

Übungen Brückenkurs — Blatt 1

Bei Zeitmangel, reicht es aus, von den Aufgaben 4, 5 und 7 einige Unteraufgaben Ihrer Wahl zu bearbeiten.

Aufgabe 1:

Beweisen Sie die Lösung für quadratische Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

(quadratische Ergänzung)

Aufgabe 2:

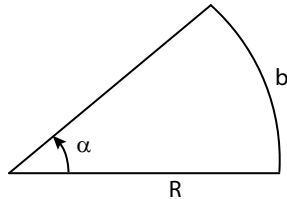
Beweisen Sie die Formel

$$\sum_{n=0}^N q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

für die geometrische Reihe. Unter welcher Bedingung können Sie den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ bilden und was ist das Resultat?

Aufgabe 3:

Drücken Sie die Bogenlänge b des Kreissegments (s. Skizze) durch den Winkel α und den Radius R aus.



Aufgabe 4:

Beweisen Sie, ausgehend von den in der Vorlesung bewiesenen Relationen $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ und $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ die folgenden trigonometrischen Identitäten

(a) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

(b) $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)}$
 $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)}$

(c) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$
 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

(d) Drücken Sie $\sin 3\alpha$ durch $\sin \alpha$ aus.

(e) Drücken Sie $\tan(\alpha + \beta)$ durch $\tan \alpha$ und $\tan \beta$ aus.

(f) Vereinfachen Sie

$$\frac{\cos \alpha(1 - \tan^2 \alpha)}{\tan \alpha(\cot \alpha - 1)}.$$

Aufgabe 5:

Die sogenannten Hyperbelfunktionen werden definiert durch

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\ \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} \end{aligned}$$

(sinus hyperbolicus etc.)

(a) Drücken Sie $\sinh(x + y)$ aus durch $\sinh x$, $\cosh x$, $\sinh y$ and $\cosh y$.

(b) Analog für $\cosh(x + y)$.

Vergleichen Sie Ihre Resultate mit den entsprechenden Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$.

Aufgabe 6:

Ein Brückenbogen hat die Form einer Parabel mit Lagern bei $x = \pm 5\text{m}$ und Scheitelhöhe 4m. Wie lautet die Gleichung der Parabel?

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie durch Polynomdivision das Verhalten von

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$$

(b)

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2}$$

für große Werte von x . Vernachlässigen Sie Terme des Typs $1/x^n$ mit $n > 2$.