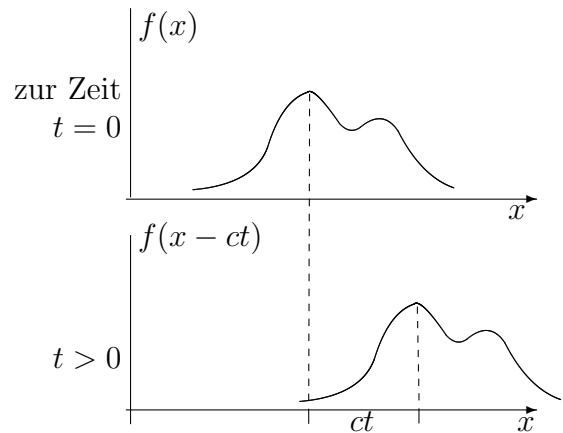
$$\phi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

für beliebige Funktionen f und g , da

$$\square\phi(\vec{r}, t) = f'' - \frac{1}{c^2}c^2 f'' = 0$$

entsprechend für g .

$f(x - ct)$ beschreibt eine Welle,
die sich nach rechts bewegt
mit der Geschwindigkeit c ,
entsprechend für $g(x + ct)$ nach links



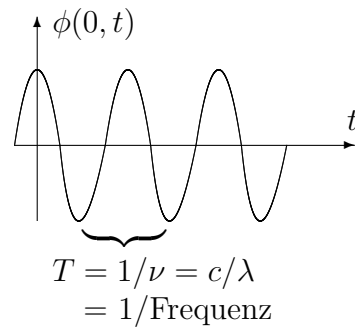
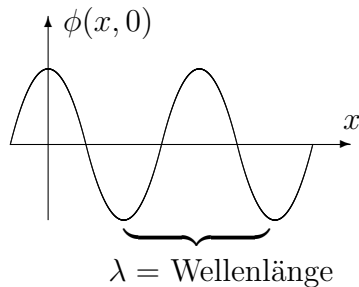
$\phi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) =$ Überlagerung einer nach rechts und einer nach links
laufenden Welle.

Speziell:

b) Harmonische (monochromatische) ebene Welle in x-Richtung

$$\phi(x, t) = \phi_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) = \phi_0 \cos (kx - \omega t)$$

mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}c = kc, c =$ Wellengeschwindigkeit

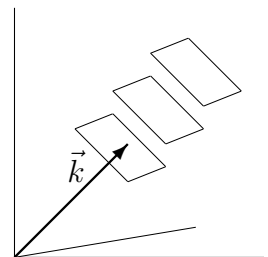


c) Allgemeine harmonische (monochromatische) ebene Welle in Richtung \vec{k}

$$\phi(x, t) = \phi_0 \cos (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$\vec{k} =$ Wellenvektor mit $\omega = c|\vec{k}|$

Flächen der Wellenberge im Abstand $\lambda = 2\pi/k$
bewegen sich mit Geschwindigkeit $c = \omega/k$
in Richtung \vec{k}



Mathematik

i) **Komplexe Schreibweise** Wegen Eulerformel

$$e^{i\varphi} = \exp i\varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

⇒

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \operatorname{Re} \psi_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ &= \phi_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) \end{aligned}$$

mit $\psi_0 = \phi_0 e^{i\varphi}$ komplex (φ = Phasenverschiebung)

ii) **Fourierscher Satz** Jede ebene Welle (in x-Richtung) ist Überlagerung von harmonischen ebene Wellen

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\phi}(k) e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{mit } \omega = c|k| \\ &= \underbrace{f(x - ct)}_{\text{von } k > 0} + \underbrace{g(x + ct)}_{\text{von } k < 0} \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\phi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x, 0) e^{-ikx}$$

gilt wegen Umkehrformel der Fouriertransformation (siehe Übungen).

$$(\phi(x, t) \text{ reel} \Leftrightarrow \tilde{\phi}^*(k) = \tilde{\phi}(-k))$$

Beliebige Welle:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\phi}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{mit } \omega = c|\vec{k}| \\ \tilde{\phi}(\vec{k}) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \phi(\vec{r}, 0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \end{aligned}$$

10 B Anwendung auf elektromagnetische Wellen

Jede Lösung von

$$\square \vec{E} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

ist Superposition von

$$\vec{E}_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \text{mit } \omega = c|\vec{k}|$$

= ebene harmonischen Welle in Richtung \vec{k} mit Wellenlänge $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$, Frequenz $\nu = \omega/(2\pi)$
(physikalische Lösung $\vec{E}_{\vec{k}} \rightarrow \operatorname{Re} \vec{E}_{\vec{k}}$)

Geschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}}$$

Im Vakuum

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

ϵ_0, μ_0 experimentell bestimmbar aus Kraftgesetz von Coulomb und Ampere zwischen Ladungen und Strömen (s. §3A,B) \Rightarrow

$$c_0 = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{Lichtgeschwindigkeit}$$

Maxwell: Licht = elektromagnetische Welle.**Wellengeschwindigkeit in Materie**

$$c = c_0/n \quad \text{mit } n = \sqrt{\epsilon\mu} = \text{Brechungsindex (siehe §11 A)}$$

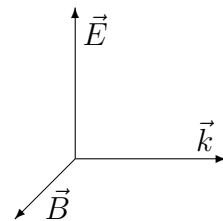
Transversalität von ebenen harmonischen Wellen

Satz: Seien $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ \Rightarrow

$$\begin{aligned} \omega \vec{B} &= \vec{k} \times \vec{E} \\ \omega \vec{E} &= -c^2 \vec{k} \times \vec{B} \end{aligned}$$

 $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

$$\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}, \vec{B} \perp \vec{k} \text{ und } \vec{E} \perp \vec{B}$$

d.h. $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ bilden ein Dreibeinmit $B = E k/\omega = E/c$.**Beweis:** Maxwell:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = i\vec{k} \times \vec{E} - i\omega \vec{B} \\ 0 &= \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \frac{1}{\mu_0 \mu} i\vec{k} \times \vec{B} + \epsilon_0 \epsilon i\omega \vec{E} \end{aligned}$$

■

Polarisationi) \vec{E}_0 reell \Rightarrow

$$\vec{E}_0 = \text{Re } \vec{E}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

\Rightarrow Richtung von $\vec{E} =$ Richtung von $\vec{E}_0 = \text{const}$,
d.h. die elektr. magn. Welle ist **linear polarisiert**

ii) \vec{E}_0 komplex: (siehe Übung)

Sei o.B.d.A \vec{k} in x -Richtung, d.h. \vec{E}_0 in y, z -Ebene, mit a, b, φ, ψ reell

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ ae^{i\varphi} \\ be^{i\psi} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{E} = \text{Re } \vec{E}_0 \exp i(kx - \omega t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \cos(kx - \omega t + \varphi) \\ b \cos(kx - \omega t + \psi) \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Richtung von \vec{E} nicht konstant falls $\varphi \neq \psi$.

\vec{E} ist Superposition von 2 linear polarisierten Wellen

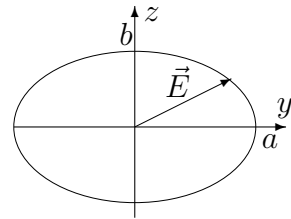
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{e}_y a \cos(kx - \omega t + \varphi) + \vec{e}_z b \cos(kx - \omega t + \psi)$$

Bei $x = 0$ beschreibt \vec{E} eine Ellipse

$$\frac{E_y^2}{a^2} + \frac{E_z^2}{b^2} - 2 \frac{E_y E_z}{ab} \cos(\varphi - \psi) = \sin^2(\varphi - \psi)$$

speziell $\psi = \varphi \mp \pi/2$ bei $x = 0$

$$\vec{E}(0, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \cos(\omega t - \varphi) \\ \pm b \sin(\omega t - \varphi) \end{pmatrix}$$



speziell $\psi = \varphi \mp \pi/2$ und $a = b \Rightarrow$ „Zirkulare Polarisation“

Energiedichte einer elektromagnetischen Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}, \quad \omega = c|\vec{k}|$$

nach §9A,B ist

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \epsilon E^2 + \frac{1}{\mu_0 \mu} B^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \epsilon + \frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{k^2}{\omega^2} \right) E^2 = \epsilon_0 \epsilon E^2 \end{aligned}$$

beachte $w_e = w_m$.

Zeitlicher Mittelwert

$$\langle w \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt w = \epsilon_0 \epsilon E_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\pi t/T) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E_0^2$$

Poyntingvektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = EH \frac{\vec{k}}{k} = E^2 \frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{1}{c} \frac{\vec{k}}{k} = \epsilon_0 \epsilon c E^2 \frac{\vec{k}}{k} = wc \frac{\vec{k}}{k}$$

Mittelwert

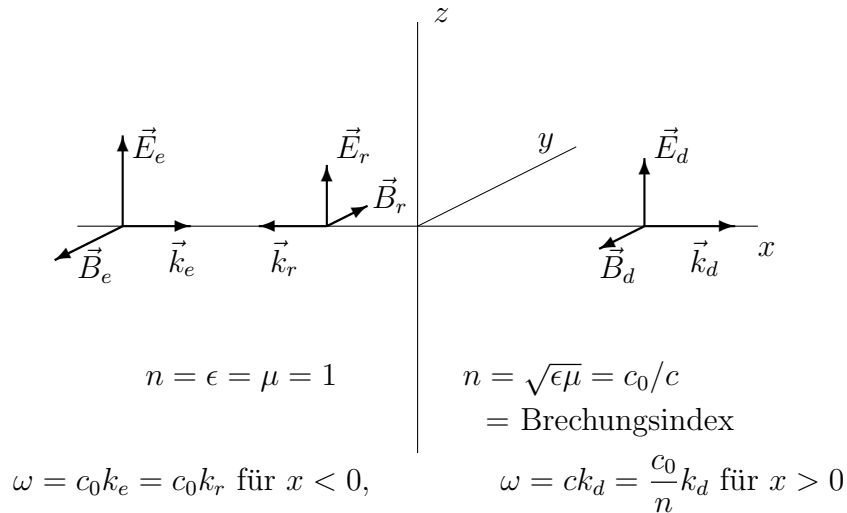
$$\langle \vec{S} \rangle = \langle w \rangle c \frac{\vec{k}}{k}$$

d.h. Energietransport in Richtung \vec{k} mit der Geschwindigkeit c .

11 Wellenoptik

11 A Reflexion und Brechung

i) Senkrechter Einfall in x -Richtung (s. Übung)



mit $c_0 = c_{\text{vak}}$.

Einfallende Welle ($x < 0$)

$$\vec{E}_e = \vec{e}_z e \cos(k_e x - \omega t), \quad \vec{B}_e = -\vec{e}_y \frac{e}{c_0} \cos(k_e x - \omega t)$$

reflektierte Welle ($x < 0$)

$$\vec{E}_r = \vec{e}_z r \cos(-k_r x - \omega t), \quad \vec{B}_r = \vec{e}_y \frac{r}{c_0} \cos(-k_r x - \omega t)$$

durchgehende Welle ($x > 0$)

$$\vec{E}_d = \vec{e}_z d \cos(k_d x - \omega t), \quad \vec{B}_d = -\vec{e}_y \frac{d}{c} \cos(k_d x - \omega t)$$

Randbedingungen bei $x = 0$ (mit $B = E/c$)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_t \text{ stetig: } \vec{E}_e + \vec{E}_r = \vec{E}_d \Rightarrow e + r = d \\ \vec{H}_t \text{ stetig: } \vec{B}_e + \vec{B}_r = \frac{1}{\mu} \vec{B}_d \Rightarrow -e + r = -\frac{1}{\mu} \frac{c_0}{c} d = -\frac{n}{\mu} d = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} d \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{e} = \frac{2}{1 + \frac{n}{\mu}}, \quad \frac{r}{e} = \frac{1 - \frac{n}{\mu}}{1 + \frac{n}{\mu}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}} < 0 \quad \text{für } \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} > 1$$

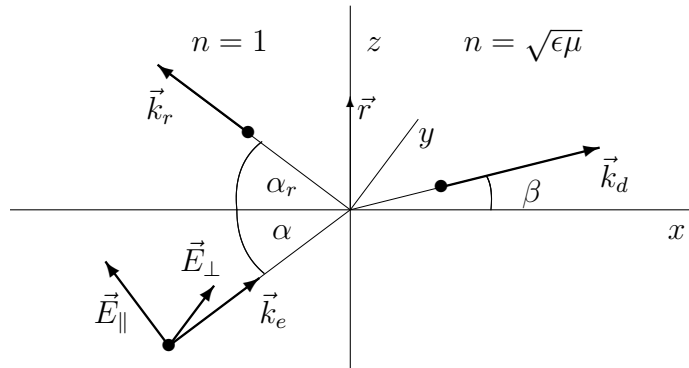
d.h. E -Feld bei Reflexion: Phasensprung um π

$$\text{Reflexionskoeffizient} = \frac{\text{reflektierte Intensität}}{\text{einfallende Intensität}} = \frac{|\vec{S}_e|}{|\vec{S}_r|} = \frac{r^2}{e^2} = \left(\frac{\sqrt{\mu} - \sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\mu} + \sqrt{\epsilon}} \right)^2$$

ii) **Schräger Einfall:** (Einfallsebene = xz -Ebene)

$$\begin{aligned}\vec{E}_e &= \vec{E}_{0e} \cos(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \vec{E}_r &= \vec{E}_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \vec{E}_d &= \vec{E}_{0d} \cos(\vec{k}_d \cdot \vec{r} - \omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_e &= \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} \\ \vec{E}_{\parallel} &\text{ ist } \parallel \text{ Einfallsebene} \\ \vec{E}_{\perp} &\text{ ist } \perp \text{ Einfallsebene}\end{aligned}$$



\vec{E}_t stetig bei $x = 0$ für alle $t \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\vec{k}_e \cdot \vec{r} &= \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_d \cdot \vec{r} \text{ bei } x = 0 \Rightarrow k_e \sin \alpha = k_r \sin \alpha_r = k_d \sin \beta \\ \text{mit } k_r &= k_e, k_d = nk_e \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha = \alpha_r} \quad \text{Einfalls- = Reflexionswinkel}$$

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n} \quad = \text{ Brechungsgesetz von Snell}$$

Reflexionskoeffizienten (Fresnelsche Formeln) (Bew. wie oben)

$$\text{für } \vec{E}_{\perp} \text{ senkrecht zur Einfallsebene: } R_{\perp} = \left(\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2$$

$$\text{für } \vec{E}_{\parallel} \text{ parallel zur Einfallsebene: } R_{\parallel} = \left(\frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right)^2$$

Speziell: $R_{\parallel} = 0$ für $\alpha + \beta = \pi/2$, (d.h. $\vec{k}_r \perp \vec{k}_d$) $\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \tan \alpha = n$

$\Rightarrow \vec{E}_r$ ist linear polarisiert \perp Einfallsebene für $\tan \alpha = n$.

