Übungen zur Vorlesung „Theoretische Physik 3“

Blatt 3   3.11.2010   WS 10/11

6. Magnetisches Feld

Berechne das magnetische Feld eines ∞-langen geraden stromdurchflossenen Leiters,

a) mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes: 2 Punkte

$$\vec{H}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\,,$$

b) mit Hilfe des Oerstedschen Gesetzes: 1 Punkt

$$\int_{\partial A} \vec{H}(\vec{r}\,) \cdot d\vec{r} = \int_A \vec{j}(\vec{r}\,) \cdot d\vec{f}\ .$$

7. Vektorpotential

Man zeige, daß : 2 Punkte

$$\vec{A}(r) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{\vec{\nabla}\,' \times \vec{B}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

die Gleichung $\vec{B}(\vec{r}\,) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}\,)$ löst, falls $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ und $\vec{B}(\vec{r})$ bei ∞ stark genug abfällt.

Anleitung:
Man zeige mit Hilfe von $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}\,') = -\vec{\nabla}' f(\vec{r} - \vec{r}\,')$ und partieller Integration $\int d^3x\, f\vec{\nabla} g = -\int d^3x \left(\vec{\nabla} f\right) g +$ Randterm

$$\int d^3x'\vec{\nabla} \times \frac{\vec{\nabla}\,' \times \vec{B}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \int d^3x' \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\vec{\nabla}\,'\left(\vec{\nabla}\,' \cdot \vec{B}(\vec{r}\,')\right) - \vec{B}(\vec{r}\,')\Delta\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right].$$

Man benutze $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}\,)$.

8. Quadrupol

Gegeben seien die vier Punktladungen q bei $\vec{a} = (a, 0, 0)$, $-\vec{a}$ und $-q$ bei $\vec{b} = (0, b, 0)$, $-\vec{b}$

a) Man bestimme das Quadrupolmoment: $Q_{ij} = \int d^3x'\rho(\vec{r}\,')\left(3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2\right)$. 1 Punkt

b) Man skizziere in der x, y-Ebene die Äquipotentialflächen.t 1 Punkt

Anleitung: Man benutze Mathematica und gebe für verschiedene Werte von a und b ein:

```
a=3;b=2;
f1=1/Sqrt[(x-a)^2+y^2];
f2=1/Sqrt[(x+a)^2+y^2];
f3=-1/Sqrt[x^2+(y-b)^2];
f3=-1/Sqrt[x^2+(y+b)^2];
ContourPlot[f1+f2+f3+f4,{x,-6,6},{y,-6,6},
Contours -> 20, PlotPoints -> 50, ContourShading -> False];
```

Abgabetermin: Mi den 10. 11. 2010 in der Vorlesung

Siehe auch: http://users.physik.fu-berlin.de/˜kamecke/lehre.html

Anleitung zur Lösung

6. Magnetisches Feld

a) mit $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$und $\sin\alpha = r/R$, $\cos\alpha = s/R$

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|d\vec{s}\times\vec{R}\right|}{R^3} = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha\, ds}{R^2} = \frac{I}{4\pi r}\int_{-1}^{1} d\cos\alpha = \frac{I}{2\pi r}$$

b)Sei $\mathcal{C}$ Kreis $\perp$ Leiter mit Mittelpunkt im Leiter

$$I = \int_{\mathcal{C}} \vec{H}(\vec{r}\,)\cdot d\vec{r} = H 2\pi r \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}$$

7. Vektorpotential

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\int d^3x'\frac{\vec{\nabla}\,'\times\vec{B}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} &\overset{\vec{\nabla}\to-\vec{\nabla}'}{=} -\int d^3x'\left(\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\times\left(\vec{\nabla}\,'\times\vec{B}(\vec{r}\,')\right)\\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} \int d^3x'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{\nabla}'\times\left(\vec{\nabla}'\times\vec{B}(\vec{r}\,')\right)\\
&\overset{bac-cab}{=} \int d^3x'\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{\nabla}\,'\left(\vec{\nabla}\,'\cdot\vec{B}(\vec{r}\,')\right) - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\Delta'\vec{B}(\vec{r}\,')\right]\\
&\overset{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}{=} -\int d^3x'\left(\Delta'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\vec{B}(\vec{r}\,') \overset{\Delta\frac{1}{r}=-4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})}{=} 4\pi\vec{B}(\vec{r})
\end{aligned}$$

8. Quadrupol

$$\rho(\vec{r}) = q\left(\delta^{(3)}\left(\vec{r}-\vec{a}\right) + \delta^{(3)}\left(\vec{r}+\vec{a}\right) - \delta^{(3)}\left(\vec{r}-\vec{b}\right) - \delta^{(3)}\left(\vec{r}+\vec{b}\right)\right)$$

a)

$$\begin{aligned}
Q_{ij} &= \int d^3x\,\rho(\vec{r})\left(3x_ix_j - \delta_{ij}r^2\right) = q\left(3\left(2a_ia_j - 2b_ib_j\right) - \delta_{ij}\left(2a^2-2b^2\right)\right)\\
&= 2q\begin{pmatrix} 2a^2+b^2 & 0 & 0\\ 0 & -a^2-2b^2 & 0\\ 0 & 0 & -a^2+b^2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b)