

Über Superpropagatoren

M. KAROWSKI

II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

Eingegangen am 14. August 1970

Abstract. Some mathematical properties of superpropagators for any mass in field-theories with exponential coupling are investigated. The principle of minimal singularity is discussed.

1. Einleitung

Feldtheorien mit nichtpolynomialen Lagrange-Dichten, die natürlich nichtrenormierbar sind, können mit Hilfe sog. Superpropagatoren behandelt werden. Sie entstehen durch formale Teilsummationen in der Störungsreihe und sind verschiedene Funktionen des freien Propagators. Eines der Hauptprobleme ist die Regularisierung und die eindeutige Definition dieser Distributionen [1]. In dieser Arbeit werden einige mathematische Eigenschaften von speziellen Superpropagatoren für den Fall beliebiger Masse untersucht [2].

In Abschnitt 2.1 werden Potenzen des freien Propagators (für $m \neq 0$) betrachtet. Es wird gezeigt, daß Δ_F^u für $\text{Re } u > 0$ eine meromorphe Funktion in u ist mit Polen der Ordnung $k+1$ bei $u = k+2$ ($k = 0, 1, \dots$). In 2.2 wird $iE_F(\lambda) = \exp(-(2\pi)^2 \lambda i \Delta_F) - 1$ definiert, zunächst für λ positiv imaginär und dann durch analytische Fortsetzung für alle λ in der entlang der negativen reellen Achse aufgeschnittenen Ebene. Das asymptotische Verhalten dieser Distributionen im Impulsraum wird in Teil 3. untersucht. Es zeigt sich, daß $\tilde{E}_F(\lambda, p)$ für positive λ mit $p^2 \rightarrow -\infty$ exponentiell abfällt. Daher ist $E_F(\lambda, x)$ nach Verschmierung über die Zeit eine C^∞ -Funktion in den räumlichen Koordinaten, d. h. bei $x = 0$ ist $E_F(\lambda, x)$ in gewisser Weise minimal singular. Wenn man für negative λ $E_F(\lambda)$ durch $1/2(E_F(-|\lambda| + i\varepsilon) + E_F(-|\lambda| - i\varepsilon))$ definiert, fällt $\text{Re } \tilde{E}_F(\lambda, p) = 1/2 \tilde{\tilde{E}}(\lambda, p)$ mit $p^2 \rightarrow +\infty$ exponentiell ab. $\tilde{\tilde{E}}(\lambda, x)$ ist daher nach Verschmierung über den Raum eine C^∞ -Funktion in der Zeit und ist bei $x = 0$ in ähnlicher Weise minimal singular wie E_F für $\lambda > 0$. Stellt man diese Eigenschaften der minimalen Singularität bei $x = 0$ als Bedingung an die Superpropagatoren, so beseitigt man die unendliche Vieldeutigkeit bei nichtrenormierbaren Theorien [3].

2. Superpropagatoren

Als Superpropagatoren bezeichnen wir verschiedene Funktionen des freien Propagator $\Delta_F(x)$. Zur Regularisierung dieser Distributionen wollen wir hier die Methode der analytischen Fortsetzung verwenden [4]. Sei $f(\lambda, t)$ eine Funktion von zwei komplexen Variablen. Dann ist die Distribution $f(\lambda, -x^2 + io)$ definiert durch:

$$\langle f(\lambda), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int d^4x f(\lambda, -x^2 + i\varepsilon Q(x)) \varphi(x) \quad (1)$$

falls i. das Integral für alle hinreichend kleinen positiven ε existiert und ii. der Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ existiert.

$Q(x)$ ist eine positiv definite quadratische Form z. B. $x_0^2 + x^2$ und $\varphi(x)$ aus einem Testfunktionenraum.

Wenn die Bedingungen i. und ii. nur für gewisse λ erfüllt sind, läßt sich unter Umständen der Definitionsbereich der Distribution $f(\lambda)$ als Funktion von λ noch weiter ausdehnen. Falls $\langle f(\lambda), \varphi \rangle$ in λ analytisch fortsetzbar ist (evtl. nur auf einem Teilraum von Testfunktionen), sei $f(\lambda, -x^2 + io)$ durch diese Fortsetzung definiert. Wir werden nun dieses Verfahren auf Potenzen und die Exponentialfunktion von Δ_F anwenden.

2.1. Potenzen des freien Propagators

Es sei $A(x)$ ein freies skalares hermitesches Feld, dann gilt formal:

$$\langle 0 | T : A^n(x) : A^m(x) | 0 \rangle = n! \delta_{nm} (i\Delta_F(-x^2 + io))^n \quad (2)$$

mit

$$i\Delta_F(-x^2 + io) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m K_1(m\sqrt{-x^2 + io})}{\sqrt{-x^2 + io}}. \quad (3)$$

$K_1(x)$ ist die modifizierte Besselfunktion zweiter Art. In diesem Abschnitt werden wir mögliche Definitionen für (2) untersuchen.