11 B Beugung

Maxwells Gleichungen mit $\rho = 0, \vec{j} = 0 \Rightarrow$

$$\text{Wellengleichungen} \quad \begin{cases} \square \vec{E} = 0 \\ \square \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \text{mit } \square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad + \text{ Randbedingungen}$$

Eine Komponente von \vec{E} oder \vec{B} sei

$$\phi(\vec{r}, t) = \text{Re } \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

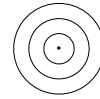
d.h. monochromatisches Licht.

$$\text{Wellengleichung für } \phi \quad \square \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Helmholtzgleichung für } \psi \quad \boxed{\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi(\vec{r}) = 0}$$

Beispiel: Kugelwelle mit $\vec{r} = 0$ als Zentrum

$$\psi(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}, \text{ mit } k = \frac{\omega}{c}$$



Beweis: zu zeigen: $\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \frac{e^{ikr}}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})$

mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$, $\vec{\nabla} r = \vec{r}/r$, $\vec{\nabla} 1/r = -\vec{r}/r^3 \Rightarrow$

$$\Delta f(r) = \vec{\nabla} \cdot \left(f' \frac{\vec{r}}{r}\right) = f'' \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)^2 + f' \left(\frac{3}{r} - \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = f'' + \frac{2}{r} f' = \frac{1}{r} (rf)'' \Rightarrow$$

$$\Delta \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{r} (e^{ikr})'' = -k^2 \frac{1}{r} e^{ikr} \text{ für } r \neq 0$$

$$\Delta \frac{e^{ikr}}{r} \approx \Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}) \text{ für } r \approx 0$$

■

Bestimmung von $\psi(\vec{r})$ für $\vec{r} \in V$ aus Randwerten auf ∂V (vergl. §5 F Greensche Funktion)

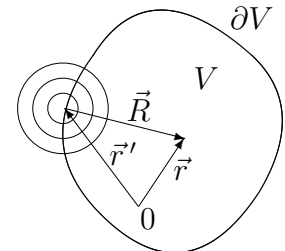
„Kirchhoffsche Formel“

Satz: Falls $(\Delta + \omega^2/c^2)\psi(\vec{r}) = 0 \Rightarrow$

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\vec{f}' \left(g(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}' \psi(\vec{r}') - \psi(\vec{r}') \vec{\nabla}' g(\vec{r}, \vec{r}') \right)$$

mit der **Greenschen Funktion**

$$\begin{aligned} g(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{e^{ikR}}{R}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad k = \frac{\omega}{c} \\ &= \text{Kugelwelle mit } \vec{r}' \text{ als Zentrum} \end{aligned}$$



d.h. $\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) g(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$

Beweis: Green 2 (§5 C) $\int_{\partial V} d\vec{f}' \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) = \int_V d^3x (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi)$ mit $\phi \rightarrow g(\vec{r}, \vec{r}')$

$$\int_{\partial V} d\vec{f}' \cdot \left(g(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}' \psi(\vec{r}') - \psi(\vec{r}') \vec{\nabla}' g(\vec{r}, \vec{r}') \right) = \int_V d^3x (g(\vec{r}, \vec{r}') \Delta' \psi(\vec{r}') - \psi(\vec{r}') \Delta' g(\vec{r}, \vec{r}'))$$

$$= \int_V d^3x' \left(\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\omega^2}{c^2} \psi(\vec{r}') - \psi(\vec{r}') \left(\frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{ikR}}{R} - 4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \right) \Delta' g(\vec{r}, \vec{r}') \right) = 4\pi\psi(\vec{r})$$

■

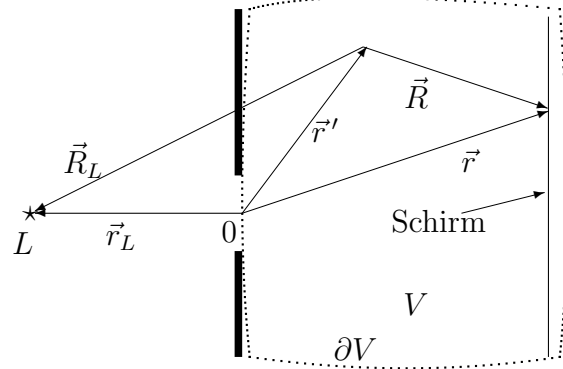
Anwendung auf Beugung:

Blende bei $\vec{r}' = 0$ vor Punktquelle bei \vec{r}_L

Kirchhoffapproximation:

$\psi(\vec{r}'), \vec{\nabla}'\psi(\vec{r}') \approx 0$ außer für $\vec{r}' \in$ Blende

(Approximation gut falls $\lambda \ll$ Blende)



$$\Rightarrow \psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{Blende}} d\vec{f}' \left(g(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}'\psi(\vec{r}') - \psi(\vec{r}') \vec{\nabla}'g(\vec{r}, \vec{r}') \right)$$

mit $\psi(\vec{r}') =$ Kugelwelle mit L als Zentrum

$$\psi(\vec{r}') = c_L \frac{e^{ikR_L}}{R_L}, \quad \vec{R}_L = \vec{r}_L - \vec{r}'$$

$$\vec{\nabla}'\psi(\vec{r}') = c_L \left(ik - \frac{1}{R_L} \right) \frac{-\vec{R}_L}{R_L} \frac{e^{ikR_L}}{R_L} \approx -c_L ik \frac{\vec{R}_L}{R_L} \frac{e^{ikR_L}}{R_L} \text{ falls } R_L \gg \lambda$$

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{ikc_L}{4\pi} \int_{\text{Blende}} d\vec{f}' \left(\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\vec{R}_L}{R_L} \frac{e^{ikR_L}}{R_L} - (R \leftrightarrow R_L) \right)$$

$$= \frac{ikc_L}{4\pi} \int_{\text{Blende}} d\vec{f}' \left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{R}_L}{R_L} \right) \frac{e^{ik(R+R_L)}}{RR_L}$$

Falls Blende $\ll R, R_L$: $\vec{R} \approx \vec{r}$, $\vec{R}_L \approx \vec{r}_L$.

Da k groß, sind im Exponenten auch höhere Terme der Taylorreihe wichtig.

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = r - \underbrace{\left(\vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \right) r}_{\text{Fraunhofer-}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \right)^2 r}_{\text{Fresnel-Approximation}} + \dots$$

für R, R_L sehr groß

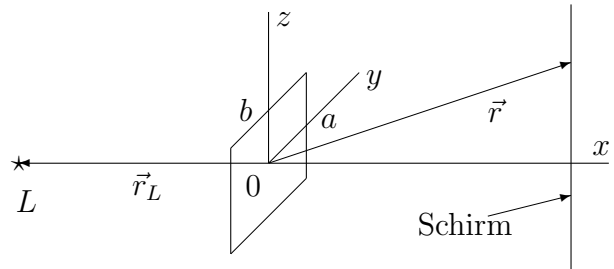
entsprechend für R_L .

Fraunhofer-Approximation

$$\psi(\vec{r}) = \frac{ikc_L}{4\pi} \left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{r}_L}{r_L} \right) \frac{1}{rr_L} e^{ik(r+r_L)} \cdot \int d\vec{f}' \exp \left(-ik \vec{r}' \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{r}_L}{r_L} \right) \right) + \dots$$

Beispiel: Rechteckspalt

mit $\vec{r}_L = -r_L \vec{e}_x$
 $d\vec{f}' = -\vec{e}_x dy' dz'$

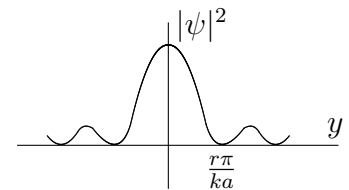


$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \frac{ikc_L}{4\pi} \frac{1}{rr_L} \left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{r}_L}{r_L} \right) e^{ik(r+r_L)} \cdot \int d\vec{f}' \exp \left(-ik \vec{r}' \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{r}_L}{r_L} \right) \right) \\ &= -\frac{ikc_L}{4\pi} \frac{1}{rr_L} \left(\frac{x}{r} + 1 \right) e^{ik(r+r_L)} \int_{-a}^a dy' \int_{-b}^b dz' \exp \left(-ik \left(\frac{y}{r} y' + \frac{z}{r} z' \right) \right) \\ &= -\frac{ikc_L}{4\pi} \frac{1}{rr_L} \left(\frac{x}{r} + 1 \right) e^{ik(r+r_L)} 4 \frac{\sin k \frac{y}{r} a}{k \frac{y}{r}} \frac{\sin k \frac{z}{r} b}{k \frac{z}{r}} \end{aligned}$$

Intensität \propto Poyntingvektor

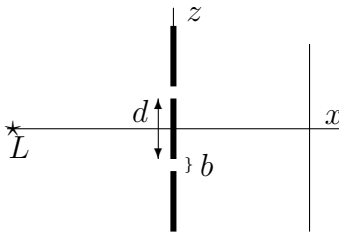
$$\vec{E} \times \vec{H} \propto |\psi|^2 \propto \left(\frac{\sin k \frac{y}{r} a}{k \frac{y}{r}} \right)^2 \left(\frac{\sin k \frac{z}{r} b}{k \frac{z}{r}} \right)^2$$

Spaltfunktion



11 C Interferenz

Beispiel: Doppelspalt



2 Spalte der Breite b im Abstand d . Sei $b \ll d \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &\propto \left(\int_{-d/2}^{-d/2+b} + \int_{d/2}^{d/2+b} \right) dz' \exp \left(-ik \frac{z}{r} z' \right) \\ &\approx \text{const.} \cdot b \left(e^{ik \frac{zd}{2r}} + e^{-ik \frac{zd}{2r}} \right) \\ &\propto \cos \frac{kd}{2r} z \end{aligned}$$

- d.h. bei (1) $z = 2\pi r n / (kd)$, ($n = \mathbb{Z}$) haben wir positive Interferenz: $|\psi(\vec{r})|$ maximal
 bei (2) $z = 2\pi r (n + 1/2) / (kd)$ haben wir negative Interferenz: $|\psi(\vec{r})| = 0$

12 Retardierte Potentiale

Beliebige Ladungs- und Stromverteilungen

Maxwell

Materialgleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} &= \vec{j} & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu \vec{H} \end{aligned}$$

Potentiale (4 A)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi - \dot{\vec{A}} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned}$$

12 A Inhomogene Wellengleichung

für φ und \vec{A}

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\Delta\varphi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon} \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0\mu\epsilon_0\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla}\varphi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) \\ &= -\Delta\vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla}\varphi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = \mu_0\mu\vec{j}\end{aligned}$$

Durch Umeichung (siehe §4 A)

$$\begin{aligned}\varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \Lambda \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda\end{aligned}$$

Lorentzzeichnung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi' = 0$$

\Rightarrow inhomogene Wellengleichungen für φ, \vec{A}'

$$\boxed{\begin{aligned}\square\varphi &= -\frac{1}{\epsilon_0\epsilon}\rho \\ \square\vec{A}' &= -\mu_0\mu\vec{j}\end{aligned}} \quad \text{mit } \square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Eine Lösung:

Retardierte Potentiale

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int d^3x' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \\ \vec{A}'(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)\end{aligned}}$$

(für ρ, \vec{j} unabhängig von t vgl. §5 E, §7 B)

Beweis: Mit $\Delta f(R) = \frac{1}{R} (Rf)''$ (siehe §11 B) \Rightarrow

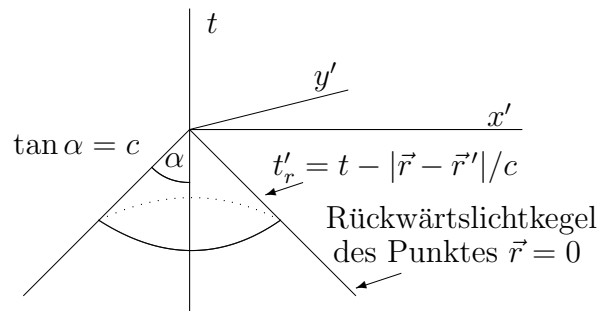
$$\square \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c)}{R} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{R}) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} \rho(\vec{r}', t - R/c) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c)}{R} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{R})$$

entsprechend für $\vec{A}'(\vec{r}, t)$. ■

Raumzeitdiagramm

Das Potential φ am Ort \vec{r} zur Zeit t wird bestimmt durch die
Ladungsverteilung ρ am Ort \vec{r}' zur Zeit $t'_r = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c =$ retardierte Zeit

d.h. durch ρ auf dem „Rückwärtslichtkegel“



(Auch eine Lösung der inhom. Wellengl. ist das nicht kausale „avancierte“ Potential mit $t'_a = t + |\vec{r} - \vec{r}'|/c$)

12 B Harmonisch schwingende Ladung

$$\rho(\vec{r}, t) = \text{Re } \rho_0(\vec{r}') e^{-i\omega t}$$

\Rightarrow

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int d^3x' \text{Re } \rho_0(\vec{r}') \underbrace{\frac{e^{-i\omega(t-R/c)}}{R}}_{\frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R}}, \quad (\text{mit } k = \omega/c)$$

= Superposition von Kugelwellen mit Zentrum \vec{r}' (§11 B)
d.h. Abstrahlung von Kugelwellen

12 C Hertzscher Dipol

Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{a \rightarrow 0} q \left(\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{a}) - \delta^{(3)}(\vec{r}) \right) = - \left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \right) \delta^{(3)}(\vec{r})$$

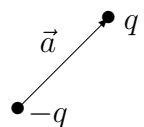
mit Dipolmoment $\vec{p}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} q\vec{a}$.

