Übungen zur Vorlesung „Theoretische Physik für Lehramtskandidaten I" Blatt 3 6.11.2003 WS 03/04

6. Konservative Käfte

Sind die Kraftfelder aus Aufgabe 4 *a)* $\vec{F}(\vec{r}) = c \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$, *b)* $\vec{F}(\vec{r}) = c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ konservativ?

Anleitung: Man berechne die Rotation rot $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})$.

7. Bahnen im Gravitationsfeld der Sonne

Man bestimme alle mögliche Bahnen eines Massenpunktes der Masse m unter Einwirkung der Gravitationskraft der Sonne (Masse M)

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\,\frac{M\,m}{r^3}\,\vec{r}.$$

Für den Fall der gebundenen Bewegung zeige man die drei Keplerschen Gesetze.

Anleitung: Man zeige, daß Energie- und Drehimpulserhaltungssatz gelten. In Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$T = \tfrac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right), \quad L = m r^2 \dot{\phi}$$

und weiter

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi}\frac{L}{mr^2} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2}}.$$

Durch Integration von

$$\phi - \frac{1}{2}\pi = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\phi} d\phi' = \int_{r_0}^{r} \frac{d\phi'}{dr'} dr' = \int_{r_0}^{r} \frac{L}{mr^2}\frac{1}{\dot{r}} dr'$$

und der Substitution $r \to u = r_0/r - 1$ bestimme man die Bahngleichung

$$r(\phi) = \frac{r_0}{1 - \epsilon\cos\phi} \quad \text{mit } r_0 = \frac{L^2}{Gm^2M},\ \epsilon^2 = 1 - \frac{E}{E_0},\ E_0 = -\frac{GmM}{2r_0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x - \epsilon a}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{für } \epsilon < 1 \text{ mit } a = \frac{r_0}{1-\epsilon^2},\ b = \sqrt{a r_0}$$

Abgabetermin: Do den 13. 11. 2003 in der Vorlesung