

# Magnonen Transport mit periodisch getriebener Barriere

André Becker

26. März 2019



# Magnonen Transport mit periodisch getriebener Barriere

André Becker

Bachelorarbeit



TU Kaiserslautern

Fakultät für Physik

Grundlagen der Festkörper und Vielteilchensysteme

Betreuung: Prof. Dr. Sebastian Eggert

26. März 2019



# Zusammenfassung

Periodisches Treiben ist ein bewährtes Mittel der Quantenmechanik, um interessante Effekte zu generieren, die nicht im statischen Fall auftreten.

Ferner erfreuen sich in den letzten Jahren Experimente mit dem magnetischen Isolator YIG zur Untersuchung von Magnonen steigender Popularität, da das zugehörige Gebiet der Magnonik einen möglichen Supercomputer in Aussicht stellt.

Ziel dieser Arbeit ist es, das Verhalten dieser Magnonen unter Einfluss periodisch getriebener Magnetfelder zu untersuchen. Dies wird hierbei in zwei grundlegende Bereiche gegliedert:

Einerseits wird das Verhalten unter globalem Treiben betrachtet. Ausgehend von der Dispersionsrelation für den statischen Fall kann gezeigt werden, dass es hier unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit durch periodisches Treiben zu einer Verschiebung der Quasienergie kommt.

Zusätzlich wird eine lokale, periodisch modulierte Potentialbarriere betrachtet und der zugehörige Transmissionskoeffizient bestimmt. Hierbei zeigt sich analog zur Tight-Binding-Kette eine Quanten-Resonanz-Katastrophe für bestimmte Bereiche der Treibfrequenz.

Um die zeitlich periodischen Probleme lösen zu können, wird auf die Floquet-Theorie zurückgegriffen, wodurch ein zeitabhängiger Hamilton-Operator auf ein statisches Eigenwertproblem projiziert wird.



# Abstract

Periodic driving is a proper tool of Quantum mechanics to obtain exciting effects, unrealizable in the static case.

Furthermore, experimentalists consider the behavior of magnons in the magnetic insulator YIG in recent years. The reason for this is a new research area called Magnonics. It provides a future supercomputer.

This thesis deals with the properties of those magnons under periodic driven magnetic fields. We distinguish two different cases:

Initially, global driving is analyzed. Regarding the dispersion relation of the static case, the associated derivation is considered to be time-dependent. From this, it follows the result that periodic driving leads to a quasienergy-shift.

Additionally, the case of local driving is reflected. In this instance, it is necessary to estimate the transmission coefficient of the periodically modulated barrier. Thus, similarities to a tight binding chain turn up, which occur by a so-called Quantum-resonance-catastrophe for the transmission through the barrier depending on the driving frequency.

The tool to solve the associated time-dependent Hamiltonians is Floquet-Theory. Due to this, it is possible to map the time-dependent equations to static eigenvalue problems.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>8</b>
1.1	Floquet-Theorie . . . . .	8
1.2	Magnonen . . . . .	8
1.3	Gliederung der Arbeit . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Spinwellentheorie für YIG</b>	<b>11</b>
2.1	Einführung . . . . .	11
2.1.1	Heisenberg-Modell . . . . .	11
2.1.2	Dipol-Dipol-Wechselwirkung . . . . .	12
2.2	YIG . . . . .	12
2.2.1	Elementare Eigenschaften von YIG . . . . .	12
2.2.2	Effektiver Hamilton-Operator für YIG-Filme . . . . .	13
2.2.3	Holstein-Primakoff-Transformation . . . . .	15
2.2.4	Fourier-Transformation . . . . .	16
2.2.5	Uniform Mode Approximation . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Floquet-Theorie</b>	<b>20</b>
3.1	Satz von Floquet . . . . .	20
3.2	Die Floquet-Gleichung . . . . .	21
3.3	Eigenschaften der Floquet-Moden . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Globales Treiben</b>	<b>24</b>
4.1	Variation des Magnetfeldes . . . . .	24
4.1.1	Periodischer Hamilton-Operator . . . . .	24
4.1.2	Zeitabhängige Bogoliubov-Transformation . . . . .	25
4.2	Anwenden des Satzes von Floquet . . . . .	27
4.3	Matrixwertige Kettenbrüche . . . . .	28
4.4	Perturbative Entwicklung . . . . .	29
4.4.1	Nullte Ordnung . . . . .	29
4.4.2	Zweite Ordnung . . . . .	30
4.5	Parametrische Instabilität . . . . .	33
4.6	Numerische Berechnung . . . . .	33
4.6.1	Verhalten der Quasienergie am Minimum . . . . .	34
4.6.2	Untersuchung der Position des Minimums . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Lokales Treiben</b>	<b>38</b>
5.1	Hamilton-Operator mit lokalem Störterm . . . . .	38
5.2	Transformation der Störterme . . . . .	38
5.2.1	Fourier-Transformation des Hamilton-Operators . . . . .	40

---

5.3	Anwenden der Floquet-Theorie . . . . .	41
5.3.1	Approximation der Summen . . . . .	44
5.3.2	Berechnung der Transmission . . . . .	46
5.3.3	Numerische Berechnung von $\xi_0$ . . . . .	46
5.4	Darstellung des Minimums . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Schlussfolgerung und Ausblick</b>	<b>53</b>
6.1	Schlussfolgerung . . . . .	53
6.2	Ausblick . . . . .	54
<b>A</b>	<b>Fourier-Transformation des lokalen Störterms</b>	<b>56</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Das Ausnutzen von periodischem Treiben ist ein von Kindesalter an vertrautes Konzept: Betrachtet man eine simple Schaukel, so kommt es durch periodische, an die Frequenz der Schaukelbewegung angepasste Bewegungen zu einer Resonanz. Dies äußert sich dann durch den Anstieg der Auslenkung der Schaukel.

Auch in Systemen der Quantenmechanik lassen sich durch periodisches Treiben interessante Effekte generieren, die nicht im statischen Fall auftreten. Ein bekanntes Beispiel ist die Paul-Falle, in der durch elektrische Felder, die zeitlich periodisch moduliert werden, der Einschluss geladener Ionen stattfindet [1]. Im Folgenden wird das Verhalten unter periodischem Treiben für die in Abschnitt 1.2 vorgestellten Magnonen analysiert.

### 1.1 Floquet-Theorie

Für quantenmechanische Systeme, die mit einer Frequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  getrieben werden, zeigt der Hamilton-Operator  $\hat{H}(t)$  zeitliche Periodizität.

Basierend auf den Erkenntnissen des französischen Mathematikers Gaston Floquet besitzen derartige Probleme eine einheitliche Lösungsstruktur und können so durch Anwenden einer Fourier-Transformation auf Eigenwertprobleme reduziert werden [2]. In der Festkörperphysik ist dies ein vertrautes Konzept durch das analoge Bloch-Theorem, welches statt der zeitlichen Periodizität die räumliche ausnutzt.

Das einzigartige an Floquet-Theorie ist die Möglichkeit, dass Systeme für beliebige Frequenzen  $\omega$  untersucht werden können. Es sind keine Näherungen, wie zum Beispiel in Form eines Hochfrequenz-Limes notwendig.

