Lehrerfortbildung Quantenphysik: „Verborgene Parameter“

M. Karowski
Freie Universität Berlin,
Arnimallee 14, D-14195 Berlin

26. September 1997

Zusammenfassung

Hypothesen von „verborgenen Parametern“ sind experimentell widerlegt durch Widerspruch zu den *Bellschen Ungleichungen.*

1 Einleitung

$$\boxed{\textbf{Physikalische Experimente} \longleftrightarrow \textbf{Physikalische Theorie} \longleftrightarrow \textbf{Idealisierte Natur}}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boxed{\textbf{Physik ist eine approximative Wissenschaft}}$$

(im Gegensatz zur Mathematik)

Beispiele:

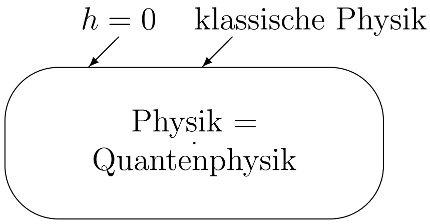
i) Newtons Mechanik $\subset$ Einsteins spezielle Relativitätstheorie

d.h. „Newtons Theorie” ist Grenzfall von „Einsteins Theorie“:
falls Geschwindigkeit $\ll$ Lichtgeschwindigkeit: „Newton“ $\approx$ „Einstein“
falls Geschwindigkeit $\approx$ Lichtgeschwindigkeit: „Einstein“ besser!

Problem:
Unsere Sinne sind nicht angepaßt an Geschwindigkeiten von der Größ enordnung der Lichtgeschwindigkeit $\Longrightarrow$
z.B. unserem Vorstellungsvermögen widerspricht die „Längenkontraktion“ usw.

ii) „Klassische Physik“ $\subset$ Quantenphysik

falls Wirkung $\ll h$: „Klassische Physik“ $\approx$ Quantenphysik
falls Wirkung $\approx h$: die Quantenphysik ist besser (h = Plancksches Wirkungsquantum).



1. **Problem:**
Unsere Sinne sind nicht angepaßt an Wirkungen von der Größenordnung des Planckschen Wirkungsquantums $h \Longrightarrow$ unserem Vorstellungsvermögen widerspricht der „Quantenzustand“ eines Teilchens gegeben durch eine Wellenfunktion.
Wir können uns z.B. nicht vorstellen, daß ein Teilchen von einem Ort zu einem anderen gelangt, ohne sich entlang einer <u>Bahn</u> zu bewegen.
2. **Problem:**
Wir können Quantenphysik nicht direkt beobachten, sondern dazwischen steht ein <u>klassischer</u> Meßapparat. $\longrightarrow$
3. **Problem:**
Der klassische Meßapparat ist sehr kompliziert – er hat $\approx \infty$ viele Freiheitsgrade $\Longrightarrow$ die Wechselwirkung des „Quantensystems“ mit dem Meßapparat ist nur approximativ bestimmbar.

2 Zustände

2.1 Klassische Mechanik

Speziell: ein Massenpunkt:

$$\boxed{\textbf{Zustand} \longleftrightarrow \Big(\text{Ort } \vec{r}, \text{ Impuls } \vec{p} = m\dot{\vec{r}}\Big)}$$

Bewegungsgleichung:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}}$$

$\Longrightarrow$ Wenn der Zustand $\Big(\vec{r}(t), \vec{p}(t)\Big)$ zur Zeit $t = 0$ bekannt ist, ist er für alle $t > 0$ bekannt.

2.2 Quantenmechanik

Ort $\vec{r}$ und Impuls $\vec{p}$ sind gleichzeitig nicht genau meßbar (Heisenbergs Unschärferelation).

entweder:	bei Ortsmessung wird $\vec{r}_0$ gemessen	$\Rightarrow$	Zustand $\mid \vec{r}_0 \rangle$
oder:	bei Impulsmessung wird $\vec{p}_0$ gemessen	$\Rightarrow$	Zustand $\mid \vec{p}_0 \rangle$

Derartige „Quantenzustände“ können dargestellt werden durch eine

$$\boxed{\text{Wellenfunktion: } \psi(\vec{r}, t).}$$

Zur Zeit $t = 0$:

$\mid \vec{r}_0 \rangle \quad \rightarrow \quad \psi(\vec{r}, 0) = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)$ (Diracs Deltafunktion)

$\mid \vec{p}_0 \rangle \quad \rightarrow \quad \psi(\vec{r}, 0) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{r}\cdot\vec{p}_0}$ (ebene Welle)

Bewegungsgleichung („Schrödingergleichung“):

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = H\,\psi(\vec{r}, t)}$$

$\Longrightarrow$ Wenn der Zustand $\psi(\vec{r}, t)$ zur Zeit $t = 0$ bekannt ist, ist er für alle $t > 0$ bekannt.