Sei u eine komplexe Zahl mit $0 < \text{Re } u < 2$, dann ist die Potenz Δ_F^u durch (1) definiert als eine Distribution in \mathcal{S}' . Für $2 \leq \text{Re } u$ ist die Bedingung i. nicht mehr erfüllt, wir werden daher Δ_F^u in diesen Bereich hinein analytisch fortsetzen. Der Fall $m = 0$ ist von Gelfand u. Schilow [4] ausführlich untersucht worden. D_F^u ist eine meromorphe Funktion von u mit einfachen Polen bei $u = k + 2$ ($k = 0, 1, \dots$). Wie wir unten sehen werden, ist für $m \neq 0$ und $\text{Re } u > 0$ Δ_F^u ebenfalls meromorph mit Polen bei $u = k + 2$, jedoch haben die Pole die Ordnung $k + 1$.

Um die analytische Fortsetzung durchführen zu können, werden wir eine geeignete Integraldarstellung für Δ_F^u herleiten. Mit Hilfe der Mellin-

Transformation erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\left(\frac{mK_1(m\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\right)^u = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} dz t^{-z} g(u, z), \quad 0 < \operatorname{Re} u < 2, \quad (4)$$

$$g(u, z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} \left(\frac{mK_1(m\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\right)^u, \quad 0 < \operatorname{Re} u < \operatorname{Re} z. \quad (5)$$

Wir werden zwei Arten von Integrationswegen in der komplexen Ebene verwenden: L_z sei der Weg, der den Strahl parallel zur reellen Achse von z bis $+\infty$ im Uhrzeigersinn umfaßt. C_z sei der Weg parallel zur imaginären Achse, der aus L_z durch Aufbiegen entsteht.

Satz: a) Die Funktion $g(u, z)$ ist analytisch in dem Gebiet $\operatorname{Re} u > 0$ und $\operatorname{Re} z > 0$ mit Polen der Ordnung $k + 1$ bei $u - z = k$ mit $k = 0, 1, \dots$.

b) Für $0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} u$, $|z| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im} u = \operatorname{const} \neq 0$ und $\operatorname{Re} u \rightarrow +\infty$ hat $g(u, z)$ folgende asymptotische Schranke:

$$|g(u, z)| \lesssim \left| \left(\frac{u}{|\operatorname{Im} z|}\right)^{u - \operatorname{Re} z} e^{-\pi |\operatorname{Im} z|} \right| \quad (6)$$

und für $u = \operatorname{const}$, $z \rightarrow \infty$:

$$|g(u, z)| \lesssim \left| \left(\frac{um}{2}\right)^{-2z} \Gamma^2(z) \right| \quad (7)$$

Beweis. Siehe Anhang.

Aus (4) erhalten wir für $0 < \operatorname{Re} u < 2$:

$$\Delta_F^u(-x^2 + io) = \left(\frac{-i}{(2\pi)^2}\right)^u \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} dz g(u, z) (-x^2 + io)^{-z} \quad (8)$$

oder im Impulsraum:

$$\widetilde{\Delta}_F^u(p^2 + io) = -i\pi^2 \left(\frac{-i}{(2\pi)^2}\right)^u \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} dz g(u, z) \frac{\Gamma(2-z)}{\Gamma(z)} \left(\frac{-p^2 - io}{4}\right)^{z-2} \quad (9)$$

$$= -i\pi^2 \left(\frac{-i}{(2\pi)^2}\right)^u \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{N+1}} dz g(u, z) \frac{\Gamma(2-z)}{\Gamma(z)} \left(\frac{-p^2 - io}{4}\right)^{z-2} + \sum_{n=2}^N g(u, n) \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(n-1)} \left(\frac{-p^2 - io}{4}\right)^{n-2} \right\}. \quad (10)$$

Die letzte Zeile läßt sich nun mit Hilfe des Satzes analytisch fortsetzen. Der erste Term ist holomorph für $0 < \operatorname{Re} u < N + 1$, der zweite meromorph mit Polen der Ordnung $k + 1$ bei $u = k + 2$ ($k = 0, 1, \dots$). Da das für alle N gilt, ist die Distribution Δ_F^u als Funktion von u meromorph für $\operatorname{Re} u > 0$ mit den oben bezeichneten Polen. Die Hauptteile haben natürlich ihren Träger bei $x = 0$ bzw. sind im Impulsraum Polynome in p^2 vom Grad k .