### 1.2 Magnonen

Bei der Suche nach effizienteren und leistungsfähigeren Methoden zur Informationsverarbeitung, bietet die Magnonik eine Alternative zur herkömmlichen elektronischen Datenverarbeitung, die mit Ohm'schen Verlusten behaftet ist [3].

Hierzu wird ein ferromagnetisches Material oder ein magnetischer Isolator betrachtet, in dem sich eine sogenannte Spinwelle ausbreiten kann. Bei klassischer Betrachtung lassen sich Spinwellen ausgehend von einer Spin-Kette mit  $N$  Spins, zwischen deren nächsten Nachbarn Wechselwirkung stattfindet, darstellen.

Zu Beginn wird angenommen, dass das System sich im Grundzustand befindet, d.h. alle Spins sind parallel in  $z$ -Richtung ausgerichtet. Durch eine lokale Störung kann ein Spin ausgelenkt werden. In der Folge entsteht ein effektives magnetisches Feld. Dieses beeinflusst die umliegenden Spins und führt zu Präzessionsbewegungen der einzelnen Spins und somit schließlich zur Propagation der Spinwelle [4], was in Abb. 1.1 dargestellt ist.

Aus der quantenmechanischen Betrachtung folgt weiterhin, dass diese Welle ein Quasiteilchen, das sogenannte Magnon besitzt.

Schaltkreise, die auf der Interferenz und Wechselwirkung dieser Spinwellen basieren, ermöglichen es, nahezu ohne Wärmeverluste Daten zu verarbeiten, und versprechen hierdurch gleichzeitig eine höhere Leistungsfähigkeit. Magnonik bezeichnet allgemein die Informationsverarbeitung durch Spinwellen.

Deshalb bietet es sich an, das Verhalten dieser Magnonen zu analysieren:

Die experimentelle Untersuchung der Magnonen besitzt eine lange Tradition an der TU Kaiserslautern durch die AG Hillebrands [6–10]: Hier wurden insbesondere Experimente an dünnen Filmen des magnetischen Isolators YIG durchgeführt und so unter anderem deren Dispersionsrelation durch Brillouin-Light-Scattering (Kurz: BLS) vermessen, wie in Abb. 1.2 dargestellt.

Ziel dieser Arbeit ist es nun, das Verhalten der Magnonen unter periodischem Treiben durch Magnetfelder zu analysieren. Das Vorgehen gliedert sich hierbei in zwei Bereiche:

Einerseits soll untersucht werden, wie sich globales Treiben auf die Dispersionsrelation auswirkt und andererseits in welcher Form sich eine lokale, periodisch getriebene Potentialbarriere auf das Transmissionsverhalten auswirkt. Im zweiten Fall kann der Vergleich zu einer Tight-Binding-Kette gezogen werden, bei welcher spannende Effekte, wie die Quanten-Resonanz-Katastrophe zu beobachten sind [11]. Die konkrete Behandlung der Probleme geschieht unter Anwendung der Floquet-Theorie, wobei dies interessanterweise in Ersterem für ein Vielteilchen-Problem und in Letzterem für ein Ein-Teilchen-Problem vorgenommen wird.

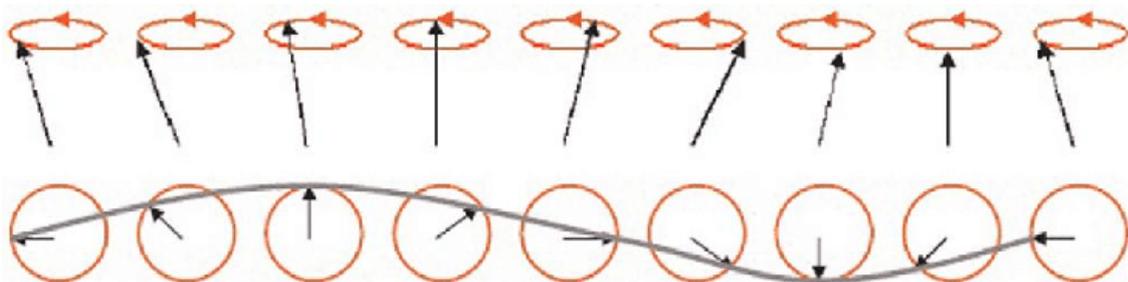


Abbildung 1.1: Illustration der propagierenden Spinwelle: Die einzelnen Spins vollführen Präzessionsbewegungen. Zwischen den einzelnen Spins besteht der Phasenunterschied  $ka$  bei der Wellenzahl  $k$  und der Gitterkonstante  $a$ . Die Grafik stammt aus [5].

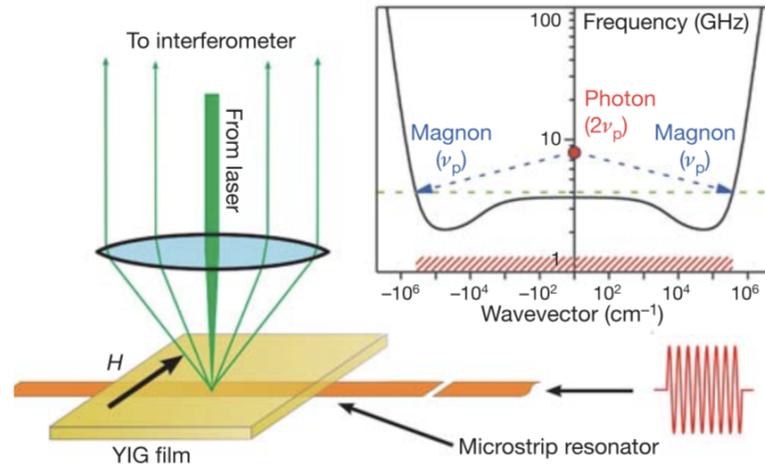


Abbildung 1.2: BLS: Ein Laserstrahl wird auf den Resonator fokussiert mit dem darauf befindlichen YIG-Film. Der Zerfall eines Mikrowellen-Photons führt zur Entstehung zweier Magnonen (genauerer hierzu siehe Abschnitt 4.5). Durch die Interferometrie des gestreuten Laserlichtes kann folglich aufgrund von Brillouin-Streuung an Magnonen die Dispersionsrelation aufgezeichnet werden. Die Abbildung stammt aus [6].

### 1.3 Gliederung der Arbeit

Zunächst werden die theoretischen Grundlagen zu Magnonen in Kapitel 2 und in Kapitel 3 bezüglich der Floquet-Theorie vorgestellt.

Anschließend werden sie zusammengeführt: Hierbei wird eingangs das Verhalten unter globalem Treiben in Kapitel 4 betrachtet und anschließend das lokale in Kapitel 5.

Beim globalen Verhalten liegt der Schwerpunkt darin, die Herleitungen bezüglich der Dispersionsrelation des statischen Falls auf den nicht statischen Fall unter Verwendung der Floquet-Theorie zu verallgemeinern.