Stromdichte

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \quad \text{mit } \vec{v}(\vec{r}, t) = \dot{\vec{a}}(t) \\ &= \dot{\vec{p}}(t) \delta^{(3)}(\vec{r}) \end{aligned}$$

\Rightarrow retardierte Potentiale (in Lorentzzeichnung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi = 0$)

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \int d^3x' \frac{\dot{\vec{p}}(t - R/c) \delta^{(3)}(\vec{r}')}{R} = \mu_0\mu \dot{\vec{\Pi}} \\ \varphi(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{\epsilon_0\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}, \quad (\text{wegen } \dot{\varphi} = -c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \end{aligned}$$



mit dem „Hertzschen Vektor“

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi r} \vec{p}(t - r/c)$$

Es gilt für die Elektromagnetische Felder

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}} \stackrel{r \rightarrow 0}{\cong} O(r^{-3}) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} O(r^{-1}) \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \stackrel{r \rightarrow 0}{\cong} O(r^{-2}) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} O(r^{-1})\end{aligned}$$

Beweis: a) Nahzone $r \rightarrow 0$

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \vec{\nabla} \left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(-\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right) \equiv \text{statisches Dipolfeld (s. §3 A)}$$

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \vec{\nabla} \times \frac{\dot{\vec{p}}}{r} = -\frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{\vec{r} \times \dot{\vec{p}}}{r^3} \equiv \text{Biot-Savart für Stromstück } \dot{\vec{p}} \text{ (s. §3 B)}$$

b) Fernzone $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{p}(t - r/c)}{r} \right) - \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{p}}(t - r/c)}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon c^2} \left(\frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^3} - \frac{\ddot{\vec{p}}}{r} \right) + O(r^{-2}) \\ \vec{B} &= -\frac{\mu_0\mu}{4\pi c} \frac{\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}}{r^2} + O(r^{-2})\end{aligned}$$

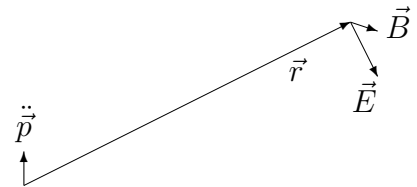
wegen

$$\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{p}(t - r/c)}{r} \right) = \vec{\nabla} \left(\frac{\dot{\vec{p}}}{r} \cdot \frac{\vec{r} - 1}{c} + \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{c^2 r^3} + O(r^{-2})$$

■

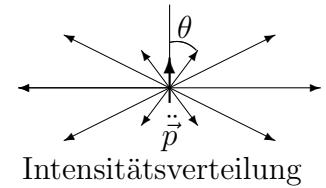
$$\begin{aligned}\text{Es gilt } \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0\epsilon c} \frac{c}{\mu_0\mu} \vec{B} = c\vec{B} \\ \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{B} &= -\frac{1}{c} \vec{E}\end{aligned}$$

d.h. $\vec{E} \perp \vec{B}$ und $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{r}$ und $\vec{B} \perp \ddot{\vec{p}}$
 \Rightarrow transversale Welle wird abgestrahlt



12 D Poyntingvektor

$$\begin{aligned}\text{in der Fernzone } \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = -c \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{B} \right) \times \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu} \\ &= \frac{c}{\mu_0\mu} B^2 \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\mu_0\mu}{16\pi^2 c} \frac{(\vec{r} \times \ddot{\vec{p}})^2}{r^2} \vec{r} \\ &= \frac{\mu_0\mu}{16\pi^2 c} \ddot{p}^2 \sin^2 \theta \frac{\vec{r}}{r^3}\end{aligned}$$



$S \propto \ddot{p}^2$ d.h. beschleunigte Ladung erzeugt Strahlung
 $S \propto 1/r^2 =$ quadratisches Abstandsgesetz

Gesamtabstrahlung

$$\begin{aligned}
 \dot{W} &= \int_{\text{gro\ss e Kugel}} d\vec{f} \cdot \vec{S} = \int r^2 d\Omega |S| \\
 &= 2\pi \frac{\mu_0 \mu}{16\pi^2 c} \ddot{p}^2 \int_{-1}^1 \sin^2 \theta d \cos \theta \\
 &= 2\pi \frac{\mu_0 \mu}{16\pi^2 c} \ddot{p}^2 \frac{4}{3} = \frac{\mu_0 \mu}{6\pi c} \ddot{p}^2
 \end{aligned}$$

Harmonische Schwingung: $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t \Rightarrow \ddot{p}^2 = \ddot{p}_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega t \Rightarrow$

$$\langle \dot{W} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \dot{W} = \frac{\mu_0 \mu}{12\pi c} \ddot{p}_0^2 \omega^4$$

(\Rightarrow Sonne rot, Himmel blau)

Teil III

Einsteins „Relativitätstheorie“

13 Vierdimensionale Formulierung der Elektrodynamik

(in den folgenden Paragraphen ist $c = c_0 = \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit}$)

13 A Vierervektoren und Vierertensoren

Definitionen

(1) **Ein Ereignis** ist durch eine Zeit t und einen Punkt $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gegeben:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Vierervektor des Ereignisses} \\
 c = \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit}$$

(2) Sei die Ladungsdichte ρ und Stromdichte \vec{j} gegeben

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \text{Viererstromdichte}$$

(3) Sei ein Elektrisches Feld \vec{E} und magnetisches Feld \vec{B} gegeben:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & . \\ F^{20} & . & . & . \\ F^{30} & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = -F^{\nu\mu}$$

= **elektromagnetischer Viererfeldtensor**

$$\left(\frac{1}{c}\vec{E} \rightarrow \vec{B}, \vec{B} \rightarrow -\frac{1}{c}\vec{E}\right)$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ . & 0 & \frac{1}{c}E_z & -\frac{1}{c}E_y \\ . & . & 0 & \frac{1}{c}E_x \\ . & . & . & 0 \end{pmatrix} = -\tilde{F}^{\nu\mu} \quad (= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma})$$

= **dualer Feldtensor**

$$(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{ antisymmetrisch, } \epsilon^{0123} = 1)$$

Ladungserhaltungssatz (Kontinuitätsgleichung)

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial}{\partial x^0} j^0 + \frac{\partial}{\partial x^1} j^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} j^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} j^3 = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu = 0$$

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

mit $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ und Einsteins Summenkonvention $a_\mu b^\mu = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu$.

13 B Maxwellsche Gleichungen

(im Vakuum) $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$, sei $H^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \Rightarrow$

$$\boxed{\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu H^{\mu\nu} = j^\nu} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j} \end{cases}$$

$$\boxed{\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \end{cases}$$

Beweis: 1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \sum_{\mu} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0} \sum_{\mu} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu 0} \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu 1} \\ . \\ . \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \right) \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} E_x + \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y \\ . \\ . \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon_0 c \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \\ -\epsilon_0 \dot{E}_x + \left(\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \right)_x \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \\ \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right)_x - \dot{D}_x \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ . \\ . \end{pmatrix} = j^\nu \end{aligned}$$

2. ersetze $\frac{1}{c}\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{B} \rightarrow -\frac{1}{c}\vec{E} \Rightarrow F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}$ ■

13C Viererpotential

El. Potential φ , Vektorpotential \vec{A}

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Lorentzgleichung (siehe §12 A)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \iff \boxed{\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu A^\mu = 0}$$

Darstellung von $F^{\mu\nu}$ durch A^μ

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \quad \text{mit } x_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad \text{und } \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

Beweis:

$$F^{01} = \frac{\partial}{\partial x_0} A^1 - \frac{\partial}{\partial x_1} A^0 = \frac{1}{c} \dot{A}_x + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{c} \varphi = -\frac{1}{c} E_x, \quad \text{usw}$$

$$F^{12} = \frac{\partial}{\partial x_1} A^2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A^1 = -\frac{\partial}{\partial x} A_y + \frac{\partial}{\partial y} A_x = -B_z, \quad \text{usw}$$

■

Eichinvarianz

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda \Rightarrow F^{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu\nu}$$

Wellengleichung für A^μ

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} = \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu \right) = \mu_0 j^\nu$$

$$= \square A^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu = \mu_0 j^\nu, \quad \text{mit } \square = \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

(in §10 A und §12 A: $\square \rightarrow -\square$). In Lorentzgleichung

$$\boxed{\square A^\nu = \mu_0 j^\nu}$$

Andere Formulierung

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \iff \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

Beweis: $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \exists A^\mu$ mit $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \Rightarrow$
 $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = \partial^\lambda (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \partial^\mu (\partial^\nu A^\lambda - \partial^\lambda A^\nu) + \partial^\nu (\partial^\lambda A^\mu - \partial^\mu A^\lambda) = 0$
 $\Rightarrow 0 = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu}) = 6\partial^\lambda \tilde{F}_{\lambda\rho}$ ■

14 Relativitätsprinzip und Lorentztransformationen

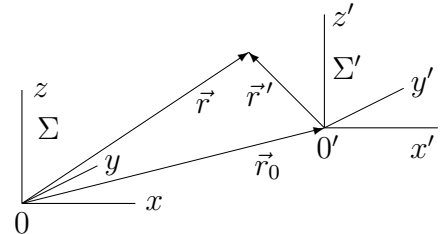
Hier $c = c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

14 A Inertialsysteme

Sei Σ ein Bezugssystem in dem Newton's Bewegungsgleichungen gelten (Inertialsystem) und Σ' ein dagegen gleichförmig geradlinig bewegtes (nicht rotierendes).

Koordinatentransformation

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$$



Falls $\vec{r}_0 = \vec{v}_0 t$ mit $\vec{v}_0 = \text{konstant}$ gilt : $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Ort} & \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t \\ \text{Geschwindigkeit} & \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0 \\ \text{Beschleunigung} & \ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} \end{array} \right.$

Für N Massenpunkte mit $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i \sum_j V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ gilt

$$m \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \iff m \ddot{\vec{r}}'_i = \vec{F}'_i$$

d.h. die Newtonschen Bewegungsgleichungen sind „forminvariant“.

Galileis Relativitätsprinzip Die Physik ist invariant unter „Galileitransformationen“

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t \\ t \rightarrow t' = t \end{array}}$$

Die Zeit ist „absolut“. Insbesondere gilt

Addition der Geschwindigkeiten

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

Annahme:

- (1) Es gelte Galileis Relativitätsprinzip
- (2) Maxwells Gleichungen gelten in allen Inertialsystemen Σ
 \Rightarrow Lichtgeschwindigkeit in allen Σ ist $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$

Satz: (1) widerspricht (2)

Beweis:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Geschwindigkeit einer Lichtwelle in } \Sigma : \quad \vec{c} \\ \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \text{Geschwindigkeit einer Lichtwelle in } \Sigma' : \quad \vec{c} - \vec{v}_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Widerspruch zu (2)} \blacksquare$$

(mit anderen Experimenten) \Rightarrow

Interpretation:

(1) gilt nicht wenn v groß, d.h. $v \approx c$

sondern **Lichtgeschwindigkeit = c in allen Inertialsystemen Σ .**

14 C Gleichzeitigkeit für entfernte Orte

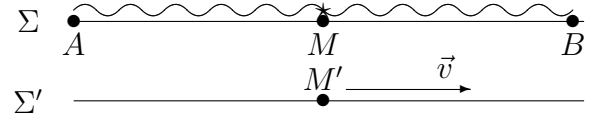
Annahme: \exists Maßstäbe und Uhren

Sei Strecke $\overline{AM} = \overline{MB} = l$

und seien A, M, B in Σ in Ruhe.

Bei M starten zur Zeit $t = 0$

Lichtwellen nach A und B .



Für einen Beobachter in Σ treffen sie bei A und B „gleichzeitig“ (nach Definition) ein zur Zeit $t = l/c$

Frage: Was gilt für einen Beobachter in Σ' (mit Geschwindigkeit v bewegt)?

Seien in Σ' die Strecken $\overline{AM'} = \overline{M'B'} = l'$ und sei $M = M'$ zur Zeit $t = 0$ und $t' = 0$.

Die Lichtwellen treffen ein für Beobachter in Σ' bei

$$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ zur Zeit } t'_A \Rightarrow \text{Strecke } \overline{M'M'} \text{ ist dann } = vt'_A \Rightarrow \text{Lichtweg } (M' \rightarrow A) = l' + vt'_A \\ B \text{ zur Zeit } t'_B \Rightarrow \text{Strecke } \overline{M'M'} \text{ ist dann } = vt'_B \Rightarrow \text{Lichtweg } (M' \rightarrow B) = l' - vt'_B \end{array} \right.$$

$$\text{Da in } \Sigma' \text{ Lichtgeschwindigkeit} = c \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l' + vt'_A = ct'_A \\ l' - vt'_B = ct'_B \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t'_A \neq t'_B}$$

\Rightarrow für Beobachter in Σ' trifft das Licht bei A und B nicht gleichzeitig ein!

\Rightarrow Gleichzeitigkeit in Σ und Σ' verschieden!

14 D Lorentztransformationen

Sei Σ ein Inertialsystem

Σ' ein Inertialsystem bewegt gegen Σ mit $\vec{v} = \text{const.}$

Ein Ereignis werde beschrieben in $\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \text{ durch } t, \vec{r} \rightarrow x^\mu \\ \Sigma' \text{ durch } t', \vec{r}' \rightarrow x'^\mu \end{array} \right.$

$$\text{mit } x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} \text{ und } x'^\mu = \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{r}' \end{pmatrix}$$

Wie hängen x^μ und x'^μ zusammen?

Für $v \ll c$ gilt die ‚Galileitransformation

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t \\ t' = t \end{array}}$$

Annahmen:

i) $x'^\mu = \text{linear}(x^\nu)$ d.h.

$$\boxed{x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu}$$

mit $\Lambda^\mu_\nu(\vec{v}) \leftrightarrow$ Matrix

$$\begin{aligned} x'^0 &= \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3 \\ x'^1 &= \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1 + \Lambda^1_2 x^2 + \Lambda^1_3 x^3 \\ x'^2 &= \dots \\ x'^3 &= \dots \end{aligned}$$

(damit $x^\mu = 0$ nicht ausgezeichnet wird)

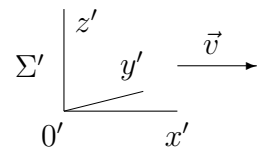
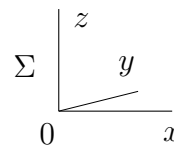
ii) Σ' gegen Σ mit \vec{v} bewegt $\Leftrightarrow \Sigma$ gegen Σ' mit $-\vec{v}$ bewegt, d.h.

