Übungen zur Vorlesung „Theoretische Physik 3“

Blatt 11 12.1.2011 WS 10/11

28. Vierergeschwindigkeit

a) Sei $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}$ die Geschwindigkeit eines Punktes mit dem Ortsvektor $\vec{r}$, außerdem seien **1 Punkt**

$$u^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^\mu \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Man zeige: u^μ ist ein Vierervektor, d.h. u^μ transformiert sich unter Lorentztransformationen wie x^μ:

$$u'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu, \quad \text{wenn} \quad x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu.$$

b) Man leite mit Hilfe der Transformationsformel für u^μ das Einsteinsche Additionstheorem zweier Geschwindigkeiten her. **2 Punkte**

29. Relativistisches Fallgesetz **2 Punkte**

Auf einen (zur Zeit $t = 0$ ruhenden) Massenpunkt wirke eine konstante Kraft,d.h. die 4-Kraft sei

$$F^\mu = \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\vec{F} \cdot \vec{v} \\ \vec{F} \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \vec{F} = F\vec{e}_x = \text{konst.}$$

Man bestimme: Geschwindigkeit, Ort und Energie als Funktion der Zeit.

Abgabetermin: Mi den 19.1. 2011 in der Vorlesung

Siehe auch: http://users.physik.fu-berlin.de/˜kamecke/lehre.html

Anleitung zur Lösung

28. Vierergeschwindigkeit

a) Mit Eigenzeit $d\tau = \gamma dt$ invariant $\Rightarrow u^\mu = \frac{d}{d\tau}x^\mu$ Vierervektor,

oder explizit: im mitbewegten System Σ' ist $u'^\mu = \begin{pmatrix} c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow$ für $\vec{v}$ in x-Richtung

$$\Lambda(v)u = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} c\,(1 - v^2/c^2) \\ -v + v \end{pmatrix} = u'$$

b) Sei Σ' mit v bewegt gegen Σ. Ein Punkt bewegt sich mit v_2 gegen Σ und v_2' gegen $\Sigma' \Rightarrow$

$$u_2' = \Lambda(v)u_2 \Rightarrow u_2 = \gamma_2 \begin{pmatrix} c \\ v_2 \end{pmatrix} = \Lambda(-v)u_2' = \gamma\gamma_2' \begin{pmatrix} c + \beta v_2' \\ \beta c + v_2' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \beta_2 = \frac{\beta + \beta_2'}{1 + \beta\beta_2'},\ v_2 = \frac{v + v_2'}{1 + v v_2'/c^2}$$

29. Relativistisches Fallgesetz

$d\tau = dt/\gamma \Rightarrow$

$$m\frac{d}{d\tau}\gamma v = m\gamma\frac{d}{dt}\gamma v = \gamma F \Rightarrow \gamma v = \frac{F}{m}t \Rightarrow v^2 = \left(1 - v^2/c^2\right)\left(\frac{F}{m}\right)^2 t^2 \Rightarrow$$

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{c^2m^2 + F^2t^2}}ctF \to \begin{cases} \frac{F}{m}t & \text{für } t \to 0 \\ c & \text{für } t \to \infty \end{cases}$$

$$x(t) = \int_0^t v(t')dt' = c\left(\sqrt{c^2m^2/F^2 + t^2} - \sqrt{c^2m^2/F^2}\right) \to \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 & \text{für } t \to 0 \\ ct & \text{für } t \to \infty \end{cases}$$

$$E = cp^0 = \gamma mc^2 = \frac{c^2F}{v}t = c\sqrt{c^2m^2 + F^2t^2} \to \begin{cases} mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 & \text{für } t \to 0 \\ Fx & \text{für } t \to \infty \end{cases}$$