Zur Untersuchung des lokalen Verhaltens wird eine in  $z$ -Richtung infinitesimale und in  $y$ -Richtung ausgedehnte Potentialbarriere analysiert, in diesem Fall gilt die statische Dispersion weiterhin. Hier liegt der Fokus darin, das Transmissionsverhalten der Magnonen durch die Barriere im Hinblick auf Treibfrequenz  $\omega$  und Stärke des Magnetfeldes der Barriere zu untersuchen. Interessanterweise lassen sich an dieser Stelle Parallelen zu einer Tight-Binding-Kette aufweisen, die auf analoge Weise in [11] hergeleitet wurde.

Zuletzt findet in Kapitel 6 eine kurze Zusammenfassung und der Ausblick statt.

# Kapitel 2

## Spinwellentheorie für YIG

### 2.1 Einführung

Zu Beginn sollen die Konzepte dargelegt werden, mit deren Hilfe sich die Eigenschaften von Spinwellen in YIG-Filmen beschreiben lassen.

Hierbei wird vom Heisenberg-Modell (siehe Kapitel 2.1.1) ausgegangen und durch das Ausnutzen der geometrischen Eigenschaften der YIG-Filme eine Dispersionsrelation für Spinwellen im reziproken Raum hergeleitet.

#### 2.1.1 Heisenberg-Modell

Bekanntermaßen existieren in Festkörpern neben Para- und Diamagnetismus, welche durch äußere Magnetfelder induziert werden, Formen von Magnetismus, die eine spontane Magnetisierung aufweisen und als Ferro-, Antiferro- und Ferrimagnetismus bezeichnet werden.

Die zuletzt genannten Phänomene beruhen auf der Kombination von Pauli-Prinzip und Coulomb-Wechselwirkung und lassen sich durch das Heisenberg-Modell mit einem effektiven Spin-Hamilton-Operator darstellen [12–14]

$$\hat{H}^{\text{Spin}} = - \sum J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j. \quad (2.1)$$

Hierbei bezeichnen  $\mathbf{S}_i$  und  $\mathbf{S}_j$  die vektoriellen Spin-Operatoren an den Gitterpunkten  $i$  und  $j$ , sowie  $J_{ij}$  die Austausch-Kopplungskonstante, die von der relativen Orientierung beider Spins zueinander abhängt.

Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

- Falls  $J > 0$ : Die parallele Ausrichtung der Spins ist bevorzugt, das System ist ferromagnetisch.
- Falls  $J < 0$ : Die Spins richten sich antiparallel aus. Die magnetischen Momente kompensieren sich, der antiferromagnetische Fall liegt vor.

Diese Fälle, sowie der Ferrimagnetismus als Spezialfall der antiferromagnetischen Austauschwechselwirkung, sind in Abb. 2.1 dargestellt. Um ein Spin-Modell durch diesen Operator adäquat zu beschreiben, muss der Überlapp, der zu den Spin-Operatoren gehörenden Elektron-Wellenfunktionen möglichst gering sein, d. h. der Abstand zwischen den magnetischen Ionen muss ausreichend groß sein [13].

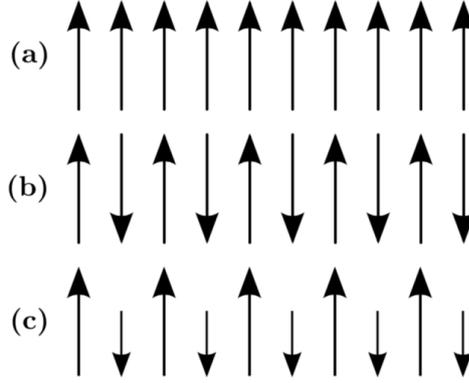


Abbildung 2.1: a) Veranschaulichung des Ferromagnetismus, b) des Antiferromagnetismus und c) zuletzt des Ferrimagnetismus durch die Darstellung der Spin-Orientierungen. Entnommen aus [15].

### 2.1.2 Dipol-Dipol-Wechselwirkung

Zwischen benachbarten Spins dominiert die Austausch-Wechselwirkung aus 2.1.1. Zusätzlich hierzu existiert die langreichweitige Dipol-Dipol-Wechselwirkung, die besonders für makroskopische Proben von Bedeutung ist, da hier eine enorme Vielzahl an Spins wechselwirkt [13].

Die Dipol-Dipol-Wechselwirkungsenergie  $U$  zweier magnetischer Dipole  $\mathbf{m}_1$  und  $\mathbf{m}_2$  im Abstand  $\mathbf{r}$  ist allgemein gegeben durch

$$U = \frac{1}{r^3} \left( \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 - 3(\mathbf{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right). \quad (2.2)$$

## 2.2 YIG

Nachdem die theoretischen Grundlagen zur Beschreibung magnetischer Phänomene durch das Heisenberg-Modell vorgestellt wurden, werden diese nun zur Darstellung der Spinwellen in YIG-Filmen angewendet.

### 2.2.1 Elementare Eigenschaften von YIG

YIG ist ein magnetischer Isolator mit der Summenformel  $\text{Y}_3\text{Fe}_2(\text{FeO}_4)_3$ , der aufgrund seiner geringen Spinwellen Dämpfung und der Curie-Temperatur von  $T_C = 560\text{K}$  (oberhalb der Raumtemperatur) für experimentelle Untersuchungen von Spinwellen verwendet wird [15–18].

Die Kristallstruktur ist der kubischen Gruppe  $Ia\bar{3}d$  zuzuordnen, mit 160 Atomen in der Elementarzelle [15, 16]. Das magnetische Moment geht von den Eisen-Ionen aus. Hierbei ist in Abb. 2.2 zu erkennen, dass diese innerhalb der Elementarzelle zwei verschiedene Positionen annehmen:

16 sind oktaedrisch, bezeichnet als  $a$  (türkis eingefärbt) und 24 tetraedrisch, gekennzeichnet durch  $d$  (violett eingefärbt).

Die Austauschwechselwirkung zwischen diesen Eisen-Ionen erfolgt über die umgebenden Sauerstoff-Ionen, was als Superaustausch bezeichnet wird. Die Austauschwechselwirkung von YIG ist antiferromagnetisch [13, 15]. Da sich ferner unterschied-