Bemerkungen:

1. Zwei Quantenzustände können überlagert werden, d.h. die Wellenfunktionen können addiert werden und ergeben einen neuen Zustand

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t)$$

   Das können wir uns nicht vorstellen mit einem klassischen Bild eines Teilchens.

2. Die Zuordnung: physikalisches System $\rightarrow$ Zustand ist nicht eindeutig: Ein und dasselbe System kann von zwei Physikern verschieden dargestellt werden: z.B.

   - von Physiker 1 durch einen „reinen Zustand“, d.h. eine Wellenfuntion $\psi(\vec{r}, t)$ und
   - durch Physiker 2 durch einen „unreinen Zustand“, d.h. eine Dichtematrix, falls Physiker 2 weniger Informationen über das System hat als Physiker 1.

2.3 Nichtkommutierende Observable

Beispiel Ort und Impuls:
Ein Quantenteilchen hat keine **<u>Bahn</u>**, weil Ort und Impuls nicht gleichzeitig einen „Wert“ haben können (Heisenbergs Unschärferelation).
Genauer:

$\mid \vec{r}_0 \rangle$	ist kein Impuls zuzuordnen;	die Frage nach dem Impuls ist sinnlos.
$\mid \vec{p}_0 \rangle$	ist kein Ort zuzuordnen;	die Frage nach dem Ort ist sinnlos.

3 Die Hypothese der „verborgenen Parameter“

Dr. Diehard[1] meint:
Wie in der klassischen Physik sind alle Observablen auch für ein Quantensystem festgelegt, jedoch sind gewisse nicht meßbar - sondern „verborgen“. Dadurch gibt es keinen Widerspruch zur Unschärferelation.

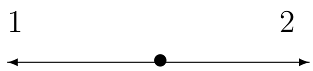
Z.B:

Im Zustand $\mid \vec{r}_0 \rangle$	ist der Impuls ein verborgener Parameter.
Im Zustand $\mid \vec{p}_0 \rangle$	ist der Ort ein verborgener Parameter.

Diese Hypothese ist experimentell widerlegt
durch Widerspruch zu den *Bellschen Ungleichungen*

3.1 Das Argument von „Einstein - Podolski - Rosen“ (EPR)

Gegeben ein Teilchen in Ruhe. Es zerfalle in zwei gleiche Teilchen 1 und 2.



Mißt man bei 1 den Ort $-x$, dann hat 2 den Ort x;
mißt man bei 1 den Impuls $-p$, dann hat 2 den Impuls p
wegen Impulserhaltung.
Genauer:
Mißt man bei 1 den Ort $-x$, dann ergibt eine Ortsmessung bei 2 den Wert x;
mißt man bei 1 den Impuls $-p$, dann ergibt eine Impulssmessung bei 2 den Wert p.

Bemerkung: Die Teilchen 1 und 2 sind „korreliert“, da auch nach dem Zerfall der Zweiteichenzustand durch <u>eine</u> Wellenfunktion beschrieben wird. Jedoch gibt es keinen Widerspruch zur „Einstein-Kausalität“, da keine Information übertragen wird.

Argument von EPR [2]:

I. Der Ort von 2 liegt fest, wenn der Ort von 1 gemessen wurde.

II. Der Impuls von 2 liegt fest, wenn der Impuls von 1 gemessen wurde.

III. Da 1 von 2 sehr weit entfernt sein kann, kann die Wahl des Experiments bei 1 das Teilchen 2 nicht beeinflussen.

[1] Dr. Diehard glaubt nicht an die Quantenphysik und versteht sie auch nicht [1].

Also sollten sowohl der Ort als auch der Impuls von 2 einen **Wert** haben, d.h. durch verborgene Parameter festgelegt sein.