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_\nu(\vec{v}) x^\nu \Leftrightarrow x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_\nu(-\vec{v}) x'^\nu$$

iii) in Σ und Σ' Lichtgeschwindigkeit = c (in allen Richtungen)

iv) Σ und Σ' experimentell ununterscheidbar (Relativitätsprinzip).

Seien die x, y, z -Achsen
parallel x', y', z' -Achsen
und $0 = 0'$ zur Zeit $t = 0$ und $t' = 0$
und sei \vec{v} in Richtung \vec{e}_x .



d.h. $y = 0 \Leftrightarrow y' = 0, \quad z = 0 \Leftrightarrow z' = 0, \quad x = vt \Leftrightarrow x' = 0 \quad \forall t$

$\stackrel{i)}{\Rightarrow} y' = \kappa y$, d.h. Länge eines Stabs parallel y -Achse = $\begin{cases} l & \text{in } \Sigma \\ \kappa l & \text{in } \Sigma' \end{cases}$

$\stackrel{iv)}{\Rightarrow} y = \kappa y' \Rightarrow \kappa = 1 \Rightarrow$

$y' = y, \quad \text{entsprechend } z' = z$

$\stackrel{i),ii)}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ x = \gamma(x' + vt') \end{array} \right\} \Rightarrow x/\gamma = \gamma(x - vt) + vt' \Rightarrow$

$$t' = \gamma t + (1/\gamma - \gamma) x/v$$

Bestimmung von γ :

Zur Zeit $t = t' = 0$ starte bei $0 = 0'$ eine Lichtwelle in x -Richtung

\Rightarrow sie trifft auf einen Schirm bei $\begin{cases} x \text{ zur Zeit } t \\ x' \text{ zur Zeit } t' \end{cases}$

$\stackrel{iii)}{\Rightarrow} \frac{x}{t} = \frac{x'}{t'} = c \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vx/c) \\ x = \gamma(x' + vx'/c) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Rightarrow$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Mit $(1/\gamma - \gamma) = \gamma(1/\gamma^2 - 1) = -\gamma\beta^2 = -\gamma v^2/c^2 \Rightarrow$

Spezielle Lorentztransformation

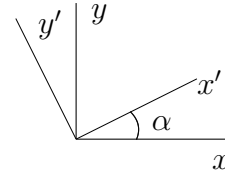
$$\left. \begin{array}{l} t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = x \end{array} \right\} \text{ d.h. } \Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beliebige Lorentztransformation

$$\Lambda_D \Lambda_{\text{Spez}} \Lambda'_D$$

mit Λ_D = Drehmatrix, z.B. Drehung um z -Achse

$$(\Lambda_D)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Notation $\beta = v/c = \tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta}$, mit

$$\sinh \theta = \frac{1}{2} (e^\theta - e^{-\theta}), \quad \cosh \theta = \frac{1}{2} (e^\theta + e^{-\theta}) \Rightarrow \cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow \gamma = (1 - \tanh^2 \theta)^{-1/2} = \cosh \theta$$

$$\Rightarrow (\Lambda_{\text{Spez}})^\mu{}_\nu \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

„Einsteins Relativitätsprinzip“ Die Physik ist invariant unter „Lorentztransformationen“

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

\equiv Transformationsgesetz der „speziellen Relativitätstheorie“

Die Zeit ist nicht absolut, sondern die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich!

Für Geschwindigkeiten $v \ll c$ gilt: Einsteins - \approx Galileis Relativitätsprinzip

14 E Minkowskiraum

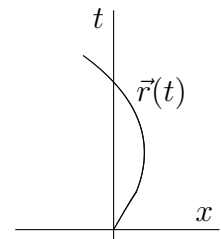
Definition: Der Minkowskiraum ist der 4-dimensionale Raum der Ereignisse

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sei ein (zeitlich bewegter) Punkt $\vec{r}(t)$ gegeben,

dann heißt die Kurve im Minkowskiraum

$$x^\mu(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r}(t) \end{pmatrix} \text{ die } \underline{\text{Weltlinie}} \text{ des Punktes } \vec{r}(t).$$



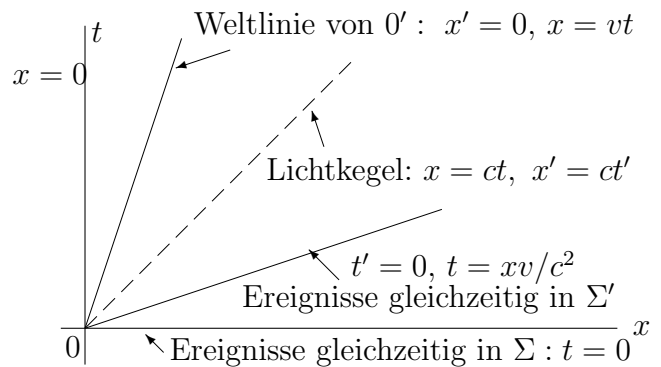
Eine Weltlinie ist eine Kurve im Raumzeitdiagramm (siehe auch §12 A). Z. B. die Weltlinie eines Punktes $\vec{r}(t) = \vec{v}t$ mit konstanter Geschwindigkeit ist eine Gerade.

Anwendung auf Gleichzeitigkeitsproblem

Sei Σ' gegen Σ bewegt mit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ und $0 = 0'$ für $t = t' = 0$:

Weltlinie von $0'$ ist die Gerade $x = vt$

$$\text{d.h. } x^\mu(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{v}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ vt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Für $t = 0$ sind Ereignisse in Σ gleichzeitig,
 Für $t' = 0$ sind Ereignisse in Σ' gleichzeitig,
 d.h. auf der Geraden $t = xv/c^2$

Folgerungen aus den Lorentztransformationen:

14 F Längenkontraktion, Zeitdilatation usw

a) Längenkontraktion: Ein Stab AB ruhe in Σ' mit A bei $0'$ und B bei $x' = l'$:

$$\text{Betrachte 2 Ereignisse zur Zeit } t = 0 : \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Punkt A } x_A^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_A'^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2. \text{ Punkt B } x_B^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_B'^\mu = \begin{pmatrix} ct' \\ l' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$x' = \gamma(x - vt) \Rightarrow$$

$$l' = \gamma l = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > l$$

d.h. bewegte Stäbe erscheinen kürzer (für Beobachter in Σ)!!

b) Zeitdilatation: Eine Uhr ruhe in Σ' bei $0'$:

$$\text{Betrachte 2 Ereignisse : } \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Uhr zeigt } t' = 0 \quad x_0^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0'^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2. \text{ Uhr zeigt } t' = T' \quad x_T^\mu = \begin{pmatrix} cT \\ x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_T'^\mu = \begin{pmatrix} cT' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\stackrel{ii)}{\Rightarrow} t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \Rightarrow$$

$$T = \gamma T' = \frac{T'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > T'$$

d.h. bewegte Uhren gehen langsamer (für Beobachter in Σ)!!

Beispiel: μ -Teilchen entstehen in $h \approx 10$ km Höhe, sie leben $\tau \approx 2 \cdot 10^{-6}$ s, ihre Geschwindigkeit $v \approx c = 3 \cdot 10^8$ m/s \Rightarrow für mitbewegten Beobachter legen sie $\approx 2 \cdot 10^{-6}$ s $\cdot 3 \cdot 10^8$ m/s = 600 m zurück. Aber sie erreichen die Erdoberfläche, weil für mitbewegten Beobachter die Länge h um $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ verkürzt und für Beobachter auf der Erde τ um $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ verlängert erscheint.

c) **Addition von Geschwindigkeiten:** Bewegung mit Geschwindigkeit in x -Richtung

$$\left. \begin{array}{l} v_1 \text{ in } \Sigma \\ v'_1 \text{ in } \Sigma' \end{array} \right\} \text{ d.h. } \left. \begin{array}{l} v_1 = x/t \\ v'_1 = x'/t' \end{array} \right\} \xrightarrow{ii)} v_1 = \frac{x}{t} = \frac{\gamma(x' + vt')}{\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{v_1 = \frac{v'_1 + v}{1 + \frac{vv'_1}{c^2}}} < v'_1 + v$$

Es gilt $v, v'_1 < c \Rightarrow v_1 < c$ und speziell $v'_1 = c \Rightarrow v_1 = c$.

d) **Maximale Signalgeschwindigkeit:**

$$\text{Ein Signal breite sich gemäß } \begin{cases} x(t) = v_1 t & \text{in } \Sigma \\ x'(t) = v'_1 t' & \text{in } \Sigma' \end{cases} \text{ aus}$$

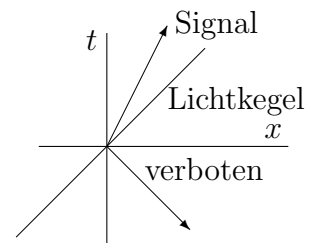
Kausalität: Signale gehen immer von der Vergangenheit in die Zukunft, d.h. $t > 0 \Leftrightarrow t' > 0 \quad \forall \Sigma'$

Es folgt Signalgeschwindigkeit

$$\boxed{v_1 \leq c}$$

d.h. die Weltlinie eines Signals liegt innerhalb des Vorwärtslichtkegels.

Beweis: sei $v_1 > c \Rightarrow \exists \Sigma'$ mit $v < c$ und $v_1 v > c^2 \Rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}v_1 t\right) < 0$ für $t > 0$: Widerspruch! ■



14 G Lorentz-Invarianz und -Kovarianz

Definition:

$$\underbrace{A^{\mu\nu\rho\dots}}_n$$

ist eine **Tensor** n -ter Stufe, falls beim Übergang von Inertialsystemen $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ das Transformationsgesetz gilt:

$$A^{\mu\nu\rho\dots} \rightarrow A'^{\mu\nu\rho\dots} = \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} \Lambda^\rho_{\rho'} \dots A^{\mu'\nu'\rho'\dots}$$

(mit Einsteins Summenkonvention $\sum_{\mu'=0}^3$ usw.), d.h. $A^{\mu\nu\rho\dots}$ transformiert wie $x^\mu x^\nu x^\rho \dots$

Speziell: Tensor 0. Stufe = 4-Skalar (invariant), z.B. c
 Tensor 1. Stufe = 4-Vektor (kovariant), z.B. x^μ, j^μ, A^μ (Bew siehe §14 H)
 Tensor 2. Stufe = 4-Tensor (kovariant), z.B. $F^{\mu\nu}$ (Bew siehe §14 H)

Definition: Seien $x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}, y^\mu = \begin{pmatrix} y^0 \\ \vec{y} \end{pmatrix}$ 4-Vektoren

Das **Skalarprodukt** im Minkowskiraum ist

$$xy = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu$$

mit dem **metrischer Tensor**

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Speziell

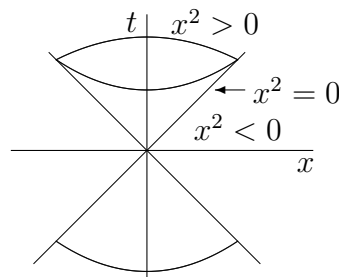
$$x^2 = c^2 t^2 - \vec{r}^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

definiert eine **Norm**.

(Man sollte Pseudo-Skalarprodukt und Pseudo-Norm sagen, weil x^2 nicht positiv ist.)

Man sagt (relativ zu $t = 0, \vec{r} = 0$) ist x^μ

zeitartig falls $x^2 > 0$
 raumartig falls $x^2 < 0$
 lichtartig falls $x^2 = 0$
 $x^2 = 0 \leftrightarrow x = \pm ct$



Satz: Unter Lorentztransformationen ist das Skalarprodukt $xy = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$ invariant

$$x' y' = xy$$

d.h. für die Pseudometrik $g_{\mu\nu}$ gilt

$$\Lambda^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma}$$

Beweis: $x^2 = c^2 t^2 - \vec{r}^2$ ist invariant da bei

1. Drehungen: t und \vec{r}^2 invariant:

$$\vec{r}'^2 = (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 + z^2 = \vec{r}^2$$

2. spezielle Lorentztransformationen:

$$\begin{aligned} x'^2 &= (x'^0)^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \\ &= (x^0 \cosh \theta - x^1 \sinh \theta)^2 - (x^0 \sinh \theta - x^1 \cosh \theta)^2 - y^2 - z^2 = x^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow xy = \frac{1}{2}((x+y)^2 - x^2 - y^2)$ invariant.

Die Invarianz der Metrik $g_{\mu\nu}$ ist in Matrixform $\Lambda^T g \Lambda = g$:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

für Drehungen und spezielle Lorentztransformationen. ■

Definition:

Die linearen Transformationen, die $g_{\mu\nu}$ invariant lassen bilden die **Lorentzgruppe**.

„Rauf und runterziehen von Indizes“

$$A_{\mu}^{\nu\rho\dots} = g_{\mu\mu'} A^{\mu'\nu\rho\dots} = g^{\nu\nu'} A_{\mu\nu'}^{\rho\dots}$$

mit $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Beispiele:

$$x_{\mu} = g_{\mu\mu'} x^{\mu'} = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{r} \end{pmatrix}, \quad (\text{siehe §13 C})$$

$$g_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\mu'} g^{\mu'\nu} = g^{\nu\nu'} g_{\mu\nu'} = \delta_{\mu}^{\nu}$$

Beim

„**Verjüngen**“ durch Summation über gleiche obere und untere Indizes entstehen neue Tensoren, z.B.

$$xy = x^{\mu} y_{\mu}$$

$$A_{\mu}^{\mu\rho\dots} = A_{\mu}^{\mu\rho\dots} = B^{\rho\dots}$$

(Beweis wie oben)

14 H Beispiele für 4-Tensoren

x^{μ} und ∂^{μ}

$$x^{\mu} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$$

sind 4-Vektoren

$$\partial^{\mu} \partial_{\mu} = \square = \text{Skalar}$$

Beweis: für x^{μ} nach Definition und für ∂^{μ} da

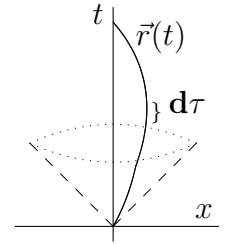
$$\partial^{\mu} x^{\nu} = g^{\mu\rho} \partial_{\rho} x^{\nu} = g^{\mu\rho} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\rho}} = g^{\mu\nu} = \text{4-Tensor}$$

■

Eigenzeit

Ein Punkt bewege sich entlang der Weltlinie $x^\mu(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r}(t) \end{pmatrix}$

mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$



Definition: Die „Eigenzeit“ ist die Zeit im mitbewegten System. Sei Σ' bewegt gegen Σ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ (nicht notwendig konstant) \Rightarrow

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} dx^\mu dx_\mu = dt^2 - \frac{1}{c^2} d\vec{r}^2 = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) dt^2$$

$$\boxed{d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt = dt/\gamma = dt'} \quad \text{mit } \beta = \frac{v}{c}$$

(siehe auch §14 F: $T = \gamma T'$)

Nach Definition ist

$$\boxed{d\tau \text{ invariant}}$$

unter Lorentztransformationen.