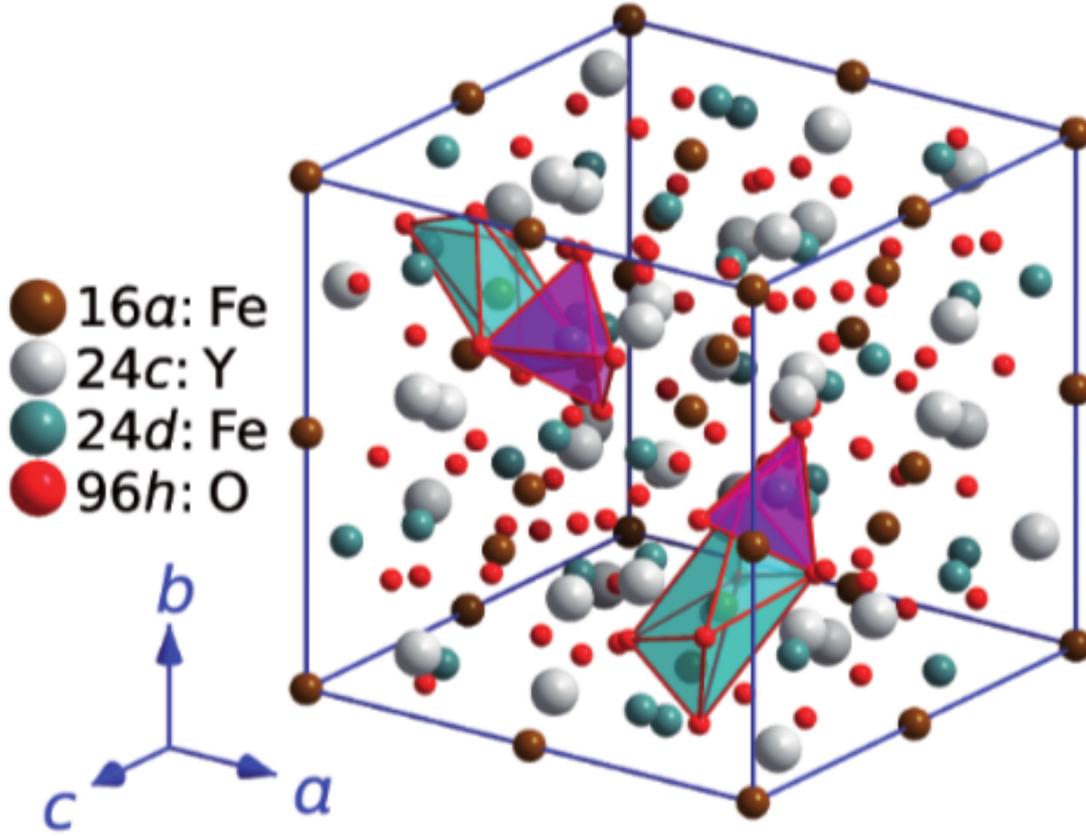


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der Einheitszelle von YIG, entnommen aus [19]. Es ist zu erkennen, dass YIG ferrimagnetisch ist, da sich die Eisen-Ionen in den unterschiedlichen Lagen  $a$  und  $d$  befinden.

lich viele Eisen-Ionen an den Positionen  $a$  und  $d$  befinden ist YIG ein Ferrimagnet [15, 16, 18].

### 2.2.2 Effektiver Hamilton-Operator für YIG-Filme

Im Limes niedriger Energie kann YIG als Ferromagnet mit ferromagnetischen Magnonen behandelt werden [16]. Dies kann durch das in Abschnitt 2.1.1 angeführte ferromagnetische Heisenberg-Modell in Kombination mit der langreichweitigen Dipol-Wechselwirkung dargestellt werden als [3, 15, 17, 18]

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j - \mu \mathbf{H}_e \sum_i \mathbf{S}_i - \frac{1}{2} \sum_{ij, i \neq j} \frac{\mu^2}{|\mathbf{R}_{ij}|^3} [3(\mathbf{S}_i \cdot \hat{\mathbf{R}}_{ij})(\mathbf{S}_j \cdot \hat{\mathbf{R}}_{ij}) - \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j]. \quad (2.3)$$

Hierbei wird über die einzelnen Gitterseiten  $\mathbf{R}_i$  summiert. Zusätzlich zum Heisenberg-Modell und der Dipol-Dipol-Wechselwirkung tritt ein weiterer Term auf, der sich auf das angelegte Magnetfeld bezieht.

Angenommen wird ein rascher Abfall der Austauschenergien, d. h. die Wechselwirkung  $J_{ij}$  ist auf nächste Nachbarn beschränkt, wobei aufgrund der Handhabung als Ferromagnet  $J > 0$  gilt [15, 17, 18]. Ferner bezeichnet  $\hat{\mathbf{R}}_{ij} = \frac{\mathbf{R}_{ij}}{|\mathbf{R}_{ij}|}$  den Einheitsvektor zwischen zwei Gitterpunkten  $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j$  und  $\mu = g\mu_B$  das magnetische Moment, zusammengesetzt aus dem effektiven  $g$ -Faktor und dem Bohr'sche Magneton  $\mu_B$ .

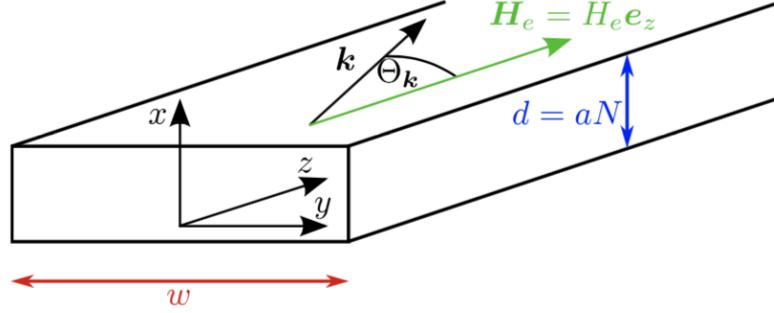


Abbildung 2.3: Darstellung der Geometrie des untersuchten YIG-Films, entnommen aus [17]

Aus Experimenten folgen weitere charakteristische Werte, die später zur konkreten Berechnung herangezogen werden:

- Gitterabstand  $a$  [17, 20]:

$$a = 12,376 \text{ \AA} \quad (2.4)$$

- Materialspezifische Sättigungsmagnetisierung für YIG [17, 21]:

$$4\pi M_s = 1750 \text{ G} \quad (2.5)$$

- Austauschsteifigkeitskonstante  $\rho_{ex}$ , als Maß bezüglich der Korrelation der Spins eines Ferromagneten [15, 18, 22]:

$$\frac{\rho_{ex}}{\mu} = \frac{J S a^2}{\mu} \approx 5,17 \cdot 10^{-13} \text{ Oe m}^2 \quad (2.6)$$

- Damit folgt für den effektiven Spin-Wert [15, 17, 18]:

$$S = \frac{M_s a^3}{\mu} \approx 14,2 \quad (2.7)$$

- Austausch-Kopplung nächster Nachbarn [17, 18]:

$$J = 1,29 \text{ K} \quad (2.8)$$

Um eine kompaktere Darstellung zu erhalten, wird der Dipoltensor

$$D_{ij}^{\alpha\beta} = (1 - \delta_{ij}) \frac{\mu^2}{|\mathbf{R}_{ij}|^3} [3\hat{R}_{ij}^\alpha \hat{R}_{ij}^\beta - \delta_{\alpha\beta}] = (1 - \delta_{ij}) \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial R_{ij}^\alpha \partial R_{ij}^\beta} \frac{1}{|\mathbf{R}_{ij}|} \quad (2.9)$$

eingeführt mit  $\alpha$  und  $\beta$  für die entsprechenden Raumrichtungen, wodurch sich der Hamilton-Operator als

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \sum_{\alpha\beta} [J_{ij} \delta_{\alpha\beta} + D_{ij}^{\alpha\beta}] S_i^\alpha S_j^\beta - h \sum_i S_i^z \quad (2.10)$$

zusammenfassen lässt.

Aufgrund der Geometrie des Aufbaus wird das Magnetfeld in  $z$ -Richtung betrachtet. Dem kann eine Zeemann-Energie

$$h = \mu H_e^z = \mu |\mathbf{H}_e| \quad (2.11)$$

zugeordnet werden [15, 17, 18].