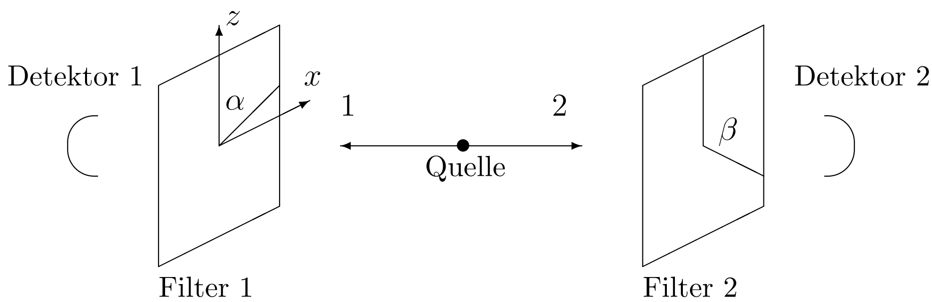
Antwort von Bohr [3]:
Um einer Observablen einen **Wert** zuzuordnen, muß diese gemessen werden; es reicht nicht, sich diese Messung nur vorzustellen; d.h. es kann nur entweder I. oder II. vorliegen.

Bemerkung: Es ergibt sich kein Widerspruch zur Einsteinkausalität, da durch die Auswahl I. oder II. bei Teilchen 1 kann keine Information nach Teilchen 2 übertragen wird; jedoch beim Vergleich der Meßdaten werden die erwähnten Korrelationen festgestellt.

Quantenzustände sind mit unseren „klassischen“ Bildern nicht vorstellbar!!

3.2 Ein Beispiel: Zerfall eines Spin 0 Teilchens in zwei Spin 1/2 Teilchen

Die Bedeutung dieser Variante des EPR-Gedankenexperiments besteht in der experimentellen Realisierung und der Überprüfbarkeit der Existenz von verborgenen Parametern.



Der Filter 1 läßt das Teilchen 1 nur durch, wenn sein Spin in Richtung α positiv ist.
Der Filter 2 läßt das Teilchen 2 nur durch, wenn sein Spin in Richtung β positiv ist.
Die Spinobservable $\vec{S} = \hbar/2\,\vec{\sigma}$ ist gegeben durch die Paulimartrizen

$$\vec{\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Da die Spinoperatoren S_i $(i = 1, 2, 3)$ für verschiedene Richtungen nicht kommutieren, ist es – anders als wir es für einen klassischen Drehimpuls gewohnt sind – sinnlos, den drei Komponenten des Spins Werte zuzuordnen. Der Spin z.B. in z-Richtung hat den Wert $\pm\hbar/2$, wenn ein Experiment der Observablen S_z diesen Wert ergeben hat. Die Werte von S_x und S_y sind dann unbestimmt.

Sei z.B. der Spin in z-Richtung positiv, d.h. die Spinwellenfunktion (Spinor) von 1 sei:

$$\chi = \ \uparrow\ \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dann ist die Wahrscheilichkeit, daß Detektor 1 anspricht

$$W_1(\alpha) = |\langle\, \chi_\alpha \,|\, \chi \,\rangle|^2 = \cos^2(\alpha/2) \tag{1}$$

wenn $\chi_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\alpha \\ \sin\frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix}$ der Eigenspinor mit Eigenwert 1 der Komponente $\sigma_\alpha = \vec{\sigma}\cdot\vec{e}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ ist. Der Einheitsvektor $\vec{e}_\alpha$ in Richtung α ist gegeben durch die Stellung des Filters 1. Entsprechend für Teilchen 2.

Der Spin 0 Zustand des Zweiteilchensystems wird beschrieben durch die Spinwellenfunktion

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\uparrow_1\downarrow_2 - \downarrow_1\uparrow_2\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Der Drehimpulserhaltungssatz hat zur Folge, daß die Spins der beiden Teilchen 1 und 2 immer entgegengesetzt ausgerichtet sind. Wenn z.B. ein Experiment, das den Spin in z-Richtung d.h. die Observable S_z für das Teilchen 1 mißt, das Ergebnis $+\hbar/2$ liefert, ergibt das entsprechende Experiment für das Teilchen 2 den Wert $-\hbar/2$. Das analoge gilt für alle Richtungen.