Für ganzzahlige Werte $u = N$ kann man folgende allerdings nicht eindeutige Definition benutzen [4, 5]:

$$\begin{aligned} \Delta_F^N &= \text{Res}_{u=N} \frac{f(u, N)}{u - N} \Delta_F^u \\ &= \Delta_{F, I}^N + \Delta_{F, II}^N. \end{aligned} \tag{11}$$

$f(u, N)$ ist eine beliebige analytische Funktion mit $f(N, N) = 1$. $\Delta_{F, I}^N$ sei gegeben durch das Integral in (10), das bei $u = N$ regulär ist, daher ist $\Delta_{F, I}^N$ unabhängig von $f(u, N)$. $\Delta_{F, II}^N$ ist ein beliebiges Polynom vom Grad $N - 2$.

Die Gln. (9) und (10) zeigen, daß $\tilde{\Delta}_F^u(s)$ als Funktion von s analytisch in der von $u^2 m^2$ bis $+\infty$ aufgeschnittenen Ebene ist (u reell). Die Diskontinuität kann man durch Potenzen von Δ_+ (die für alle reellen $u > 0$ wohldefiniert sind) und für ganzzahlige u durch Phasenraumintegrale ausdrücken:

$$\begin{aligned} \theta(p_0) \text{Disc} \tilde{\Delta}_F^u(p^2) &= 2\pi^3 \left(\frac{-i}{(2\pi)^2}\right)^u \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{u+1}} dz g(u, z) \frac{\theta(p_0) \theta(p^2) \left(\frac{p^2}{4}\right)^{z-2}}{\Gamma(z) \Gamma(z-1)} \\ &= \tilde{\Delta}_+^u(p), \quad u > 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Für ganzzahlige u ist:

$$\tilde{\Delta}_+^N(p) = (-i)^N (2\pi)^{-3N} \Omega_N(p). \tag{13}$$

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir noch eine andere Integraldarstellung für Δ_F^u angeben. Wir ersetzen die Mellin-Transformation (4), (5) durch folgende Integraltransformation [2]:

$$F(t, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} dz t^{-z} \frac{2}{\Gamma(z)} \left(\frac{um\sqrt{t}}{2}\right)^z K_z(um\sqrt{t}) h(u, z), \tag{14}$$

$$h(u, z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} \Gamma(z) \left(\frac{um\sqrt{t}}{2}\right)^{1-z} I_{z-1}(um\sqrt{t}) F(t, u). \tag{15}$$

In (9) und (10) ist dann $-p^2 - i0$ durch $u^2 m^2 - p^2 - i0$ und $g(u, z)$ durch $h(u, z)$ zu ersetzen.

Notwendige Einschränkungen des Testfunktionsraumes sind in diesem Abschnitt nicht näher diskutiert worden. Für $\text{Im } u > 0$ müssen die Testfunktionen mit $x^2 \rightarrow +\infty$ exponentiell abfallen. Das ist bei der Interpretation der Formeln (8) bis (10) zu berücksichtigen.

2.2. Exponentialfunktion des freien Propagators

Wie in 2.1 ergibt sich formal:

$$\begin{aligned} iE_F(x) &= \langle 0 | T : (e^{fA(x)} - 1) : (e^{fA(0)} - 1) : | 0 \rangle \\ &= e^{i f^2 \Delta_F(x)} - 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Dieser Ausdruck ist im allgemeinen nicht definiert, da die Bedingung i. zu (1) nicht erfüllt ist. Im Gegensatz dazu ist der Vakuumerwartungswert des entsprechenden ungeordneten Produkts $E_+(x)$ eine wohldefinierte Distribution über dem Raum von Testfunktionen $\mathcal{C}(R^4)$ [6] bzw. \mathcal{S}^α (mit $\alpha > 1$) [4], dessen Fouriertransformierten stärker abfallen als $\exp(-a|p^2|^{1/2\alpha})$ für gewisse a . Für $\lambda = -(f/2\pi)^2$ positiv imaginär ist

$$iE_F(\lambda, -x^2 + io) = e^{-\lambda \frac{mK_1(m\sqrt{-x^2+io})}{V^{-x^2+io}}} - 1 \tag{17}$$

durch (1) als Distribution in \mathcal{S}' definiert. Das folgt unmittelbar aus dem Verhalten von $K_1(x)$ bei $x = 0$ und ∞ . Wir werden zeigen, daß $E_F(\lambda)$ sich auf dem Teilraum \mathcal{C} von \mathcal{S} in λ analytisch fortsetzen läßt, und zwar in die ganze λ -Ebene mit einem Verzweigungsschnitt auf der negativen reellen Achse. $E_F(\lambda)$ ist also im Gegensatz zu der Funktion $E_F(\lambda, t)$ bei $\lambda = 0$ nicht holomorph.