### 2.2.3 Holstein-Primakoff-Transformation

Anhand der Kommutatorrelation für Spins

$$[S_i^x, S_j^y] = i\hbar\delta_{ij}S_i^z \quad (2.12)$$

ist zu erkennen, dass  $S_i^x$ ,  $S_i^y$  und  $S_i^z$  allgemein nicht kommutieren und somit keine gemeinsame Eigenbasis besitzen [23]. Für einen Ferromagneten, dessen Sättigungsmagnetisierung in  $z$ -Richtung vorliegt, lassen sich Auf- und Absteigeoperatoren

$$S_i^+ = S_i^x + iS_i^y, \quad (2.13)$$

$$S_i^- = S_i^x - iS_i^y \quad (2.14)$$

definieren [17, 23]. Mit einer Holstein-Primakoff-Transformation können Spin-Auf- und Absteigeoperatoren durch neue Operatoren  $b_i$  und  $b_i^\dagger$  dargestellt werden, die den Hamilton-Operator (2.10) bosonisieren [15, 17, 23]:

$$S_i^+ = \hbar\sqrt{2S}\sqrt{1 - \frac{b_i^\dagger b_i}{2S}} b_i, \quad (2.15a)$$

$$S_i^- = \hbar\sqrt{2S}b_i^\dagger\sqrt{1 - \frac{b_i^\dagger b_i}{2S}}, \quad (2.15b)$$

$$S_i^z = S - b_i^\dagger b_i. \quad (2.15c)$$

Die neuen Operatoren erfüllen folglich die bosonische Kommutatorrelation

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (2.16)$$

Zur Analyse des Wurzelterms bietet es sich an, dessen Entwicklung nach dem effektiven Spin  $S$  zu untersuchen. Diese Entwicklung ist gegeben durch

$$S_i^+ = \hbar\sqrt{2S}\left[1 - \frac{b_i^\dagger b_i}{4S} - \frac{(b_i^\dagger b_i)^2}{32S^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{S^3}\right)\right] b_i, \quad (2.17)$$

$$S_i^- = \hbar\sqrt{2S}b_i^\dagger\left[1 - \frac{b_i^\dagger b_i}{4S} - \frac{(b_i^\dagger b_i)^2}{32S^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{S^3}\right)\right]. \quad (2.18)$$

Wie bereits in Abschnitt 2.2.2 angeführt wurde, beträgt der effektive Spin  $S = 14, 2$ , woraus  $\langle b_i^\dagger b_i \rangle \ll S$  folgt. Deshalb ist es angemessen, die Reihenentwicklung nach dem ersten Term abzubrechen und mit der Abschätzung

$$S_i^+ \approx \hbar\sqrt{2S}b_i, \quad (2.19a)$$

$$S_i^- \approx \hbar\sqrt{2S}b_i^\dagger \quad (2.19b)$$

fortzufahren [15, 17, 18]. Damit folgt unter der Berücksichtigung von  $\hbar = 1$ , für die einzelnen Spin-Richtungen

$$S_i^x \approx \frac{\sqrt{2S}}{2}(b_i + b_i^\dagger), \quad (2.20a)$$

$$S_i^y \approx \frac{\sqrt{2S}}{2i}(b_i - b_i^\dagger), \quad (2.20b)$$

$$S_i^z = S - b_i^\dagger b_i. \quad (2.20c)$$

Durch das Einsetzen in (2.10) kann der Hamilton-Operator nach Potenzen der neuen bosonischen Erzeuger- und Vernichtoperatoren sortiert werden.

Zur Beschreibung der Spinwellen ist die zweite Ordnung zu untersuchen, welche durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H}_2 = \sum_{ij} \left[ A_{ij} b_i^\dagger b_j + \frac{B_{ij}}{2} (b_i b_j + b_i^\dagger b_j^\dagger) \right] \quad (2.21)$$

gegeben ist. Hierbei wurden

$$A_{ij} = \delta_{ij} h + S(\delta_{ij} \sum_n J_{in} - J_{ij}) + S \left[ \delta_{ij} \sum_n D_{in}^{zz} - \frac{D_{ij}^{xx} + D_{ij}^{yy}}{2} \right], \quad (2.22a)$$

$$B_{ij} = -\frac{S}{2} [D_{ij}^{xx} - 2iD_{ij}^{xy} - D_{ij}^{yy}] \quad (2.22b)$$

substituiert. Für spätere Untersuchungen ist es wichtig festzuhalten, dass die nullte Ordnung  $\hat{H}_0$  unabhängig vom äußeren Magnetfeld ist und lediglich einen konstanten Energieshift bezeichnet [15, 17, 18].

## 2.2.4 Fourier-Transformation

Typischerweise werden, wie eingangs dargestellt, dünne Filme aus YIG betrachtet (Vgl. Abb. 2.3), wobei gemäß (2.11) das Magnetfeld in  $z$ -Richtung angenommen wird. Ferner gilt  $w \ll d$ , woraus die diskrete Translationsinvarianz in  $y$ - und  $z$ -Richtung folgt [15, 17, 18]. Folglich kann der Hamilton-Operator durch eine partielle Fourier-Transformation in der  $yz$ -Ebene in den reziproken Raum überführt werden. Hierzu wird der zweidimensionale Ortsvektor  $\mathbf{r}_i = (y_i, z_i)$  mit dem zugehörigen Wellenvektor  $\mathbf{k} = (k_y, k_z)$  definiert.

Die diskrete Transformation lautet

$$b_i = \frac{1}{\sqrt{N_y N_z}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i} b_{\mathbf{k}}(x_i), \quad (2.23)$$

dargestellt durch die neu eingeführten Vektoren mit der Anzahl an Gitterpunkten  $N_y$  in  $y$ -, respektive  $N_z$  in  $z$ -Richtung. Daraus ergibt sich der Hamilton-Operator [15, 17, 18]

$$\hat{H}_2 = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{x_i, x_j} \left[ A_{\mathbf{k}}(x_{ij}) b_{\mathbf{k}}^\dagger(x_{ij}) b_{\mathbf{k}}(x_{ij}) + \frac{B_{\mathbf{k}}(x_{ij})}{2} b_{\mathbf{k}}(x_i) b_{-\mathbf{k}}(x_j) + \frac{B_{\mathbf{k}}^*(x_{ij})}{2} b_{\mathbf{k}}^\dagger(x_i) b_{-\mathbf{k}}^\dagger(x_j) \right]. \quad (2.24)$$

Folglich gelten für die zuvor angenommen Substitutionen die neuen Zusammenhänge

$$A_{\mathbf{k}}(x_{ij}) = S J_{\mathbf{k}}(x_{ij}) + \delta_{ij} [h + S \sum_n D_0^{zz}(x_{in})] - \frac{S}{2} [D_{\mathbf{k}}^{xx}(x_{ij}) + D_{\mathbf{k}}^{yy}(x_{ij})], \quad (2.25a)$$

$$B_{\mathbf{k}}(x_{ij}) = -\frac{S}{2}[D_{\mathbf{k}}^{xx}(x_{ij}) - 2iD_{\mathbf{k}}^{xy}(x_{ij}) - D_{\mathbf{k}}^{yy}(x_{ij})], \quad (2.25b)$$

$$J_{\mathbf{k}}(x_{ij}) = J[\delta_{ij}(6 - \delta_{j1} - \delta_{jN} - 2(\cos(k_y a) + \cos(k_z a))) - \delta_{ij+1} - \delta_{ij-1}]. \quad (2.25c)$$