Zwillingsparadox

$$\text{Eigenzeit} = \int d\tau = \int \sqrt{1 - \beta^2} dt \leq \int dt$$

Die Bogenlänge $\int d\tau$ in der Pseudo-Metrik im Vorwärtslichtkegel ist maximal für die Gerade.

Vierergeschwindigkeit

$$\boxed{u^\mu = \frac{d}{d\tau} x^\mu = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}} = \text{4-Vektor}$$

transformiert sich wie x^μ , d.h. ist ein 4-Vektor mit $u^2 = (u^0)^2 - \vec{u}^2 = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2 =$ invariant!

Viererimpuls

$$\boxed{p^\mu = mu^\mu} = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \text{4-Vektor}$$

mit $m =$ Masse, $p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 =$ invariant!

Viererstromdichte

(§13 A)

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \text{4-Vektor} = \text{Tensor 1.Stufe, d.h. } j'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu'} j^\nu$$

Beweis: Für ein Punktteilchen bei \vec{r}_0 (siehe §1 B)

$$\rho = q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\vec{j} = \rho\vec{v}(\vec{r})$$

⇒

$$j^\mu = q \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = qu^\mu \frac{1}{\gamma} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 4\text{-Vektor}$$

da

$$\gamma d^3x, \text{ und } \delta^{(3)}(\vec{r})/\gamma \text{ invariant}$$

wegen Längenkontraktion (§14 D) und $u^\mu = 4\text{-Vektor}$. ■

Viererpotential

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix} 4\text{-Vektor}$$

da $\square A^\mu = \mu_0 j^\mu$ (siehe §13 C) und $\square = \text{Skalar}$, $j^\mu = 4\text{-Vektor}$.

Vierervektortensor

§13 A §13 C ⇒

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = 4\text{-Tensor}$$

Viererkraft

auf ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld .

Definition:

$$F^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu = 4\text{-Vektor}$$

da $F^{\mu\nu} = 4\text{-Tensor}$, $u_\nu = 4\text{-Vektor}$.

Explizit (§13 A)

$$F^\mu = q \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} c \\ -\vec{v} \end{pmatrix} = q\gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\vec{E} \cdot \vec{v} \\ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\vec{F} \cdot \vec{v} \\ \vec{F} \end{pmatrix}$$

mit $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \text{Coulomb- + Lorentzkraft}$.

Kraftdichte

$$f^\mu = F^{\mu\nu} j_\nu = F \begin{pmatrix} c\rho \\ -\vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\vec{E} \cdot \vec{j} \\ \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Leistungsdichte} \\ \text{Kraftdichte} \end{pmatrix}$$

mit

$$F^\mu = \gamma \int d^3x f^\mu$$

läßt sich schreiben als (Beweis wie in §9 E mit Maxwell: $\partial_\mu H^{\mu\nu} = j^\nu$, $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$)

$$f^\nu = -\partial_\mu T^{\mu\nu}$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} H_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} - H^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho = \begin{pmatrix} w & \frac{1}{c}S_k \\ \frac{1}{c}S_i & -T_{ik} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \text{Energiedichte (§9 C)} \quad w &= \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \\ \text{Poyntingscher Vektor (§9 C)} \quad \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} \\ \text{Maxwellscher Spannungstensor (§9 E)} \quad T_{ik} &= D_i E_k + B_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \end{aligned}$$

$T^{\mu\nu}$ heißt Energie-Impuls-Tensor (siehe §19 C).

Bewegungsgleichung

eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} p^\mu &= F^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu = q (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) u_\nu \\ \boxed{\frac{d}{d\tau} (p^\mu + q A^\mu) &= q \partial^\mu A^\nu u_\nu} \end{aligned}$$

da $\frac{d}{d\tau} A^\mu = (\partial^\nu A^\mu) \frac{d}{d\tau} x_\nu = \partial^\nu A^\mu u_\nu$

15 Relativistische Mechanik

15 A Bewegungsgleichung eines Massenpunktes

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu}$$

mit

$$p^\mu = m u^\mu = \gamma m \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \quad F^\mu = \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{F} \cdot \vec{v} \\ \vec{F} \end{pmatrix}, \quad \text{und } d\tau = dt/\gamma = \text{Eigenzeit}$$

$m =$ Ruhemasse des Teilchens.

Beispiel: konstante Kraft (siehe Übung): $\vec{F} = F \vec{e}_x$, $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$ mit $d\tau = dt/\gamma \Rightarrow$

$$\begin{aligned} m \frac{d}{d\tau} \gamma v &= m \gamma \frac{d}{dt} \gamma v = \gamma F \Rightarrow \gamma v = \frac{F}{m} t \Rightarrow v^2 = (1 - v^2/c^2) \left(\frac{F}{m} \right)^2 t^2 \Rightarrow \\ v(t) &= \frac{1}{\sqrt{c^2 m^2 + F^2 t^2}} c t F \rightarrow \begin{cases} \frac{F}{m} t & \text{für } t \rightarrow 0 \\ c & \text{für } t \rightarrow \infty \end{cases} \\ x(t) &= \int_0^t v(t') dt' = c \left(\sqrt{c^2 m^2 / F^2 + t^2} - \sqrt{c^2 m^2 / F^2} \right) \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 & \text{für } t \rightarrow 0 \\ ct & \text{für } t \rightarrow \infty \end{cases} \\ cp^0 &= \gamma m c^2 = \frac{c^2 F}{v} t = c \sqrt{c^2 m^2 + F^2 t^2} \rightarrow \begin{cases} mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 & \text{für } t \rightarrow 0 \\ Fx & \text{für } t \rightarrow \infty \end{cases} \end{aligned}$$

d.h. $cp^0 \leftrightarrow$ Energie

15 B Energie

Interpretation von $p^0 = mu^0 = \gamma mc$:

Energiesatz $\Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} E = \text{Leistung} \Rightarrow$

$$\frac{d}{d\tau} p^0 = F^0 = \gamma \frac{1}{c} \vec{F} \cdot \vec{v} = \gamma \frac{1}{c} \frac{d}{dt} E = \frac{1}{c} \frac{d}{d\tau} \text{Energie}$$

also

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boxed{p^2 = \frac{1}{c^2} E^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2}, \quad \text{da } p^\mu = mu^\mu \text{ und } u^\mu = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

Es folgt Energie

$$\begin{aligned} \boxed{E = cp^0 = cmu^0 = \gamma mc^2 = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2 = m(v)c^2} \\ = mc^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + O(v^4/c^4) \\ = \text{Ruheenergie} + \text{kinetische Energie} \end{aligned}$$

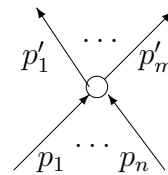
Trägheit der Energie $\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} m(v) \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{F} \cdot \vec{v} \\ \vec{F} \end{pmatrix}$$

15 C Viererimpulserhaltung

beim Stoß oder Zerfall: n-Teilchen \rightarrow m-Teilchen

$$\boxed{p_1^\mu + \dots + p_n^\mu = p_1'^\mu + \dots + p_m'^\mu} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Energieerhaltung} \\ \text{Impulserhaltung} \end{cases}$$



Beispiel: Zerfall eines Teilchens $\bullet \xleftarrow{m} \bullet \xrightarrow{m} \bullet$ im Schwerpunktsystem

$$\begin{aligned} p^\mu &= p_1'^\mu + p_2'^\mu \\ \begin{pmatrix} cM \\ \vec{p} = 0 \end{pmatrix} &= \gamma \left(\begin{pmatrix} cm \\ m\vec{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cm \\ -m\vec{v} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$M = 2m\gamma \Rightarrow (1 - v^2/c^2) M^2 = 4m^2 \Rightarrow v^2 = \frac{c^2}{M^2} (M^2 - 4m^2)$$

d.h. Zerfall möglich falls $M^2 > 4m^2 \Rightarrow$ Umwandlung von Ruheenergie in kinetische Energie (\rightarrow z.B. Kernenergie).

16 Relativistische Elektrodynamik

16 A Kovarianz der Maxwellgleichungen

Nach §13 B: im Vakuum $H^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \Rightarrow$

$$\boxed{\partial_\mu H^{\mu\nu} = j^\nu}$$

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0} \Leftrightarrow \boxed{\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0}$$

sind Gleichungen für 4-Tensoren (1., 2. und 3. Stufe)

16 B Transformationsformeln

1) der Viererstromdichte

nach §14 H ist j^μ 4-Vektor, d.h. transformiert nach §14 G wie

$$j^\mu \rightarrow j'^\mu = \Lambda^\mu_{\mu'} j^{\mu'}, \text{ d.h. } j' = \Lambda j$$

Sei $\vec{v} = v\vec{e}_x \Rightarrow$ für $j^0 = c\rho$, $j^1 = j_x$ (nach §14 D)

$$\begin{pmatrix} c\rho' \\ j'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c\rho - \frac{v}{c}j_x \\ j_x - v\rho \end{pmatrix}$$

2) der Felder

nach §14 H ist $F^{\mu\nu}$ ein 4-Tensor, d.h. transformiert nach §14 G wie

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} F^{\mu'\nu'}, \text{ d.h. } F' = \Lambda F \Lambda^T$$

nach §13 A \Rightarrow

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E'_x & -\frac{1}{c}E'_y & -\frac{1}{c}E'_z \\ \frac{1}{c}E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ \frac{1}{c}E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ \frac{1}{c}E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\gamma\frac{1}{c}(E_y - \beta B_z) & -\gamma\frac{1}{c}(E_z + \beta B_y) \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -\gamma(B_z - \beta\frac{1}{c}E_y) & \gamma(B_y + \beta\frac{1}{c}E_z) \\ \gamma\frac{1}{c}(E_y - \beta B_z) & \gamma(B_z - \beta\frac{1}{c}E_y) & 0 & -B_x \\ \gamma\frac{1}{c}(E_z + \beta B_y) & -\gamma(B_y + \beta\frac{1}{c}E_z) & B_x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_y & B'_y &= \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}/c^2)_y \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_z & B'_z &= \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}/c^2)_z \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma \left(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B} \right) & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma \left(\vec{B}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{E} / c^2 \right) \end{aligned}$$

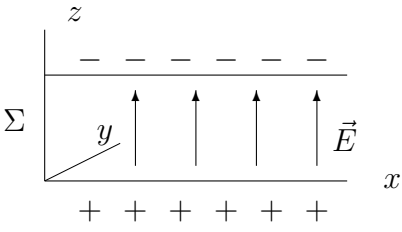
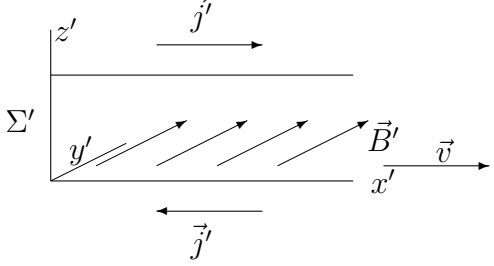
mit $E_x \rightarrow \vec{E}_{\parallel}$, $E_{y,z} \rightarrow \vec{E}_{\perp}$ d.h. \parallel, \perp zu \vec{v}

d.h. durch Lorentztransformationen gibt es Übergänge $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$.

Dieses Ergebnis ist nicht neu, sondern ist enthalten in §1 bis §3

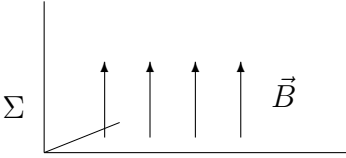
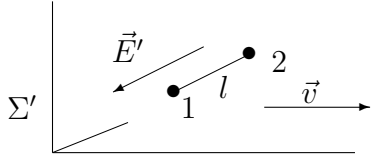
Beispiele:

i) Plattenkondensator

in Σ	in Σ'
	
$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$ $\vec{B} = 0$	<p>Längenkontr. $\Rightarrow \rho' = \gamma \rho$</p> $\Rightarrow \vec{E}' = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$ <p>Strom \vec{j}' durch bewegte Ladung \Rightarrow</p> $\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B}' = \vec{j}' \quad \Rightarrow \quad \vec{B}' = \frac{v}{c^2} \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$

Stimmt überein mit $E'_z = \gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)_z$ und $B'_y = \gamma \left(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E} / c^2 \right)_y$.

ii) Induktion

in Σ	in Σ'
	
$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$ $\vec{E} = 0$	$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ j' = \gamma j \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B}' = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">Faraday \Rightarrow</p> $lE' = U'_{12} = -\dot{\phi}' = -lvB'$ $\Rightarrow \vec{E}' = -v \begin{pmatrix} 0 \\ B' \\ 0 \end{pmatrix} = -\gamma v \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix}$

Stimmt überein mit $B'_z = \gamma \left(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}/c^2 \right)_z$ und $E'_y = \gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)_y$.