Die Integraldarstellung für $E_F(\lambda)$, die (9) entspricht, lautet (für λ positiv imaginär):

$$iE_F(\lambda, s) = -i\pi^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} dz G(\lambda, z) \frac{\Gamma(2-z)}{\Gamma(z)} \left(\frac{-s}{4}\right)^{z-2} \tag{18}$$

mit

$$G(\lambda, z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} iE_F(\lambda, t). \tag{19}$$

Mit einer geeigneten Funktion $f(u, N)$ aus (11) läßt sich (18) als Summe über ganzzahlige Potenzen von Δ_F darstellen. Dazu ersetzen wir $iE_F(\lambda, t)$ in (19) unter Anwendung der Mellin-Transformation für die Exponentialfunktion durch

$$iE_F(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} dz \Gamma(-u) \lambda^u \left(\frac{mK_1(m\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\right)^u. \tag{20}$$

Nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge erhalten wir

$$G(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} du \Gamma(-u) \lambda^u g(u, z). \tag{21}$$

In (18) eingesetzt ergibt sich

$$iE_F(\lambda) = \sum_{N=1}^\infty \frac{(-i\lambda(2\pi)^2)^N}{N!} \operatorname{Res}_{u=N} \frac{f(u, N)}{u-N} \Delta_F^u \tag{22}$$

mit

$$f(u, N) = -\Gamma(-u) \lambda^u N!(u-N)(-\lambda)^{-N}. \tag{23}$$

Die Summe über $\tilde{\Delta}_{F,1}^N(s)$ ist eine ganze Funktion in λ . Die analytischen Eigenschaften in s ergeben sich aus denen von $\tilde{\Delta}_{F,1}^N(s)$, die in 2.1 diskutiert wurden. Der andere Term ist eine analytische Funktion in λ mit einem Verzweigungsschnitt auf der negativen reellen Achse und eine ganze Funktion der Ordnung $1/3$ in s .

Das Integral in (18) konvergiert nur für $|\arg \lambda|, |\arg(-s)| \leq \pi$ und $|\arg \lambda - \arg(-s)| < \pi/2$. Wir wollen noch eine andere Integraldarstellung ableiten, die für alle λ und s mit $|\arg \lambda|, |\arg(-s)| \leq \pi$ konvergiert und damit unmittelbar die analytischen Eigenschaften in λ und s widerspiegelt. Der Integrand in (21) hat zwei verschiedene Gruppen von Singularitäten: 1. die Pole von $\Gamma(-u)$ und 2. die Pole von $g(u, z)$. Man kann daher $G(\lambda, z)$ folgendermaßen in zwei Funktionen zerlegen

$$G(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{L_1} du + \int_{L_z} du \right] \Gamma(-u) \lambda^u g(u, z). \quad (24)$$

Setzt man nun (24) in (18) ein, so kann man den ersten Term in λ fortsetzen, denn die u - und die z -Integration konvergieren für alle λ . Bei dem zweiten Term verlagern wir den Integrationsweg C_1 nach L_1 . Dann existieren auch diese Integrale für alle λ mit $|\arg \lambda| \leq \pi$. Schließlich erhalten wir

$$i\tilde{E}_F(\lambda, s) = -i\pi^2 \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\tilde{C}_1} dz \int_{L_1} du + \int_{L_1} dz \int_{L_z} du \right] \Gamma(-u) \lambda^u g(u, z) \frac{\Gamma(2-z)}{\Gamma(z)} \left(\frac{-s}{4} \right)^{z-2}. \quad (25)$$

Die Zerlegung in zwei Teile ist nicht dieselbe, die durch (11) und (22) gegeben ist. Die Konvergenz aller Integrationen ist durch (6) sichergestellt.

Wie am Ende von 2.1 kann man auch hier wieder die Integraltransformation (14), (15) verwenden und $-s$ durch $u^2 m^2 - s$ und $g(u, z)$ durch $h(u, z)$ ersetzen.

Physikalisch relevant sind die beiden Fälle λ positiv und λ negativ. Für positive λ kann man (22) und (25) als Darstellungen für den Superpropagator verwenden. Die „Unitaritätsbedingung“

$$\theta(p_0) \operatorname{Im} \tilde{E}_F(\lambda, +p^2 + i0) = -\frac{i}{2} \tilde{E}_+(\lambda, p) \quad (26)$$

ist dann wegen (12) erfüllt. Für negative λ nimmt $E_F(\lambda)$ am oberen und am unteren Ufer des Verzweigungsschnitts verschiedene Werte an. Wir können $\alpha E_F(-|\lambda| + i\varepsilon) + \beta E_F(-|\lambda| - i\varepsilon)$ als Superpropagator benutzen.