### 2.2.5 Uniform Mode Approximation

Neben der im vorherigen Kapitel beschriebenen Translationsinvarianz in  $y$ - und  $z$ -Richtung wird zusätzlich angenommen, dass diese Invarianz in  $x$ -Richtung vorliegt. Durch die Näherung der Eigenfunktionen als ebene Wellen werden neue Operatoren

$$b_{\mathbf{k}}(x_i) \approx \frac{1}{N} \sum_j b_{\mathbf{k}}(x_j) \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} b_{\mathbf{k}}. \quad (2.26)$$

eingeführt, die unabhängig von der  $x$ -Richtung sind [15, 17, 18]. Somit vereinfacht sich (2.24) zum effektiven Hamilton-Operator

$$\hat{H}_2^{\text{eff}} = \sum_{\mathbf{k}} \left[ A_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \frac{B_{\mathbf{k}}}{2} (b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger) \right] \quad (2.27)$$

mit den nun ebenfalls von der  $x$ -Richtung unabhängigen Koeffizienten

$$A_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \sum_{ij} A_{\mathbf{k}}(x_{ij}), \quad (2.28a)$$

$$B_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \sum_{ij} B_{\mathbf{k}}(x_{ij}). \quad (2.28b)$$

Parametrisiert man die Spinwellen durch ebene Wellen mit dem zugehörigen Wellenvektor

$$\mathbf{k} = |\mathbf{k}|(\cos(\theta_{\mathbf{k}})\mathbf{e}_z + \sin(\theta_{\mathbf{k}})\mathbf{e}_y) \quad (2.29)$$

ergeben sich schließlich nach längerer Rechnung für die Dipolmatrixelemente (Vgl. [17, 18]) folgende Darstellungen:

$$D_{\mathbf{k}}^{xx} = \frac{4\pi\mu^2}{a^3} \left[ \frac{1}{3} - f_{\mathbf{k}} \right], \quad (2.30a)$$

$$D_{\mathbf{k}}^{yy} = \frac{4\pi\mu^2}{a^3} \left[ \frac{1}{3} + \sin^2 \theta_{\mathbf{k}}(f_{\mathbf{k}} - 1) \right], \quad (2.30b)$$

$$D_{\mathbf{k}}^{zz} = \frac{4\pi\mu^2}{a^3} \left[ \frac{1}{3} + \cos^2 \theta_{\mathbf{k}}(f_{\mathbf{k}} - 1) \right], \quad (2.30c)$$

$$D_{\mathbf{k}}^{xy} = 0 \quad (2.30d)$$

Hierbei wird der Formfaktor

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1 - e^{-|\mathbf{k}|d}}{|\mathbf{k}|d}. \quad (2.31)$$

eingeführt. Schließlich lauten die Koeffizienten aus (2.25)

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{k}} &= h + JS[4 - 2 \cos(k_y a) - 2 \cos(k_z a)] - \frac{S}{2}(D_{\mathbf{k}}^{xx} + D_{\mathbf{k}}^{yy}) + \frac{\Delta}{3} \\ &\approx h + \rho_{ex} \mathbf{k}^2 - \frac{S}{2}(D_{\mathbf{k}}^{xx} + D_{\mathbf{k}}^{yy}) + \frac{\Delta}{3}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$B_{\mathbf{k}} = -\frac{S}{2}(D_{\mathbf{k}}^{xx} + D_{\mathbf{k}}^{yy}). \quad (2.33)$$

Für  $A_{\mathbf{k}}$  wurde die Näherung verwendet, dass  $k_y \ll a$  im untersuchten Bereich gilt und somit die Taylor-Entwicklung des Kosinus

$$\cos(k_y a) \approx 1 + a^2 k_y^2 \quad (2.34)$$

bis zur zweiten Ordnung (analog für die  $z$ -Richtung) genügt, wobei der Zusammenhang  $JSa^2 = \rho_{ex}$  verwendet wurde.

Der Hamilton-Operator (2.27) kann durch eine Bogoliubov-Transformation diagonalisiert werden, woraus sich die Dispersionsrelation

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{A_{\mathbf{k}}^2 - B_{\mathbf{k}}^2} \quad (2.35)$$

$$= \sqrt{\left(h + \rho_{ex} \mathbf{k}^2 + \Delta(1 - f_{\mathbf{k}}) \sin^2 \theta_{\mathbf{k}}\right) \left(h + \rho_{ex} \mathbf{k}^2 + \Delta f_{\mathbf{k}}\right)} \quad (2.36)$$

ergibt [15, 17].

Das in Abb. 2.4 erkennbare Verhalten ausgehend von (2.36), lässt sich neben dem hier beschriebenen Vorgehen ebenfalls durch den phänomenologischen Ansatz mittels Landau-Lifschitz-Gleichung für den Bereich langer Wellenlängen herleiten [4, 13, 17].

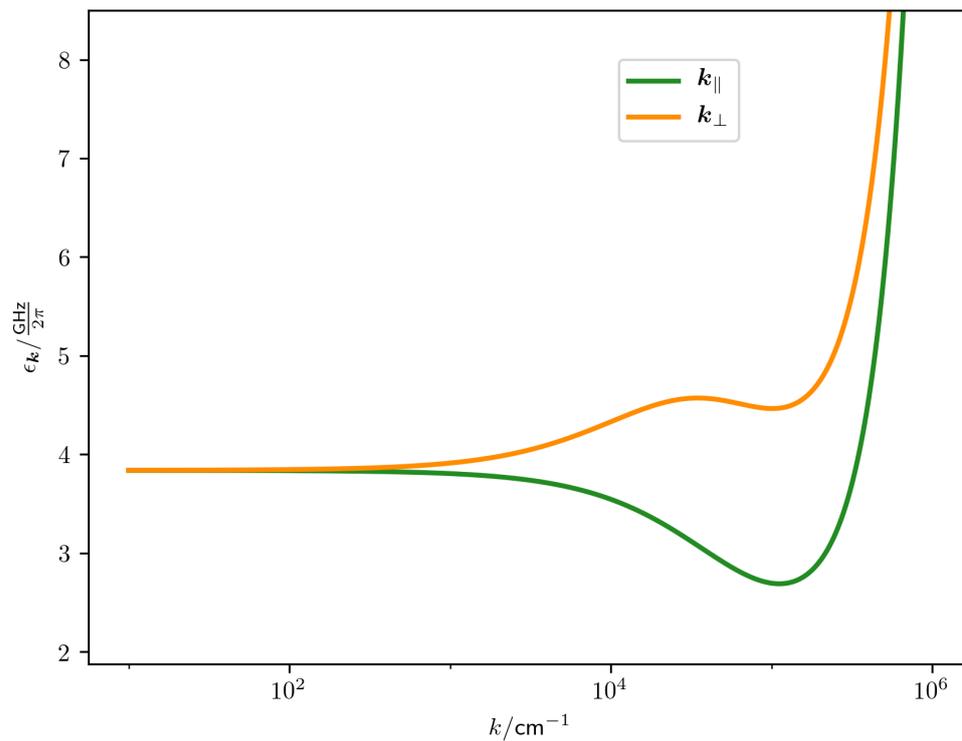


Abbildung 2.4: Darstellung der Dispersionsrelation in  $y$ - und  $z$ -Richtung. Im vorliegenden Beispiel beträgt das Magnetfeld 750 Oe, die Dicke des YIG-Filmes beträgt  $400a$  mit der Gitterkonstante  $a$ . Deutlich zu erkennen in  $z$ -Richtung (entspricht  $k_{\parallel}$ ) ist ein Minimum der Dispersionsrelation bei  $k_{min} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$ .

