Übungen zur Vorlesung „Theoretische Physik 3“

Blatt 4 10.11.2010 WS 10/11

9. Homogen geladene Kugel 1 Punkt

Am Ort $\vec{r} = 0$ befinde sich eine Kugel mit Radius R und mit konstaner Ladungsdichte ρ im Inneren. Man bestimme das D-Feld innen und außen mit Hilfe des Gaußschen Satzes.
Anleitung: wegen der Symmetrie ist $\vec{D}$ proportional $\vec{r}$.

10. Leiter im elektrostatischen Feld

Zwei Leiter im Vakuum L_1 und L_2 (beliebig gestaltet) seien vorgegeben, außerdem sei außerhalb der Leiter eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ vorhanden. Das Potential $\varphi(\vec{r})$ falle mindestens wie $1/r$ ab.

a) Man zeige, daß φ eindeutig ist, wenn die Potentiale $\varphi_{1,2}$ auf den Leitern vorgegeben sind. 1 Punkt

b) Man zeige das gleiche, wenn die Gesamtladungen $Q_{1,2}$ der Leiter vogegeben sind. 1 Punkt

c) Es sei $Q_1 = -Q_2$ und $\rho = 0$ außerhalb der Leiter. Man zeige, daß $Q_1/(\varphi_1 - \varphi_2) = C$ (Kapazität) von Q_1 nicht abhängt. 1 Punkt

d) Ein ladunsfreier Raum sei ganz von einem Leiter umgeben. Man zeige, daß $\vec{E} = 0$ in diesem Raum (Faradaykäfig). 1 Punkt

Anleitung für a) und b): Man zeige mit Hilfe des Gaußschen Satzes, daß für die Differrenz von Lösungen $\phi = \varphi - \varphi'$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus L_1 \setminus L_2} d^3x \, (\vec{\nabla}\phi)^2 = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1,2} (\varphi_i - \varphi_i') \, (Q_i - Q_i') = 0,$$

da $\triangle\varphi = \triangle\varphi' = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$ außerhalb der Leiter und für den Fluß des $\vec{D}$-Feldes das Gaußsche Gesetz gilt: $\int_{\partial L_i} \vec{df} \cdot \vec{D} = Q_i$.
Anleitung für c): Man zeige wie in b) $\phi = \varphi/Q_1 - \varphi'/Q_1' = 0$ für 2 Werte Q_1 und Q_1' für die Ladung auf L_1.

11. Wasserstoffatom

Für das elektrische Potential eines Wasserstoffatoms gilt näherungsweise

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right) e^{-\alpha r}$$

Welche Ladungsverteilung liefert dieses Potential? 2 Punkte

Anleitung: Man beachte, daß

$$\triangle \frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}) \, .$$

Abgabetermin: Mi den 17.11. 2010 in der Vorlesung

Siehe auch: http://users.physik.fu-berlin.de/~kamecke/lehre.html

Anleitung zur Lösung

9. Homogen geladene Kugel

$$\int_{\partial K_{\text{außen}}} d\vec{f} \cdot \vec{D} = 4\pi r_a^2 D_a = Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \Rightarrow \vec{D}_a = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r_a^3} \vec{r}_a$$
$$\int_{\partial K_{\text{innen}}} d\vec{f} \cdot \vec{D} = 4\pi r_i^2 D_i = Q_i = \frac{4\pi}{3} r_i^3 \rho = Q \frac{r_i^3}{R^3} \Rightarrow \vec{D}_i = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{R^3} \vec{r}_i$$

10. Leiter im elektrostatischen Feld

Seien φ und φ' Lösungen und $\phi = \varphi - \varphi' \Rightarrow \Delta\phi = 0$ mit $V = \mathbb{R}^3 \setminus L_1 \setminus L_2 \Rightarrow$

$$\int_V d^3x \left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \left(\phi \vec{\nabla}\phi - \phi \Delta \phi\right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \phi_i \left(Q_i - Q_i'\right) = 0$$

für a) $\phi_i = 0$, für b) $Q_i = Q_i'$.

c) Für $\phi = \varphi/Q_1 - \varphi'/Q_1'$ ist $\int_V d^3x \left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \left(\phi \vec{\nabla}\phi - \phi\Delta\phi\right) = 0$, da $\int_{\partial L_i} d\vec{f} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0 \Rightarrow \varphi/Q_1 = \varphi'/Q_1'$

d) $\Delta\varphi = 0,\ \varphi = \varphi_L$ auf Leiter, φ eindeutig $\Rightarrow \varphi = \varphi_L$ in $V \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = 0$

11. Wasserstoffatom

$$\begin{aligned}\rho &= -\epsilon_0 \Delta \varphi = -\frac{q}{4\pi} \Delta \left(\left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \right) e^{-\alpha r} \right) \\ &= -\frac{q}{4\pi} \left\{ \Delta \frac{1}{r} e^{-\alpha r} + 2 \vec{\nabla} \frac{1}{r} \cdot \vec{\nabla} e^{-\alpha r} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \right) \Delta e^{-\alpha r} \right\} \\ &= q \delta^{(3)}(\vec{r}) - \frac{q}{4\pi} \frac{\alpha^3}{2} e^{-\alpha r}\end{aligned}$$