Aus (26) folgt dann $\alpha = \beta^* = 1/2 + i\delta$, wobei δ eine beliebige reelle Konstante ist. Der Term proportional δ ist eine ganze Funktion der Ordnung $1/3$ in p^2 bzw. hat im Ortsraum seinen Träger bei $x = 0$. Wie wir in 3.2 sehen werden, ist der Fall $\delta = 0$ durch bestimmte Abfalleigenschaften im Impulsraum bzw. durch minimale Singularität bei $x = 0$ im Ortsraum ausgezeichnet. Wir setzen daher für $\lambda < 0$

$$E_F(\lambda) = \frac{1}{2}(E_F(-|\lambda| + i\varepsilon) + E_F(-|\lambda| - i\varepsilon)). \tag{27}$$

3. Approximationen und asymptotisches Verhalten

3.1. Potenzen des freien Propagators

Das asymptotische Verhalten von $\tilde{\Delta}_F^u(s)$ für $s \rightarrow \infty$ wird durch die Singularität des Integranden in (9) bestimmt, die links des Integrationsweges am weitesten rechts liegt. Das ist der Pol von $g(u, z)$ bei $z = u$ mit dem Residuum 1. Daher gilt für $u \neq 2, 3, \dots$

$$\tilde{\Delta}_F^u(s) \sim -i\pi^2 \left(\frac{-i}{(2\pi)^2}\right)^u \frac{\Gamma(2-u)}{\Gamma(u)} \left(-\frac{s}{4}\right)^{u-2}. \tag{28}$$

Für $u = N \geq 2$ fällt $z = u$ mit einem Pol von $\Gamma(2-z)$ zusammen. Aus (10) folgt dann

$$\tilde{\Delta}_F^N(s) \sim i\pi^2 \left(\frac{-i}{(2\pi)^2}\right)^N \frac{1}{\Gamma(N)\Gamma(N-1)} \left(\frac{s}{4}\right)^{N-2} \ln s. \tag{29}$$

Wegen des logarithmischen Terms gibt es keine Definition von Δ_F^N (d. h. keine Wahl von $f(u, N)$ in (11)), so daß $\tilde{\Delta}_F^N(s)$ mit $s \rightarrow +\infty$ oder $s \rightarrow -\infty$ abfällt.

Für Δ_+ erhält man entsprechend aus (12) für alle $u > 0$

$$\tilde{\Delta}_+^u(s) \sim 2\pi^3 \left(\frac{-i}{(2\pi)^2}\right)^u \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(u-1)} \left(\frac{s}{4}\right)^{u-2}. \tag{30}$$

Wegen (13) stimmt diese Formel für ganze u mit dem bekannten asymptotischen Verhalten der Phasenraumintegrale überein.

3.2. Exponentialfunktion des freien Propagators

Um technische Komplikationen zu vermeiden, werden wir in diesem Abschnitt den Subtraktionsterm 1 in (17) fortlassen. Daher werden die t -Integrationen bei ∞ nicht mehr im eigentlichen Sinne konvergieren, aber das sind nur formale Schwierigkeiten, die Endformel (36) gilt wieder exakt.

Um das asymptotische Verhalten für große Impulse zu erhalten, entwickeln wir K_1 in der Nähe von 0:

$$\frac{mK_1(m\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t} + a \ln t + b + o(t \ln t) \tag{31}$$

mit

$$a = \frac{m^2}{4}, \quad b = \frac{m^2}{4} \left(\ln \frac{m^2 \gamma^2}{4} - 1 \right) \tag{32}$$

(γ ist die Eulersche Konstante).

Wir setzen nun:

$$\begin{aligned} G_0(z) &= \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-\lambda(\frac{1}{t} + a \ln t + b)} \\ &= e^{-\lambda b} \lambda^{z-\lambda a} \Gamma(\lambda a - z) \end{aligned} \tag{33}$$

und

$$G_1(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-\lambda o(t \ln t)}. \tag{34}$$

$G_1(z)$ ist eine ganze Funktion in λ und analytisch in z mit Polen der Ordnung $k + 1$ bei $z = -k$ ($k = 0, 1, \dots$). Mit (19) folgt weiter:

$$G(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_z - \lambda a} dz' G_0(z - z') G_1(z'), \quad \text{Re } z' > 0. \tag{35}$$

In (18) eingesetzt erhält man nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

$$\begin{aligned} &i\tilde{E}_F(\lambda, s) \\ &= -i\pi^2 \sum_{k=0}^\infty \text{Res}_{z=-k} \left[G_1(z) e^{-\lambda b} \lambda^{2-z-\lambda a} G_{03}^{20} \left(-\frac{\lambda s}{4} \left| \lambda a + z - 2, 0, -1 \right. \right) \right]. \end{aligned} \tag{36}$$

Das ist eine asymptotische Entwicklung für $s \rightarrow \infty$, denn die asymptotische Formel für die Meijersche G -Funktion enthält den Faktor $s^{-k/3}$ [7].