# Kapitel 3

## Floquet-Theorie

In diesem Abschnitt wird der Satz von Floquet und dessen Bezug zur Physik vorgestellt.

Durch die Erweiterung des Hilbert-Raumes um eine zusätzliche Dimension lässt sich eine zeitlich periodische Differentialgleichung aufgrund einer einheitlichen Lösungsstruktur auf ein statisches Problem abbilden.

### 3.1 Satz von Floquet

Die ursprüngliche Form des Satzes von Floquet bezieht sich auf eine zeitlich periodische gewöhnliche lineare Differentialgleichungen erster Ordnung [2]. Im Hinblick auf die Quantenmechanik lässt sich Floquet-Theorie auf einen Hamilton-Operator der Form

$$\hat{H}(t) = \hat{H}(t + T) \quad (3.1)$$

mit der Frequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , durch die das System getrieben wird, anwenden [24–26]. Der allgemeine zeitabhängige Floquet-Hamilton-Operator:

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{H}(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.2)$$

existiert auf dem erweiterten Floquet-Hilbert-Raum  $\mathcal{F} = \mathcal{R} \otimes \mathcal{T}$ , der sich aus dem Konfigurationsraum der quadratintegrierbaren Funktionen  $\mathcal{R}$  des ursprünglichen Hamilton-Operators  $\hat{H}(t)$  und der Erweiterung durch den Raum der zeitlich periodischen Funktionen mit Periode  $T$ , bezeichnet als  $\mathcal{T}$ , zusammensetzt [25].

Aus der Floquet-Theorie folgt nun, dass die Floquet-Zustände  $|\psi(t)\rangle$

$$\left( \hat{H}(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) |\psi(t)\rangle = 0 \quad (3.3)$$

lösen und dabei die Form

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i\frac{\epsilon}{\hbar}t\right) |\phi(t)\rangle \quad (3.4)$$

annehmen. Ferner sind die Floquet-Moden vollständig und orthogonal, wie später durch nachrechnen gezeigt wird [24, 26].

Der Floquet-Zustand setzt sich zusammen aus der Floquet-Mode  $|\phi(t)\rangle = |\phi(t + T)\rangle$

und einem Phasenfaktor, der von der Floquet-Energie  $\epsilon$  (auch: Quasienergie) abhängt. Durch Einsetzen der Floquet-Zustände in (3.3) kann die Eigenwertgleichung

$$\hat{\mathcal{H}}(t)|\phi(t)\rangle = \epsilon|\phi(t)\rangle \quad (3.5)$$

für die Floquet-Energie aufgestellt werden. Aufgrund der Periodizität der komplexen Exponentialfunktion ist die Quasienergie nicht eindeutig definiert, sondern  $|\psi(t)\rangle$  verhält sich äquivalent für

$$\epsilon \rightarrow \epsilon_q = \epsilon_0 + q\hbar\omega \quad (3.6)$$

mit  $q \in \mathbb{Z}$ . Deshalb werden analog zu den Bloch-Wellen die Quasienergie-Eigenwerte in die erste Brillouin-Zone

$$-\frac{\hbar\omega}{2} \leq \epsilon_0 < \frac{\hbar\omega}{2} \quad (3.7)$$

abgebildet.

Daraus ergibt sich eine zusätzliche Quantenzahl  $q$  für die Floquet-Moden, wobei die zugehörigen Wellenfunktionen  $|\psi(t)\rangle$  für verschiedene  $q$  identisch sind, da die Floquet-Energie auf der ersten Brillouin-Zone eindeutig definiert ist.

Unter Ausnutzung dieser Lösungsstruktur gilt es im weiteren Verlauf, die Zeitabhängigkeit zu beseitigen.

## 3.2 Die Floquet-Gleichung

Um nun zu einem statischen Problem zu gelangen, wird die Fourier-Zerlegung der Floquet-Moden  $|\phi(t)\rangle$  und des Hamilton-Operators  $\hat{H}(t)$  aufgestellt [24, 26, 27]:

$$\hat{H}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} \hat{H}_n, \quad (3.8)$$

$$|\phi(t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} |\phi_n\rangle \quad (3.9)$$

Daraus ergibt sich eine statische Gleichung

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{H}_m |\phi_{n-m}\rangle - n\hbar\omega |\phi_n\rangle = \epsilon |\phi_n\rangle, \quad (3.10)$$

die  $\forall n \in \mathbb{Z}$  erfüllt sein muss. Zu Illustrationszwecken kann dies durch eine unendlich-dimensionale Matrix dargestellt werden [24]:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \hat{H}_1 & \hat{H}_0 - (n-1)\hbar\omega & \hat{H}_{-1} & \hat{H}_{-2} & \hat{H}_{-3} & \cdots \\ \cdots & \hat{H}_2 & \hat{H}_1 & H_0 - n\hbar\omega & \hat{H}_{-1} & \hat{H}_{-2} & \cdots \\ \cdots & \hat{H}_3 & \hat{H}_2 & \hat{H}_1 & \hat{H}_0 - (n+1)\hbar\omega & \hat{H}_{-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Die zugehörigen Eigenwerte entsprechen den Quasienergien  $\epsilon$ . Die Eigenvektoren setzen sich aus den Fourier-Komponenten der Floquet-Moden zusammen [24]:

$$|\phi_\epsilon\rangle = \begin{pmatrix} \dots \\ |\phi_{n-1}\rangle \\ |\phi_n\rangle \\ |\phi_{n+1}\rangle \\ \dots \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Folglich wird durch Gleichung (3.10) ein statisches Problem beschrieben, allerdings muss im Gegenzug ein zusätzlicher Index, der den zugehörigen Floquet-Kanal  $n$  darstellt, berücksichtigt werden.