16 C Ebene Wellen

4-Wellenvektor

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\omega \\ \vec{k} \end{pmatrix} = 4\text{-Vektor, d.h. } \begin{cases} \omega' = \gamma(\omega - \beta ck_x) \\ k'_x = \gamma(k_x - \frac{1}{c}\beta\omega) \end{cases} \quad \text{für } \vec{v} = v\vec{e}_x$$

Beweis: Sei $\psi(x) = \psi(t, \vec{r})$ eine Komponente von \vec{E} oder \vec{B} :

Ebene Welle in $\begin{cases} \Sigma : \psi(x) = \text{Re } e^{i\phi} = \text{Re } e^{-ikx}, & \text{mit Phase } \phi = -kx = -k^\mu x_\mu = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \\ \Sigma' : \psi'(x') = \text{Re } e^{i\phi'} = \text{Re } e^{-ik'x'}, & \text{mit Phase } \phi' = -k'x' = \vec{k}' \cdot \vec{r}' - \omega't' \end{cases}$

Interferenzen sind unabhängig von $\Sigma \Rightarrow \phi = \phi' \Rightarrow k^\mu = 4\text{-Vektor, da } \Lambda^T g \Lambda = g \text{ (§14 G)}$
 $\Rightarrow k'^T g x' = k^T g x = k^T \Lambda^T g \Lambda x = (\Lambda k)^T g x' \Rightarrow k' = \Lambda k. \blacksquare$

Folgerungen:

Dopplereffekt (siehe Übung)

Strahlungsquelle mit ω' ruhe in Σ' gegen Σ mit v bewegt in x -Richtung \Rightarrow

$$\omega' = \gamma(\omega - vk_x) = \gamma\omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta \right), \quad \text{mit } k_x = k \cos \vartheta, \quad k = \omega/c$$

speziell \vec{k} in $\pm x$ -Richtung $\Rightarrow k_x = \pm\omega/c \Rightarrow$

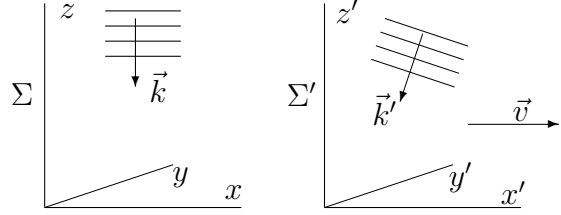
$$\omega = \frac{1}{\gamma} \frac{\omega'}{1 \mp \frac{v}{c}} \approx \omega' \left(1 \pm \frac{v}{c} \right)$$

Wenn Quelle sich entfernt: $k_x < 0 \Rightarrow \omega < \omega' \Rightarrow$ „Rotverschiebung“.

Aberration (siehe Übung)
senkrechter Einfall von Licht

$$\text{Sei in } \Sigma : \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}, \quad k = \omega/c$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} k'_x = -\gamma \frac{1}{c} \beta \omega \\ k'_z = k_z = -\frac{1}{c} \omega \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{k'_x}{k'_z} = \gamma \beta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



d.h. die Wellenfront ist gekippt

Allgemein: sei $k_x = k \cos \vartheta$, $k'_x = k' \cos \vartheta'$, mit $k'/\omega' = k/\omega = c \Rightarrow$

$$\cos \vartheta' = \frac{k'_x}{k'} = \frac{\gamma (ck_x - \beta \omega)}{\omega'} = \frac{\cos \vartheta - \beta}{1 - \beta \cos \vartheta}$$

16 D Bewegte Materie mit $\epsilon, \mu \neq 1$

$$\text{Mit } H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -cD_x & -cD_y & -cD_z \\ cD_x & 0 & -H_z & H_y \\ cD_y & H_z & 0 & -H_x \\ cD_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \text{ und } c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit} \Rightarrow$$

Maxwellgleichung (wie in §13 B)

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = j^\nu$$

Da ∂_μ und $j^\nu = 4$ -Vektoren $\Rightarrow H^{\mu\nu} = 4$ -Tensor. Wie in §16 B gilt

$$\begin{aligned} \vec{D}'_{\parallel} &= \vec{D}_{\parallel} & \vec{H}'_{\parallel} &= \vec{H}_{\parallel} \\ \vec{D}'_{\perp} &= \gamma \left(\vec{D}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{H}/c^2 \right) & \vec{H}'_{\perp} &= \gamma \left(\vec{H}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{D} \right) \end{aligned}$$

Es gibt ein ausgezeichnetes Bezugssystem Σ' in dem die Materie ruht:
In diesem Σ' gilt

$$\vec{D}' = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}', \quad \vec{B}' = \mu_0 \mu \vec{H}' = \text{Materialgleichungen}$$

Die entsprechenden Gleichungen in Σ sind

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon \vec{E} + \gamma^2 \epsilon_0 (\epsilon - 1/\mu) \vec{v} \times \left(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}/c^2 \right) \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{B} + \gamma^2 \epsilon_0 (\epsilon - 1/\mu) \vec{v} \times \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \end{aligned}}$$

Beweis: Für die Komponenten \parallel zu \vec{v} ok., für \perp gilt

$$\begin{aligned} \vec{D}' &= \epsilon_0 \epsilon \vec{E}' \Rightarrow \vec{D}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{H}/c^2 = \epsilon_0 \epsilon \left(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \\ \vec{B}' &= \mu_0 \mu \vec{H}' \Rightarrow \vec{B}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{E}/c^2 = \mu_0 \mu \left(\vec{H}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{D} \right) \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} & \epsilon_0 (\epsilon - 1/\mu) \vec{v} \times \left(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}_\perp / c^2 \right) \\ &= \epsilon_0 \epsilon \vec{v} \times \left(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}_\perp / c^2 \right) - \epsilon_0 \frac{1}{\mu} \mu_0 \mu \vec{v} \times \left(\vec{H}_\perp - \vec{v} \times \vec{D} \right) \\ &= \vec{D}_\perp - \epsilon_0 \epsilon \vec{E}_\perp + \beta^2 \epsilon_0 \epsilon \vec{E}_\perp - \beta^2 \vec{D}_\perp = (1 - \beta^2) \left(\vec{D}_\perp - \epsilon_0 \epsilon \vec{E}_\perp \right) \end{aligned}$$

wegen $\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{E}) = -v^2 \vec{E}_\perp$ usw., entsprechend

$$\begin{aligned} & \epsilon_0 (\epsilon - 1/\mu) \vec{v} \times \left(\vec{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B}_\perp \right) \\ &= \vec{v} \times \left(\vec{D}_\perp + \vec{v} \times \vec{H} / c^2 \right) - \epsilon_0 \frac{1}{\mu} \vec{v} \times \left(\vec{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B}_\perp \right) \\ &= \vec{H}_\perp - \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{B}_\perp - \beta^2 \vec{H}_\perp + \frac{1}{\mu_0 \mu} \beta^2 \vec{B}_\perp = (1 - \beta^2) \left(\vec{H}_\perp - \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{B}_\perp \right) \end{aligned}$$

■

Polarisation \vec{P} und Magnetisierung \vec{M} (siehe §6 C und §7 C)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$$

$$\text{mit } M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -cP_x & -cP_y & -cP_z \\ cP_x & 0 & -M_z & M_y \\ cP_y & M_z & 0 & -M_x \\ cP_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

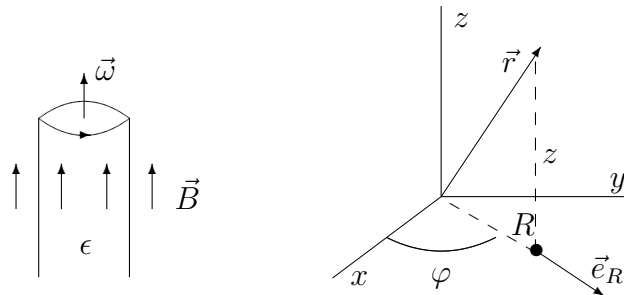
$$\begin{aligned} \text{Im Vakuum ist } & F^{\mu\nu} = \mu_0 H^{\mu\nu} \\ \text{in Materie } & F^{\mu\nu} = \mu_0 (H^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

wegen Lorentz-Kovarianz \Rightarrow

$$\begin{aligned} \vec{P}'_\parallel &= \vec{P}_\parallel & \vec{M}'_\parallel &= \vec{M}_\parallel \\ \vec{P}'_\perp &= \gamma \left(\vec{P}_\perp - \vec{v} \times \vec{M} / c^2 \right) & \vec{M}'_\perp &= \gamma \left(\vec{M}_\perp + \vec{v} \times \vec{P} \right) \end{aligned}$$

Beispiel: (siehe Übung)

Ein (∞ -langer) dielektrischer Zylinder mit dem Radius R_0 rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse im \vec{B} -Feld (homogen)



Zylinderkoordinaten R, φ, z

Sei $\mu = 1$ und $v = \omega R \ll c \Rightarrow$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} + \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{v} \times \vec{B}$$

Da $\rho = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = 0$ wegen Symmetrie $\Rightarrow \vec{D} = 0 \Rightarrow$

$$\vec{E} = -\frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon} \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon} \vec{v} \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon} B \omega R \vec{e}_R$$

Polarisationsladungsdichte: nach §6 C gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{\text{pol}} \Rightarrow$ auf dem Zylindermantel $R = R_0$ (wie in §6 B) $P_{\text{außen}} - P_{\text{innen}} = -\sigma_{\text{pol}}$

$$\sigma_{\text{pol}} = \epsilon_0 \frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon} \omega B R_0, \quad \frac{Q_P}{l} = 2\pi R_0^2 \frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon} \omega B$$

17 Einsteins „Allgemeine Relativitätstheorie“

17 A Allgemeine Relativität - Äquivalenzprinzip

Galilei, Newton

1. \exists absolute Zeit, d.h. Gleichzeitigkeit ist überall wohldefiniert
2. \exists absoluter Raum, in dem kräftefreie Bewegungen sind;
bei Beschleunigung gegen den absoluten Raum \Rightarrow Trägheitskräfte.
 $\Rightarrow \exists$ ausgezeichnete Bezugssysteme Σ (Inertialsysteme), die gegen den absoluten Raum geradlinig gleichförmig bewegt sind, in denen die Bewegungsgleichungen gleich sind.

Einsteins spezielle Relativität

1. falsch
2. richtig

Einsteins allgemeine Relativität

2. auch falsch: alle Σ sind gleichwertig, auch beschleunigte

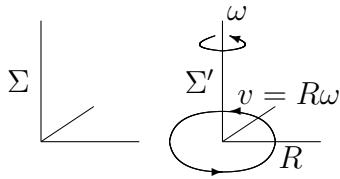
Begründung: Träge Masse = schwere Masse \iff **Äquivalenzprinzip**

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Trägheitskräfte} \propto \text{Masse} \\ \text{Gravitation} \propto \text{Masse} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{experimentell nicht unterscheidbar} \\ \text{z.B. Schwingungsdauer von Pendeln} \end{array} \right.$$

d.h. im Gravitationsfeld frei fallende Bezugssysteme sind Inertialsysteme

17B Nichteuclidischer Raum

Beispiel: Σ' rotiere gegen Inertialsystem Σ



$$\frac{\text{Umfang}}{\text{Radius}} = \begin{cases} 2\pi & \text{in } \Sigma \\ 2\pi\gamma & \text{in } \Sigma' \text{ wegen Längenkontraktion} \end{cases}$$

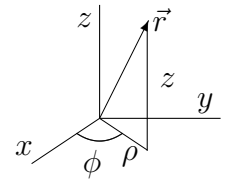
(entsprechendes gilt in 2 Dimensionen für gekrümmte Flächen)

Metrik

3 Dimensionen: Abstand

in Σ : $d\vec{r}^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi + dz^2$

in Σ' : $d\vec{r}'^2 = d\rho^2 + \gamma^2 \rho^2 d\phi + dz^2 \Rightarrow \frac{\text{Umfang}}{\text{Radius}} = 2\pi\gamma, \quad \frac{v}{c} = \frac{\omega\rho}{c}$



4 Dimensionen: invarianter „Abstand“

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

Im Inertialsystem ist die Metrik „flach“

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

17C Dynamik

a) Feldgleichung für Gravitationsfeld

(i) Newton: Poissongleichung

$$\Delta V_{\text{Newton}} = -4\pi G \rho_{\text{Masse}}(\vec{r})$$

(ii) Einstein: Gravitation \leftrightarrow metrischer Tensor $g_{\mu\nu}$

Einsteintensor $G^{\mu\nu}(\partial_\lambda, g_{\rho\sigma}) \leftrightarrow$ Krümmung des \mathbb{R}^4

Einsteinsche Feldgleichung

$$G^{\mu\nu}(x) = -\frac{8\pi G}{c^2} T^{\mu\nu}(x)$$

($T^{\mu\nu}(x)$ = Energie-Impuls-Tensor, speziell T^{00} = Energiedichte \sim Massendichte)

\Rightarrow Massen krümmen den Raum

b) Bahnen von Massen im Gravitationsfeld (sonst kräftefrei)

(i) Newton \rightarrow Kepler

(ii) Einstein \rightarrow Bahnen sind „Geodäten“ (d.h. geradeste Linien) im Raum der Ereignisse

$$\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} \right\}$$

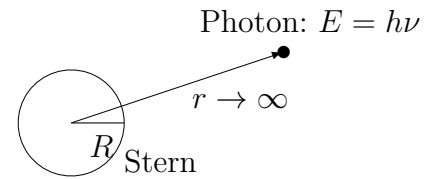
17 D Folgerungen

a) Rotverschiebung

$$\text{Potential } V(r) = -\frac{GM}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{m(V(\infty) - V(R))}{mc^2} = \frac{GM}{c^2 R} = \frac{r_0}{2R}$$

mit „Schwarzschildradius“ $r_0 = 2\frac{GM}{c^2}$



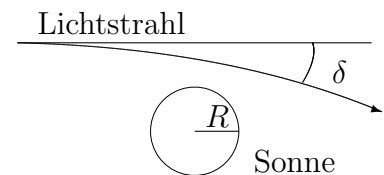
z.B.

$$\frac{r_0}{R} = \begin{cases} 10^{-38} & \text{Proton} \\ 10^{-9} & \text{Erde} \\ 10^{-6} & \text{Sonne} \\ \approx 1 & \text{Neutronenstern} \end{cases}$$

Experimente sind schwierig wegen Dopplereffekt,
im Erdschwerefeld $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-15}$ gemessen.

