Übungen zur Vorlesung „Theoretische Physik 3“

Blatt 6   24.11.2010   WS 10/11

15. Dielektrische Kugel im homogennen Feld   2 Punkte

Eine ungeladene Kugel mit Radius R und Materialkonstante ϵ befinde sich im Vakuum in einem elektrischen Feld, das für $r \gg R$ homogen $= \vec{E}_\infty = E_\infty \vec{e}_z$ ist.
Man zeige, daß das Potential

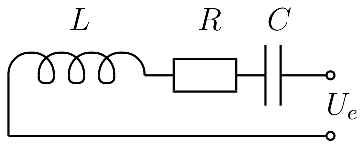
$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \varphi_a = -E_\infty z + \dfrac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\dfrac{R^3}{r^3} E_\infty z & \text{für } r > R \\ \varphi_i = -\dfrac{3}{\epsilon + 2} E_\infty z & \text{für } r < R \end{cases}$$

die Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ und die Randbedingungen $(\varphi_i - \varphi_a)_{r=R} = 0$ und $\left(\epsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\right)_{r=R} = 0$ erfüllt.

16. RLC-Kreis   3 Punkte

Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = \dot{U}_e$$



für den RLC-Kreis mit der eingeprägten Spannung $U_e = U_0 \cos \Omega t$?
Wie lautet die Lösung für große Zeiten?
Man diskutiere das Verhältnis der Amplituden I_0/U_0 für diese Lösung als Funktion von Ω. Plotten Sie die Funktion $I_0(\Omega)/U_0(\Omega)$ und Phasenverschiebung $\phi(\Omega)$ zwischen der eingeprägten Spannung und dem Strom.

Anleitung: Siehe Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik, Schwingungen). Man zeige: mit dem Ansatz $I(t) = I_0 \cos(\Omega t - \phi)$ ergibt sich aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} I_0(-L\Omega^2 + 1/C) &= -U_0 \Omega \sin\phi \\ I_0(-R\Omega) &= -U_0 \Omega \cos\phi \end{aligned}$$

Für die Plotts verwende man Mathematica:

```
Plot[1/Sqrt[1+(x-1/x)^2],{x,0,5}];
Plot[ArcTan[x-1/x],{x,0,5}];
```

17. Dosselspule   1 Punkt

Eine Drosselspule mit $L = 1\,\mathrm{H}$ und $R = 1\,\Omega$ wird zur Zeit $t = 0$ an eine Batterie mit der konstanten Spannung U_0 angeschlossen. Gesucht ist der zeitliche Verlauf des Stromes. Wie lange dauert es, bis sich der stationäre Strom bis auf 1/1000 eingestellt hat?

Abgabetermin: Mi den 1.12. 2010 in der Vorlesung

Siehe auch: http://users.physik.fu-berlin.de/˜kamecke/lehre.html

Anleitung zur Lösung

15. Dielektrische Kugel im homogennen Feld

(1) $\Delta z = 0,\ \Delta \frac{z}{r^3} = -\Delta \left(\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}\right) \frac{1}{r} = -\left(\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}\right) \Delta \frac{1}{r} = \left(\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}\right) \delta^{(3)}(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \neq 0$

(2) $(\varphi_i - \varphi_a)_{r=R} = E_\infty z \left(-1 + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} + \frac{3}{\epsilon + 2}\right) = 0$

$r\left(\epsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{-E_\infty z}{\epsilon+2}\left(3\epsilon - (\epsilon+2) + (\epsilon - 1)(-3+1)\right) = 0$

16. RLC-Kreis

allgemeine Lösung: $I(t) = I_{\text{homogen}}(t) + I_{\text{inhomogen}}(t)$:

Homogene Gleichung: Ansatz $I_h(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + \lambda R + 1/C = 0 \Rightarrow$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$I_h(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \begin{cases} A\cos\omega t + B\sin\omega t \ \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \ \text{ falls } \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \\ A\cosh\rho t + B\sinh\rho t \ \text{ mit } \rho = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \ \text{ falls } \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \end{cases}$$

$I_h(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

Inhomogene Gleichung: Ansatz

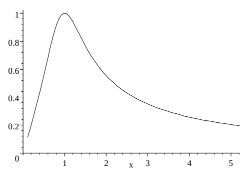
$$I_i(t) = I_0 \cos(\Omega t - \phi) \Rightarrow$$

$$I_0\left(-L\Omega^2 \cos(\Omega t - \phi) - R\Omega \sin(\Omega t - \phi) + 1/C \cos(\Omega t - \phi)\right) = -U_0 \Omega \sin(\Omega t - \phi + \phi)$$
$$= -U_0\left(\sin(\Omega t - \phi)\cos\phi + \cos(\Omega t - \phi)\sin\phi\right) \Rightarrow$$

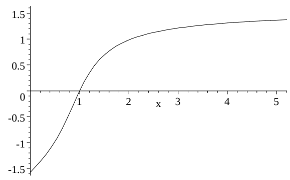
$$I_0\left(-L\Omega^2 + 1/C\right) = -U_0 \Omega \sin\phi$$
$$I_0(-R\Omega) = -U_0 \Omega \cos\phi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(L\Omega - \frac{1}{C\Omega}\right)^2}$$



$$\tan\phi = \frac{L\Omega - \frac{1}{C\Omega}}{R}$$



17. Dosselspule

$$L\ddot{I} + R\dot{I} = 0 \Rightarrow$$
$$I(t) = I_\infty\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \ \text{ mit } I_\infty = U_0/R$$
$$e^{-\frac{R}{L}t} = 10^{-3} \Rightarrow t = \frac{L}{R}\ln 10^3 = 6.9\,\text{s}$$