Den führenden Term dieser Entwicklung wollen wir nun näher betrachten. Das Residuum von $G_1(z)$ bei $z = 0$ ist 1. Daher gilt:

$$i\tilde{E}_F(\lambda, s) \sim -i\pi^2 e^{-\lambda b} \lambda^{2-\lambda a} G_{03}^{20} \left(-\frac{\lambda s}{4} \left| \lambda a - 2, 0, -1 \right. \right). \tag{37}$$

Für den Fall $m = 0$ ist diese Formel exakt.

Nach [7] ist $\tilde{E}_F(\lambda, s)$ durch eine ganze Funktion der Ordnung $1/3$ beschränkt, $E_F(\lambda, x)$ ist also eine Distribution aus \mathcal{C}' . Die Diskontinuität

am Schnitt $s > 0$ wächst natürlich mit s exponentiell an. Für $\lambda > 0$ ergibt sich

$$i\tilde{E}_+(\lambda, s) \sim -\frac{2\pi^2}{\sqrt{3}} e^{-\lambda b} \lambda^{2-\lambda a} \left| \frac{\lambda s}{4} \right|^{\frac{1}{3}(\lambda a - 4)} \cdot \cos \left[\frac{2}{3} \pi \lambda a - \frac{\pi}{3} - \frac{3}{2} \sqrt{3} \left| \frac{\lambda s}{4} \right|^{\frac{1}{3}} \right] e^{\frac{3}{2} \left| \frac{\lambda s}{4} \right|^{\frac{1}{3}}} \quad (38)$$

und für $\lambda < 0$

$$i\tilde{E}_+(\lambda, s) \sim \frac{\pi^2}{\sqrt{3}} e^{-\lambda b} |\lambda|^{2-\lambda a} \left| \frac{\lambda s}{4} \right|^{\frac{1}{3}(\lambda a - 4)} e^{\frac{3}{2} \left| \frac{\lambda s}{4} \right|^{\frac{1}{3}}} \quad (39)$$

Die gleiche Formel hat Satz [8] durch asymptotische Summation von Phasenraumintegralen erhalten.

Das asymptotische Verhalten von $\tilde{E}_F(\lambda, s)$ für $\lambda > 0$ und $s \rightarrow -\infty$ ist:

$$\tilde{E}_F(\lambda, s) \sim \frac{\pi^2}{\sqrt{3}} e^{-\lambda b} |\lambda|^{2-\lambda a} \left| \frac{\lambda s}{4} \right|^{\frac{1}{3}(\lambda a - 4)} \cdot \sin \left[\frac{1}{3} \pi \lambda a + \frac{\pi}{3} - \frac{3}{2} \sqrt{3} \left| \frac{\lambda s}{4} \right|^{\frac{1}{3}} \right] e^{-\frac{3}{2} \left| \frac{\lambda s}{4} \right|^{\frac{1}{3}}}. \quad (40)$$

Dieses exponentielle Abfallverhalten hat zur Folge, daß $E_F(\lambda, x)$ für $\lambda > 0$ nach Verschmierung über die Zeit eine C^∞ -Funktion in den drei räumlichen Koordinaten ist. Das bedeutet, daß $E_F(\lambda, x)$ in einem gewissen Sinne bei $x = 0$ minimal singular ist. Denn wenn $\chi_d(x) \in \mathcal{C}_M$ beschränkt in d und $x, = 0$ in einer Umgebung von $x = 0$ und $= 1$ für $|x| > d$ ist, gilt:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \langle E_F(\lambda), \varphi \chi_d \rangle = \langle E_F(\lambda), \varphi \rangle. \quad (41)$$

Wegen dieser Eigenschaft nennen wir $E_F(\lambda)$ für $\lambda > 0$ „raumartig minimal singular“. Aus (41) folgt, daß wir $E_F(\lambda)$ unabhängig von der Methode der analytischen Fortsetzung für $\lambda > 0$ definieren können: $E_F(\lambda)$ ist die gerade invariante „raumartig minimal singuläre“ Distribution in \mathcal{C}' mit $E_F(\lambda, x) = E_+(\lambda, x)$ für $x_0 > 0$. Dadurch ist $E_F(\lambda)$ eindeutig bestimmt, denn die verschiedenen möglichen Definitionen unterscheiden sich durch Distributionen, die ihren Träger bei $x = 0$ haben (bzw. die im Impulsraum ganze Funktionen von p^2 der Ordnung $< 1/2$ sind) und diese fallen in (41) heraus. Die Eindeutigkeit zeigt sich auch im Impulsraum, denn $E_F(\lambda, p^2)$ ist durch die Abfallseigenschaft für $p^2 \rightarrow -\infty$ ausgezeichnet, da ganze Funktionen der Ordnung $< 1/2$ in keiner Richtung abfallen.