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit $W(\alpha,\beta)$, daß beide Detektoren ansprechen, 1. für den Fall der Quantenmechanik und 2. unter der Annahme, daß verborgene Parameter existieren, die die Richtung der Spins festlegen.

1. **Quantenmechanik:**

$$\begin{aligned} W_Q(\alpha,\beta) = |\langle\, \chi_\alpha\chi_\beta \,|\, \psi \,\rangle|^2 &= \left|\left\langle \begin{pmatrix}\cos\frac{1}{2}\alpha\\ \sin\frac{1}{2}\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{1}{2}\beta\\ \sin\frac{1}{2}\beta\end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\right\rangle\right|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left|\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\right|^2 = \tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}\,(\alpha-\beta) \end{aligned} \tag{2}$$

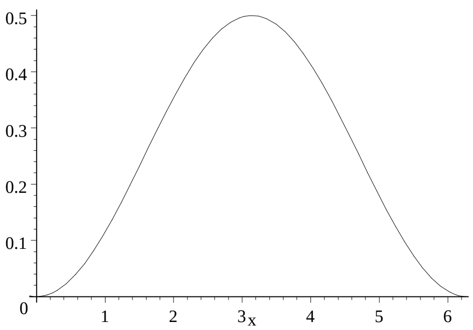
2. **„Theorie mit verborgenen Parametern“:**
Der Spin von Teilchen 1 sei durch einen **verborgenen Parameter** gegeben – den Winkel γ relativ zur z-Achse. Der Spin von Teilchen 2 ist dann durch den Winkel $\gamma+\pi$ festgelegt (wegen Spinerhaltung). Nach Gleichung (1) ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß Detektor 1 bzw 2 anspricht

$$W_1(\alpha-\gamma) = \cos^2\tfrac{1}{2}\,(\alpha-\gamma)\,, \text{ bzw} \quad W_2(\beta-\gamma) = \cos^2\tfrac{1}{2}\,(\beta-\gamma-\pi)\,.$$

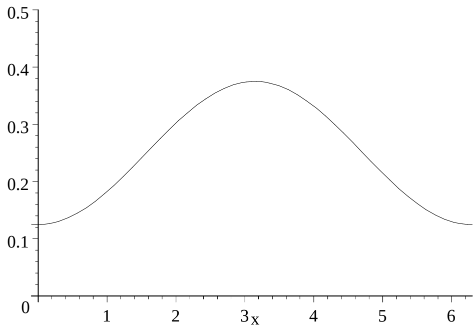
Da der Winkel γ alle Werte zwischen 0 und π gleichwahrscheinlich annimmt, ergibt die Mittelung

$$W_{VP}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\tfrac{1}{2}\,(\alpha-\gamma)\cos^2\tfrac{1}{2}\,(\beta-\gamma-\pi)\;d\gamma = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}\,(\alpha-\beta) \tag{3}$$

Zum Vergleich:



$W_Q(x,0) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}$



$W_V P(x,0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{x}{2}$

4 Bellsche Ungleichungen

Für das Experiment aus Abschnitt 3.2 kann man unter der Annahme von verborgenen Parametern die folgende Ungleichung [4] herleiten:

$$W(\alpha,\beta) \leq W(\alpha,\gamma) + W(\gamma,\beta). \tag{4}$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion W_{VP} von Gleichung (3) erfüllt diese Ungleichung, hingegen erfüllt das quantenmechanische Resultat diese Ungleichung nicht; z.B. für $\alpha = 120^0,\ \beta = 0,\ \gamma = 60^0$ ergibt die Ungleichung (4) mit Gleichung (2)

$$\frac{1}{2}\sin^2 60^0 \leq \frac{1}{2}\sin^2 30^0 + \frac{1}{2}\sin^2 30^0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{8} \leq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Widerspruch!}}$$

Experimentell wurde die Bellsche Ungleichung (4) widerlegt und das quantenphysikalische Resultat bestätigt.

Literatur

[1] S. Coleman, Vortrag an der HU-Berlin (1997).

[2] A. Einstein, B. Podolski and N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. 47 (1935) 777.

[3] N. Bohr, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. 48 (1935) 696.

[4] J.S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Experiment*, Physics **1** (1964) 195.