b) Lichtablenkung

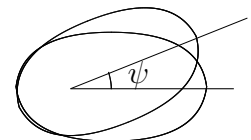
$$\delta = \begin{cases} \frac{r_0}{R} & \text{nach Newton} \\ 2\frac{r_0}{R} & \text{nach Einstein} = 2'' \\ \approx \text{gemessen (bei Sonnenfinsternis)} \end{cases}$$



c) Perihelverschiebung (Abweichung von Kepler)

$$\psi = 6\pi \frac{r_0}{2r}$$

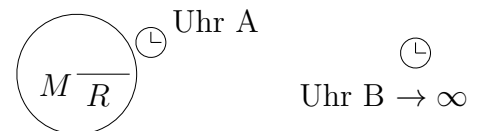
in 100 Jahren: $\psi = \begin{cases} \text{theor.} & \text{experimentell} \\ 43.03'' & 43.11'' \pm 0.45'' \text{ Merkur} \\ 3.8'' & 5.0'' \pm 1.2'' \text{ Erde} \end{cases}$



(Messungen schwierig wegen anderer Störungen)

d) Uhren im Schwerfeld

$$\frac{T_A}{T_B} = 1 - \frac{r_0}{2R}$$



d.h. Uhr A geht langsamer

e) Maßstäbe im Schwerfeld

$$\frac{L_A}{L_B} = 1 - \frac{r_0}{2R}$$

d.h. Stab L_A ist kürzer

f) Schwarze Löcher

Kugelsymmetrische Lösung der Einsteinsche Feldgleichung:

Schwarzschild-Metrik $g_{\mu\nu}$

$$ds^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega$$

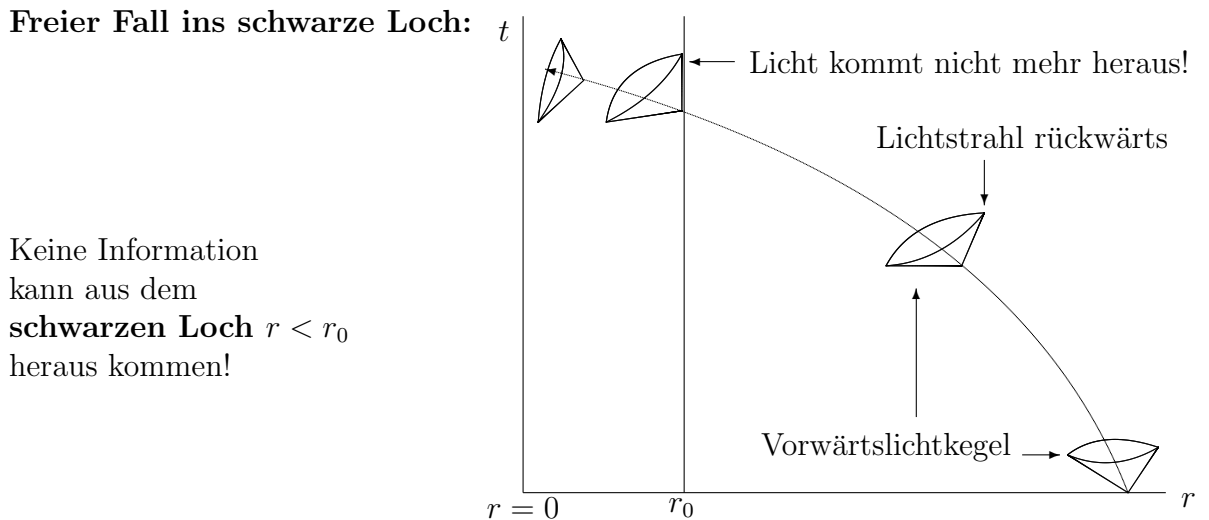
($r_0 = 2GM/c^2 =$ Schwarzschildradius, $\Omega =$ Raumwinkel).

Für $r \rightarrow \infty \Rightarrow$ Gravitationspotential

$$V_{\text{Newton}}(r) = -\frac{GM}{r}$$

Was passiert wenn $r \rightarrow r_0$ (Schwarzschildsingularität)?

Freier Fall ins schwarze Loch:



Teil IV

Feldtheorie

18 Lagrangesche Formulierung

18 A Mechanik

(endlich viele Freiheitsgrade)

Generalisierte Koordinaten: q_1, \dots, q_n (bestimmen die Konfiguration des Systems)

Generalisierte Geschwindigkeiten: $\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i$

Lagrange-Funktion

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (\text{oft} = T - V = \text{kin.} - \text{pot. Energie})$$

Wirkung

$$S = \int_{t_1, \mathcal{C}}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$$

\mathcal{C} = Weg im Konfigurationsraum.

Hamiltonsches Prinzip

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ physikalisch} \Leftrightarrow \delta S = 0} \quad (\text{Endpunkte von } \mathcal{C} \text{ fest})$$

Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{t_1, \mathcal{C}}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \int_{t_1, \mathcal{C}}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_1^2 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$$

Kanonischer Impuls

$$\boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$$

Legendretransformation

$$H(p_i, q_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (\text{oft } H = \text{Energie})$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

18 B Freies relativistisches Teilchen

Wirkung relativistisch invariant:

$$S_0 = \text{const} \int d\tau = \text{const} \int \sqrt{1 - \beta^2} dt, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Lagrangefunktion

$$\boxed{L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{Normierung wegen:})$$

Kanonischer Impuls (mit $\frac{\partial}{\partial \vec{v}} = \vec{\nabla}_v$)

$$\frac{\partial L_0}{\partial \vec{v}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \vec{v} = m(v) \vec{v} = \vec{p}$$

nach §15 A: $p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} = m(v) \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$ mit $p^2 = m^2 c^2$.

Beachte: $L \neq T$ da $\vec{p} \neq \text{const} * \vec{v}$

Hamiltonsches Prinzip

$$\delta S = 0 \Rightarrow$$

Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

hier mit $L = L_0 \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{const}$$

d.h. kräftefreies Teilchen bewegt sich geradlinig gleichförmig,

d.h. Lagrangefunktion \Rightarrow freie Bewegungsgleichung**Andere Interpretation**

$$S_0 = \text{const} \int d\tau = -\text{const} \text{ Eigenzeit}$$

 $\Rightarrow \delta S_0 = 0 \Rightarrow$ Eigenzeit ist maximal für geradlinige Weltlinie

siehe §14 H.

Hamiltonfunktion

$$H_0 = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{v}^2 + mc^2 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m(v)c^2 = E$$

$$H_0(\vec{p}, \vec{r}) = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$$

es wurde benutzt: $E = m(v)c^2$ und $p^2 = \frac{1}{c^2}E^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2$ siehe §15 B**Hamiltonsche Bewegungsgleichungen**

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = 0$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{c}{\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}} \vec{p} = \frac{c^2}{E} \vec{p} = \frac{1}{m(v)} \vec{p} = \vec{v}$$

18 C Geladenes Teilchen im elektromagnetischen FeldSei elektromagnetischer Feldtensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ gegeben:Da die Kraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ von der Geschwindigkeit abhängt, ist zu erwarten, dass kanonischer Impuls $\neq \vec{p}$ und Lagrangefunktion $L \neq T - V$ **Satz:** Die Bewegungsgleichung in §14 H folgt aus der **Wirkung**

$$S = S_0 - q \int dx^\mu A_\mu = \int dt L$$

wegen $dx^\mu = u^\mu d\tau$ mit $u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \Rightarrow$ **Lagrangefunktion**

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{1-\beta^2} (-mc^2 - qu^\mu A_\mu) \\ &= L_0 - q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \end{aligned}$$

wegen $A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$

Kanonischer Impuls

$$\vec{P} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} L = \vec{p} + q\vec{A}$$

man beachte $\vec{P} \neq \vec{p} = \text{Impuls}$.

Beweis: Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt} \vec{P} + q\vec{\nabla} (\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) = 0$$

(stimmt überein mit $\frac{d}{d\tau} (p^\mu + qA^\mu) = q\partial^\mu A^\nu u_\nu$, siehe §14 H) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= -q\vec{\nabla} (\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - q\frac{d}{dt}\vec{A} = -q(\vec{\nabla}\varphi - \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})) - q\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}\right) \\ &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \text{Lorentzkraft} \end{aligned}$$

■

Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H &= \vec{P} \cdot \vec{v} - L \\ &= (\vec{p} + q\vec{A}) \cdot \vec{v} - L_0 + q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \\ &= H_0 + q\varphi \end{aligned}$$

§18 B \Rightarrow

$$H(\vec{P}, \vec{r}) = c\sqrt{m^2c^2 + (\vec{P} - q\vec{A})^2} + q\varphi = \text{Energie}$$

Für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ d.h. $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \vec{v}) &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - q\varphi + q\vec{v} \cdot \vec{A} \\ H(\vec{P}, \vec{r}) &= \frac{1}{2m}(\vec{P} - q\vec{A})^2 + q\varphi \end{aligned}$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

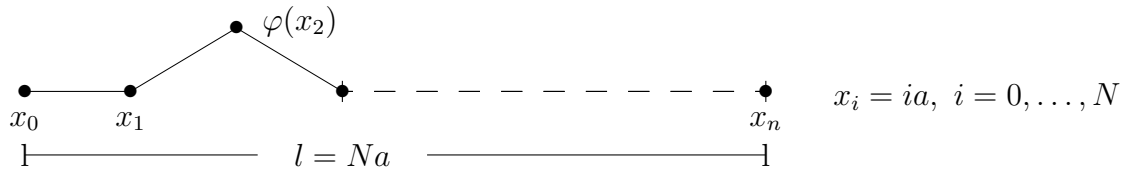
$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} = \vec{v} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{P}} = \frac{1}{m}(\vec{P} - q\vec{A}) = \frac{1}{m}\dot{\vec{p}} \\ \dot{\vec{P}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{m}\vec{\nabla}(q\vec{A} \cdot (\vec{P} - q\vec{A})) - q\vec{\nabla}\varphi \end{aligned}$$

\Rightarrow wie oben $\dot{\vec{p}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

18D ∞ -viele Freiheitsgrade

i) Die Saite

Kette elastisch verbundener Massenpunkte



Kanonische Variable

$$\begin{aligned}\varphi(x_i) &= \varphi_i \\ \pi(x_i) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = m\dot{\varphi}_i\end{aligned}$$

Lagrangefunktion

$$L = T - V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m (\dot{\varphi}_i^2 - \Omega^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1})^2)$$

Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\varphi}_i + \Omega^2 (2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1}) = 0$$

Kontinuierlicher Limes: $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ mit l , $\mu = m/a$, $u = a\Omega$ fest,

Ersetze

$$a \sum_{i=1}^N \rightarrow \int_0^l dx \quad \text{und} \quad \frac{1}{a} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) \rightarrow \varphi'(x) \Rightarrow$$

Lagrangefunktion

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \mu \int_0^l dx \left((\dot{\varphi}(t, x))^2 - u^2 (\varphi'(t, x))^2 \right)$$

Ersetze

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} &\rightarrow \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} = \text{Funktionalableitung} \\ \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \varphi_i} &= \frac{1}{a} \delta_{ji} \rightarrow \frac{\delta \varphi(y)}{\delta \varphi(x)} = \delta(y - x)\end{aligned}$$

man sagt $L(\varphi, \dot{\varphi})$ ist ein Funktional (d.h. eine Funktion der Funktionen $\varphi, \dot{\varphi}$).

Bewegungsgleichung

$$\text{es gilt } \frac{\delta \varphi'(y)}{\delta \varphi(x)} = \frac{d}{dy} \delta(y - x) = \delta'(y - x) \quad \text{mit } \int dy \delta'(y - x) f(y) = -f'(x) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}(x)} - \frac{\delta L}{\delta \varphi(x)} &= \mu \int_0^l dy (\delta(y - x) \dot{\varphi}(y) + u^2 \delta'(y - x) \varphi'(y)) = 0 \\ \ddot{\varphi}(t, x) - u^2 \varphi''(t, x) &= 0 \quad \text{Wellengleichung für die Saite}\end{aligned}$$

man definiert auch die

Lagrangedichte \mathcal{L} durch

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \int_0^t dx \mathcal{L}(\varphi(x), \varphi'(x), \dot{\varphi}(x))$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \left((\dot{\varphi}(t, x))^2 - u^2 (\varphi'(t, x))^2 \right)$$

mit der Bewegungsgleichung oder Feldgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'(x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} = 0$$

$L(\varphi, \dot{\varphi})$ ist ein Funtional aber $\mathcal{L}(\varphi(x), \varphi'(x), \dot{\varphi}(x))$ ist eine Funktion von $\varphi(x), \varphi'(x), \dot{\varphi}(x)$.

ii) Feldtheorie

Nahewirkungsprinzip: Wechselwirkung von Teilchen durch „**Felder**“:

$$\phi_\alpha(t, \vec{r}) = \phi_\alpha(x), \quad \alpha = 1, \dots, n$$

Wirkung (zunächst ohne Teilchen)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V \subset \mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}(t, \vec{r})$$

$$\rightarrow \int_{\Sigma \subset \mathbb{R}^4} d^4x \mathcal{L}(t, \vec{r})$$

mit **Lagrangefunktion** L und **Lagrangedichte**

$$\mathcal{L}(\phi(t, \vec{r}), \dot{\phi}(t, \vec{r}), \vec{\nabla} \phi(t, \vec{r}), t, \vec{r})$$

Hamiltonsches Prinzip

$$\phi(x) \text{ ist physikalisch} \Leftrightarrow \delta S = 0 \text{ (mit } \delta \phi = 0 \text{ auf } \partial \Sigma)$$

\Rightarrow

$$0 = \delta S = \int_{\Sigma} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} \delta \phi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} \delta \dot{\phi}(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \phi(x)} \delta \vec{\nabla} \phi(x) \right)$$

$$= \int_{\Sigma} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \phi(x)} \right) \delta \phi(x) + \text{Randterme}$$

\Rightarrow **Bewegungsgleichung = Feldgleichung**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} + \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \phi(x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = 0}$$

oder (siehe i))

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} - \frac{\delta L}{\delta \phi(x)} = 0$$

Für relativistisch invariante Systeme mit $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}$:

Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi(x), \partial^\mu \phi(x)) \Rightarrow$ **Feldgleichung**

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi(x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = 0$$

Beispiel: Klein - Gordon Feld

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) - m^2 \phi^2(x))$$

\Rightarrow **Feldgleichung**

$$\begin{aligned} \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi(x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} &= \partial^\mu \partial_\mu \phi(x) + m^2 \phi(x) = 0 \\ (\square + m^2) \phi(x) &= 0 \end{aligned}$$