Entsprechende Betrachtungen kann man auch für den Fall $\lambda < 0$ anstellen, wenn $E_F(\lambda)$ durch (27) gegeben ist. Das asymptotische Verhalten von $\text{Re } \tilde{E}_F(\lambda, p^2) = 1/2 \tilde{E}(\lambda, p^2)$ für $p^2 \rightarrow +\infty$ ist durch Multiplikation von (4) mit $\cos \pi \lambda a$ gegeben. $\tilde{E}(\lambda, x)$ ist also nach Verschmierung über

den Raum eine C^∞ -Funktion in der Zeit und (41) gilt, wenn man $\chi_d(x)$ entsprechend durch $\psi_d(x_0)$ ersetzt. Wir nennen daher $\bar{E}(\lambda)$ für $\lambda < 0$ „zeitartig minimal singular“. Durch diese Eigenschaft ist $\bar{E}(\lambda)$ wie oben eindeutig definiert. Im E_F ist durch E_+ eindeutig gegeben und wie alle Wightmanfunktionen „raumartig minimal singular“.

Im allgemeinen sind Superpropagatoren und auch die Propagatoren in renormierbaren Theorien nicht minimal singular definierbar, denn, wie wir in 3.1 gesehen haben, kann $\Delta_F^N(p^2)$ mit $p^2 \rightarrow \pm\infty$ nicht abfallen. In dieser Beziehung sind Theorien mit exponentieller Wechselwirkung „einfacher“ als andere, einschließlich der renormierbaren, die jedoch wegen der Renormierungsbedingung eindeutig sind.

Durch die Bedingung der minimalen Singularität kann man aus den in nichtrenormierbaren Theorien unendlich vielen möglichen Superpropagatoren genau einen ausgezeichneten auswählen. Das ist für eine gewisse Klasse von Superpropagatoren (siehe Volkov [1]) offensichtlich immer dann möglich, wenn $E_F(x)$ oder $E_+(x)$ am Lichtkegel von der einen Seite her weniger singular als $(x^2)^{-2}$ und von der anderen stärker singular ist. Denn die Gl. (8) und (9) bzw. die entsprechenden für \bar{E} zeigen, daß das Verhalten von $\bar{E}(p)$ für $p^2 \rightarrow \pm\infty$ durch das Verhalten von $\bar{E}(x)$ für $x^2 \rightarrow \pm 0$ bestimmt wird, weil die beiden Integranden die gleichen Singularitäten links des Integrationsweges haben. Wenn $E_+(x)$ am Lichtkegel von beiden Seiten her wenig singular ist (z.B. $\cos \lambda i \Delta_+$) bzw. stark singular ist (z.B. Δ_+^N) existieren im allgemeinen zwei verschiedene bzw. keine minimal singulären Superpropagatoren.

Ich möchte Herrn Prof. Dr. H. Lehmann für viele Anregungen zu dieser Arbeit und Herrn Dr. K. Pohlmeier für nützliche Gespräche danken.

Anhang

Beweis des Satzes in 2.1.

Um die analytische Fortsetzung von $g(u, z)$ durchführen zu können, betrachten wir die Hilfsfunktion:

$$\varphi(\mu, \nu, n) = \int_0^\infty dx x^{\mu-1} (\sqrt{x} K_1(\sqrt{x}))^{\nu-n} (K_0(\sqrt{x}))^n, \quad (\text{A } 1)$$

$$\operatorname{Re} \mu, \operatorname{Re} \nu > 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Dann ist

$$g(u, u) = m^{2(u-z)} \varphi(z-u, u, 0). \quad (\text{A } 2)$$

Mit Hilfe von

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} (z^{\pm n} K_n(z)) = -z^{\pm n-1} K_{n\mp 1}(z) \quad (\text{A } 3)$$

und partieller Integration folgt aus (A 1):

$$\varphi(\mu, \nu, n) = (2\mu)^{-1} (\nu - n) \varphi(\mu + 1, \nu, n + 1) + (2\mu)^{-1} n \varphi(\mu, \nu, n - 1) \quad (\text{A 4})$$

oder

$$\varphi(\mu, \nu, n) = (\nu - n) (n + 1) \left(\frac{\mu}{\mu + 1} \right)^n \varphi(\mu + 1, \nu, n + 1) + \varphi(\mu, \nu, n - 1) \quad (\text{A 5})$$

mit

$$\varphi(\mu, \nu, n) = n! (2\mu)^{-n} \Gamma(\mu) \Gamma(\mu + 1) 4^\mu \psi(\mu, \nu, n). \quad (\text{A 6})$$

Nach Summation über n folgt die Rekursionsformel:

$$\psi(\mu, \nu, m) = \sum_{n=0}^m (\nu - n) (n + 1) \left(\frac{\mu}{\mu + 1} \right)^n \psi(\mu + 1, \nu, n + 1). \quad (\text{A 7})$$

Damit haben wir $\varphi(\mu, \nu, n)$ in den Streifen $-1 < \text{Re}\mu \leq 0$ fortgesetzt. Durch k -malige Anwendung von (A 7) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varphi(\mu - k, \nu, n_k + 1) &= \sum_{n_{k-1}=0}^{n_k+1} (\nu - n_{k-1}) (n_{k-1} + 1) (A_{k-1})^{n_{k-1}} \\ &\dots \sum_{n_0=0}^{n_1+1} (\nu - n_0) (n_0 + 1) (A_0)^{n_0} \varphi(\mu, \nu, n_0 + 1) \end{aligned} \quad (\text{A 8})$$

mit $A_i = (i + 1 - \mu)/(i - \mu)$.

Für $n_k = -1$ folgt mit (A 2) die Behauptung a), denn die n_0 -Summation geht maximal bis $k - 1$.

Für $\nu > k$ und $0 < \text{Re}\mu < 1$ gilt folgende Abschätzung:

$$|\varphi(\mu - k, \nu, 0)| \leq \nu^k k^k |\varphi(\mu, \nu, \nu)| \sum_{n_{k-1}=0}^0 |A_{k-1}|^{n_{k-1}} \dots \sum_{n_0=0}^{n_1+1} |A_0|^{n_0}, \quad (\text{A 9})$$

da nach (A 5) $\varphi(\mu, \nu, n)$ maximal für $n \approx \nu$ ist. Die Summen können abgeschätzt werden durch:

$$\frac{1}{k! |\mu|^k} \left| \frac{\Gamma(k + 1 - \mu)}{\Gamma(1 - \mu)} \right|^2. \quad (\text{A 10})$$

Das asymptotische Verhalten von $\varphi(\mu, \nu, \nu)$ ist gegeben durch:

$$|\varphi(\mu, \nu, \nu)| \sim e^{-\pi |\text{Im}\mu|} \Gamma(\nu) |2\mu|^{-\nu}. \quad (\text{A 11})$$

Aus (A 6), (A 9), (A 10) und (A 11) folgt

$$|\varphi(\mu - k, \nu, 0)| \lesssim |\exp\{-\pi |\text{Im}\mu| + k \ln \nu - k \ln |\mu|\}|. \quad (\text{A 12})$$

Setzen wir $k = u - \text{Re}z$, $\mu = i \text{Im}z$ und $\nu = u$ so folgt (6). (7) ergibt sich unmittelbar aus dem asymptotischen Verhalten von $K_1(x)$ für $x \rightarrow \infty$.

Literatur

1. Okubo, S.: Prog. Theor. Phys. **11**, 80 (1954).
Volkov, M. K.: Commun. Math. Phys. **7**, 289 (1968); **15**, 69 (1969); Ann. Phys. **49**, 202 (1968).
- Lee, B. W., Zumino, B.: Nucl. Phys. B **13**, 671 (1969),
Efimov, G. V.: CERN preprint (1968).
2. Viele Ergebnisse dieser Arbeit werden ausführlicher diskutiert in: Karowski, M.: DESY preprint 70/30 (1970).
3. Lehmann, H., Pohlmeyer, K.: DESY preprint 70/26 (1970).
4. Gelfand, I. M., Schilow, G. E.: Verallgemeinerte Funktionen I, II. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1960.
5. Güttinger, W.: Fortschr. Phys. **14**, 483 (1966).
6. Jaffe, A.: Phys. Rev. Letters **17**, 661 (1966); Phys. Rev. **158**, 1454 (1967).
7. Meijer, C. S.: Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **49**, 344 (1940).
8. Satz, H.: Nuovo Cimento **37**, 1407 (1965).

M. Karowski
II. Inst. f. Theoretische Physik
der Universität
D-2000 Hamburg 50, Luruper Chaussee 149