Kanonischer Impuls

$$\Pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}$$

Hamiltonfunktion $H = \int d^3x \mathcal{H}$ mit **Hamiltondichte**

$$\mathcal{H}(x) = \Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x)$$

z.B. für Klein - Gordon Feld

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x) \\ \mathcal{H}(\Pi(x), \phi(x)) &= \frac{1}{2} \left(c^2 \Pi^2(x) + (\vec{\nabla} \phi(x))^2 + m^2 \phi^2(x) \right) \end{aligned}$$

Poisson - Klammer

$$\{f, g\} = \int d^3x \left(\frac{\delta f}{\delta \Pi(x)} \frac{\delta g}{\delta \phi(x)} - \frac{\delta f}{\delta \phi(x)} \frac{\delta g}{\delta \Pi(x)} \right)$$

für kanonisch konjugierte Variable

$$\{\Pi(x), \phi(y)\} = \delta^{(3)}(x - y)$$

Bewegungsgleichung

$$\dot{f} = \{H, f\} + \frac{\partial}{\partial t} f$$

z.B. Klein - Gordon Feld:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \int d^3y \left(c^2 \Pi^2(y) + (\vec{\nabla} \phi(y))^2 + m^2 \phi^2(y) \right), \phi(x) \right\} \\ &= \int d^3y c^2 \Pi(y) \delta^{(3)}(x - y) = c^2 \Pi(x) \\ \dot{\Pi}(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \int d^3y \left(c^2 \Pi^2(y) + (\vec{\nabla} \phi(y))^2 + m^2 \phi^2(y) \right), \Pi(x) \right\} \\ &= \int d^3y \left(-\vec{\nabla} \phi(y) \cdot \vec{\nabla} \delta^{(3)}(x - y) - m^2 \phi(y) \delta^{(3)}(x - y) \right) \\ &= (\Delta - m^2) \phi(x) \end{aligned}$$

18 E Elektromagnetisches Feld

Wirkung

1) **Materie** Wirkung für ein Teilchen (siehe §18 B)

$$S_M = -mc^2 \int d\tau$$

2) **Wechselwirkung:** Materie (gegeben durch Strom $j^\mu(x)$ mit elektromagnetischem Feld (gegeben durch Potential $A^\mu(x)$) Punktteilchen $S_{M-F} = -q \int dx^\mu A_\mu$ (siehe §18 C), für j^μ beliebig

$$S_{M-F} = - \int d^4x j^\mu A_\mu$$

da $q dx^\mu = qu^\mu d\tau = \rho d^3x \gamma \left(\frac{c}{\vec{v}} \right) dt / \gamma = d^4x j^\mu$.

Lagrangedichte

$$S_{M-F} = \int d^4x \mathcal{L}_{M-F}, \text{ mit } \mathcal{L}_{M-F} = -j^\mu A_\mu$$

3) **Elektromagnetische Felder (im Vakuum: $\epsilon = \mu = 1$)**

Invarianten der elektromagnetischen Felder

$$F^2 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2 \left(\frac{1}{c^2} \vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right)$$

$$F\tilde{F} = F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{B}$$

F^2 ist ein Skalar und $F\tilde{F}$ ist ein Pseudoskalar, d.h. $F\tilde{F} \rightarrow -F\tilde{F}$ bei Spiegelung $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$.

Satz: Die Maxwellgleichungen aus §13 B folgen aus der Wirkung $S_{M-F} + S_F$ mit der **Wirkung für elektromagnetische Felder**

$$S_F = \int d^4x \mathcal{L}_F, \text{ mit } \mathbf{Lagrangedichte} = \mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} H_{\mu\nu}$$

mit

$$H^{\mu\nu} = \mu_0 F^{\mu\nu}$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$A^\mu = \text{kanonische Variable}$$

Beweis:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{M-F} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} H_{\mu\nu} - j_\nu A^\nu$$

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu A^\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = -\partial^\mu H_{\mu\nu} + j_\nu = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j} \end{cases} \text{ siehe §13 B}$$

■

Maxwellgleichungen für \vec{E} und \vec{B}

$$\exists A^\mu \text{ mit } F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \Leftrightarrow \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \end{cases}$$

mit $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$.

Kanonischer Impuls

$$\Pi^{(\mu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{c}H^{0\mu} = \frac{1}{c^2\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{E} \end{pmatrix} \text{ kein 4-Vektor!}$$

Problem: $\Pi^{(0)} = 0$, d.h. die Legendre-Transformation $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}$ ist nicht möglich, da die Abbildung $\Pi^{(\mu)} \rightarrow \dot{A}^\mu$ nicht invertiert werden kann.

Ausweg: Eichfestlegung: z.B. (falls $j^\mu = 0$) „Strahlungseichung“ $A^0 = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\dot{\vec{A}} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \dot{\vec{A}}^2 - \mu_0 \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)^2 \right) \\ \vec{\Pi} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{A}}} = \epsilon_0 \dot{\vec{A}} = -\vec{D} \end{aligned}$$

Hamiltondichte (falls $j^\mu = 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{A}} - \mathcal{L} \\ \mathcal{H}(\vec{\Pi}, \vec{A}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\Pi}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\Pi}^2 - \mu_0 \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\Pi}^2 + \mu_0 \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H} \right) = \text{Energiedichte (siehe §9 C)} \end{aligned}$$

Poisson Klammer für die kanonisch konjugierten Variablen

$$\{\Pi_i(x), \phi_j(y)\} = \{-D_i(x), A_j(y)\} = \delta_{ij}\delta^{(3)}(x-y)$$

Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}}(x) &= \{H, \vec{A}(x)\} \\ &= \left\{ \int d^3y \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\Pi}^2(y) + \mu_0 \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(y) \right)^2 \right), \vec{A}(x) \right\} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\Pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\Pi}}(x) &= \{H, \vec{\Pi}(x)\} \\ &= \left\{ \int d^3y \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\Pi}^2 + \mu_0 \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)^2 \right), \vec{\Pi}(x) \right\} \\ &= -\mu_0 \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \mu_0 \left(\Delta \vec{A} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = \epsilon_0 \mu_0 \left(\Delta \vec{A} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) \right)$$

siehe §12 A

19 Symmetrien und Erhaltungssätze

19 A Mechanik

Koordinaten: $q_1(t), \dots, q_N(t)$

Lagrangefunktion: $L(q_i, \dot{q}_i, t)$

Definition:

$\left. \begin{array}{l} q(t) \rightarrow q'(t') \\ t \rightarrow t' \end{array} \right\}$ heißt **Symmetrietransformation** falls

$$\frac{dt'}{dt} L(q'(t'), t') = L(q(t), t) + \frac{dF}{dt}$$

d.h. die Bewegungsgleichungen sind invariant, da

$$\delta S' = \delta \int dt' L(q'(t'), t') = \delta \int dt \left(L(q(t), t) + \frac{dF}{dt} \right) = \delta S$$

$$\text{d.h. } \delta S = 0 \Leftrightarrow \delta S' = 0$$

Beispiel: 2 Teilchen mit Potential $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Rightarrow$
„Translationsinvarianz“, d.h. bei Translation $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{a}$ ist die Lagrangefunktion invariant

$$L = T - V \rightarrow L$$

Noethers Theorem: Zu jeder Symmetrietransformation mit n kontinuierlichen Parametern gibt es n Erhaltungssätze

Beweis: Sei $dt'/dt = 1$ und $q'(t') = q(t) + \delta q$, $\delta q = \text{infinitesimal}$

$$\begin{aligned} \frac{dt'}{dt} L(q'(t'), \dot{q}'(t')) &= L(q(t), \dot{q}(t)) + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \\ &= L(q(t), \dot{q}(t)) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q \\ &= L(q(t), \dot{q}(t)) + \frac{dF}{dt} \end{aligned}$$

Also

$$\text{Bewegungsgleichung} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - F \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Erhaltungssatz } J = p \delta q - F \text{ ist zeitlich konstant}}$$

mit $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{kanonischer Impuls}$ ■

Beispiele: N Massenpunkte

$$L(t) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - V(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad \vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i$$

Symmetrien:

i) Raum-Translations-Invarianz

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \vec{a} \Rightarrow L \rightarrow L' = L$$

Noether:

$$\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{a} = \vec{P} \cdot \vec{a} = \text{konstant}$$

d.h. Raum-Translationsinvarianz \Rightarrow Erhaltung des Gesamtimpulses

$$\dot{\vec{P}} = 0$$

ii) Zeit-Translation-Invarianz

$$t \rightarrow t + a, \quad a = \text{infinitesimal}$$

$$\vec{r}_i(t + a) = \vec{r}_i(t) + a \dot{\vec{r}}_i, \quad \text{d.h. } \delta \vec{r}_i = a \dot{\vec{r}}_i$$

$$\Rightarrow L(t) \rightarrow L'(t') = L(t + a) = L(t) + a \frac{d}{dt} L(t), \quad \text{d.h. } F = aL$$

$$\sum_i \vec{p}_i \cdot \delta \vec{r}_i - F = \sum_i \vec{p}_i \cdot a \dot{\vec{r}}_i - aL = aH$$

$$H = E = \text{konstant}$$

d.h. Zeit-Translationsinvarianz \Rightarrow Erhaltung der Energie

$$\dot{E} = 0$$

iii) Raum-Drehung (ein Massenpunkt): Zylinderkoordinaten: R, φ, z

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{\varphi}} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kanonischer Impuls zu φ ist die z-Komponente des Drehimpulses

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{\varphi}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = xp_y - yp_x = L_z$$

Sei L invariant bei Drehung $\varphi \rightarrow \varphi + a \Rightarrow$ Erhaltungssatz für L_z

$$\dot{L}_z = 0$$

19 B Feldtheorie

Symmetrietransformation:

$$\left. \begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi \\ x^\mu &\rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \end{aligned} \right\} \text{ mit } \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu F^\mu$$

Noethers Theorem: (für $\frac{\partial x'}{\partial x} = 1$, $\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi)$)

Sei $\delta\phi \propto a =$ infinitesimaler Parameter \Rightarrow wie oben

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} \delta\phi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi(x))} \delta(\partial^\mu \phi(x)) \\ &= \mathcal{L} + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right) \delta\phi \\ &= \mathcal{L} + \partial_\mu F^\mu \end{aligned}$$

Feldgleichung $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

für den „Noetherstrom“

$$J^\mu(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi - F^\mu \right)$$

\Rightarrow **Erhaltungssatz**

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x J^0(x) = c \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(x) = c \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{J}(x) \rightarrow 0 \text{ für } V \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Beispiel: 4-Translation

$$\left. \begin{aligned} x^\mu &\rightarrow x^\mu + a^\mu, \quad a^\mu = \text{infinitesimal} \\ \phi(x) &\rightarrow \phi(x+a) = \phi(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x) \end{aligned} \right\} \text{ d.h. } \delta\phi = a^\mu \partial_\mu \phi(x)$$

Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x+a) = \mathcal{L}(x) + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) \text{ d.h. } F^\mu = a^\mu \mathcal{L}(x)$$

\Rightarrow Noetherstrom

$$J^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} a^\mu \partial_\mu \phi(x) - a^\mu \mathcal{L}(x) = T^{\mu\nu} a_\nu$$

mit **Energie-Impuls-Tensor**

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \partial^\nu \phi(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$\partial_\mu J^\mu = 0$ für a^μ beliebig \Rightarrow

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Speziell

$$T^{00} = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \text{Hamiltondichte (Energiedichte)}$$

Energie-Impuls-Erhaltung $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$

$$\dot{p}^\nu = 0$$

$$\text{mit } p^\nu = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x T^{0\nu} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

19 C Elektrodynamik

Im Vakuum $j^\mu = 0$

Lagrangedichte (siehe §18 E)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \quad \mu_0 H^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Translationsinvarianz: $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu \Rightarrow$

Energie-Impuls-Tensor

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\rho(x))} \partial^\nu A_\rho(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = -H^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$$\text{mit } \partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0$$

$T^{\mu\nu}$ ist nicht symmetrisch, daher (siehe auch §14 H)

$$\tilde{T}^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} + H^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu = -H^{\mu\rho} F_\rho^\nu - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Es gilt

$$\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \tilde{T}^{0\nu} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x T^{0\nu}$$

Beweis:

$$\partial_\mu (\tilde{T}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}) = \partial_\mu H^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu = \partial_\mu \partial_\rho H^{\mu\rho} A^\nu - \partial_\mu (\partial_\rho H^{\mu\rho}) A^\nu = 0$$

da $H^{\mu\rho}$ antisymmetrisch und $\partial_\rho H^{\mu\rho} = -j^\mu = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x (\tilde{T}^{0\nu} - T^{0\nu}) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x H^{0\rho} \partial_\rho A^\nu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \partial_\rho H^{0\rho} A^\nu \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \partial_i H^{0i} A^\nu = \int_{\partial\mathbb{R}^3} df_i H^{0i} A^\nu = 0 \end{aligned}$$

Summenkonvention $\sum_{i=1}^3$ ■

$T^{\mu\nu}$ ausgedrückt durch die Felder $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ (siehe auch §14 H)

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w & \frac{1}{c} \vec{S} \\ \frac{1}{c} \vec{S} & -T_{ik} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$T_{ik} = D_i E_k + B_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

Energiedichte (§9 C)

Poyntingscher Vektor (§9 C)

Maxwellscher Spannungstensor (§9 E)

Interpretation: 4-Impuls des elektromagnetischen Feldes (siehe §9 E)

$$P_{\text{el.mag.}}^\nu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{1}{c} T^{0\nu} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{1}{c} \begin{pmatrix} w \\ \frac{1}{c} \vec{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E \\ \vec{P}_{\text{el.mag.}} \end{pmatrix}$$

Energie-Impulserhaltung $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$

$$\dot{P}_{\text{el.mag.}}^\nu = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E \\ \vec{P}_{\text{el.mag.}} \end{pmatrix} = 0$$

Teilsystem $V \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_V d^3x \partial_0 T^{0\nu} = - \int_V d^3x \partial_i T^{i\nu} = - \int_{\partial V} df_i T^{i\nu}$$

$\nu = 0 \Rightarrow$ Poyntingscher Satz (siehe §9 C)

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x w + \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{S} = 0$$

$\nu = j = 1, 2, 3$ (siehe §9 E)

$$\dot{P}_V^j = - \int_{\partial V} df_i T^{ij} = F_V^j = \text{Kraft auf das Teilsystem in } V$$