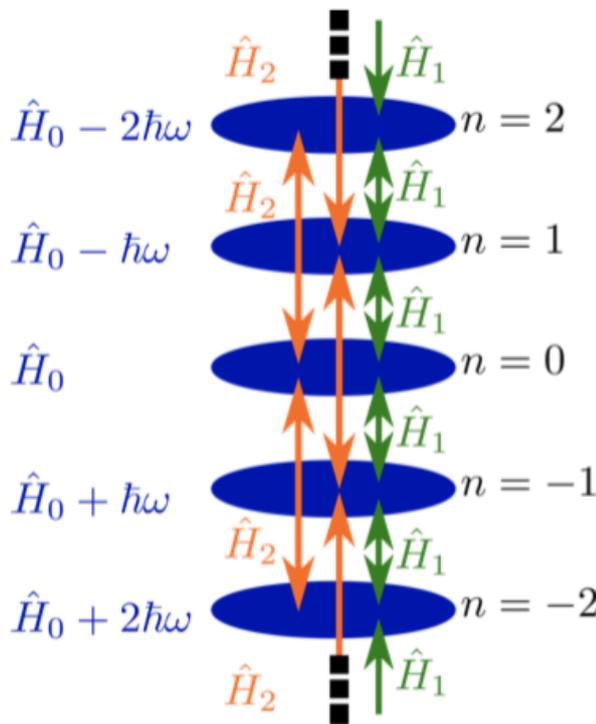


Abbildung 3.1: Anschauliche Darstellung der statischen Gleichung (3.10): Der Konfigurationsraum  $\mathcal{R}$  wird durch den Index  $n$  der Fourier-Komponenten als Basis von  $\mathcal{T}$  erweitert. Wie die Matrix-Darstellung (3.11) impliziert, fungieren die Fourier-Komponenten vom Hamilton-Operator  $\hat{H}_n$  für  $n \neq 0$  als Kopplung zu den höheren und niedrigen Floquet-Kanälen entsprechend des zugehörigen Fourier-Index  $n$ . Dies wurde hier exemplarisch für  $\hat{H}_1$  und  $\hat{H}_2$  durch grüne und orange Pfeile eingezeichnet. Die Grafik stammt aus [24].

### 3.3 Eigenschaften der Floquet-Moden

Die Floquet-Moden  $|\phi_{q,n}\rangle$  sind orthogonal, wie sich durch das zugehörigen Skalarprodukt auf  $\mathcal{F}$

$$\langle\langle \phi_{q,n} | \phi_{p,m} \rangle\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \langle \phi_{q,n}(t) | \phi_{p,m}(t) \rangle dt = \delta_{p,q} \delta_{m,n} \quad (3.13)$$

zeigen lässt [24, 27]. Das innere Skalarprodukt bezieht sich hierbei auf den Konfigurationsraum  $\mathcal{R}$  und das äußere auf den Raum der zeitlich periodischen Funktionen  $\mathcal{T}$ .

Zuletzt wird gezeigt, dass die Floquet-Moden ebenfalls die Vollständigkeitsrelation auf  $\mathcal{F}$  erfüllen. Hierzu wird die Fourier-Transformation der Floquet-Mode aus (3.9)

herangezogen. Unter Ausnutzen der Orthogonalität folgt durch

$$\sum_{\tilde{q}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\phi_{q,n}(t)\rangle \langle \phi_{q,n}(t')| = \mathbb{I}_{\mathcal{R}} \delta(t - t'), \quad (3.14)$$

die Vollständigkeit, wobei  $\tilde{q}$  bedeutet, dass für die zugehörigen Floquet-Energien  $\epsilon_{\tilde{q}} \in \left[-\frac{\hbar\omega}{2}, \frac{\hbar\omega}{2}\right)$  gilt [24]. Unterscheiden sich  $t$  und  $t'$  lediglich um Vielfache von  $T$ , so folgt aus der Summation über die erste Brillouin-Zone

$$\sum_{\tilde{q}} |\phi_{q,n}(t)\rangle \langle \phi_{q,n}(t)| = \mathbb{I}_{\mathcal{R}} \quad (3.15)$$

eine abgewandelte Vollständigkeitsrelation.

# Kapitel 4

## Globales Treiben

Bisher wurden alle Größen als statisch betrachtet. Daraus stellt sich die Frage, wie sich ein zeitabhängiges Magnetfeld auf das Verhalten der Spinwellen auswirkt. Dieser Effekt wird im Folgenden für ein periodisches Magnetfeld diskutiert, welches den gesamten YIG-Film beeinflusst, d. h. es findet globales Treiben statt.

Folglich ist es erforderlich die in Kapitel 2.2 vorgestellten Herleitungen für den zeitabhängigen Fall darzustellen.

### 4.1 Variation des Magnetfeldes

Um obige Annahmen in die bisherige Beschreibung einzugliedern, wird zum Term des Magnetfeldes  $h$  in  $A_{\mathbf{k}}$  ein zeitlich periodisches Magnetfeld

$$h(t) = h + h_0 \cos(\omega t), \quad (4.1)$$

welches ebenfalls in  $z$ -Richtung wirkt, addiert. Daraus lässt sich ein zeitlich periodischer Hamilton-Operator aufstellen.

#### 4.1.1 Periodischer Hamilton-Operator

Gemäß (2.27) ergibt sich als zeitabhängiger Hamilton-Operator

$$\hat{H}(t) = \sum_{\mathbf{k}} \left[ A_{\mathbf{k}}(t) b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \frac{B_{\mathbf{k}}}{2} (b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger) \right], \quad (4.2)$$

wobei offensichtlich  $\hat{H}(t) = \hat{H}(t + T)$  mit der zugehörigen Periodendauer  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  gilt.

Unter Ausnutzen der Symmetrieeigenschaft  $A_{\mathbf{k}} = A_{-\mathbf{k}}$ , entsprechend (2.32), kann der Hamilton-Operator in die symmetrische Form

$$\hat{H}(t) = \sum_{\mathbf{k}} \left[ \frac{1}{2} (A_{\mathbf{k}}(t) b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + A_{-\mathbf{k}}(t) b_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}) + \frac{1}{2} B_{\mathbf{k}} (b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger) \right] \quad (4.3)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[ A_{\mathbf{k}}(t) (b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}) + B_{\mathbf{k}} (b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger) \right]. \quad (4.4)$$

überführt werden.

### 4.1.2 Zeitabhängige Bogoliubov-Transformation

Nun soll eine Transformation analog zur Bogoliubov-Transformation im statischen Fall durchgeführt werden, um den Hamilton-Operator zu diagonalisieren [15, 17, 18]: Ausgehend von der zeitunabhängigen Bogoliubov-Transformation, bei der Konstanten  $u$  und  $v$  die alten Operatoren mit den neuen diagonalisierenden verknüpfen, wird ein neuer Satz an Operatoren

$$\beta_{\mathbf{k}}(t) = u_{\mathbf{k}}(t)b_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}(t)b_{-\mathbf{k}}^{\dagger}, \quad (4.5a)$$

$$\beta_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t) = u_{\mathbf{k}}^*(t)b_{\mathbf{k}}^{\dagger} + v_{\mathbf{k}}^*(t)b_{\mathbf{k}}. \quad (4.5b)$$

definiert [28], welche zusätzlich die Zeitabhängigkeit berücksichtigen, indem  $u_{\mathbf{k}}$  und  $v_{\mathbf{k}}$  zu Funktionen  $u_{\mathbf{k}}(t)$  und  $v_{\mathbf{k}}(t)$  werden.

Dabei müssen diese weiterhin die bosonischen Kommutatorrelationen erfüllen:

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = [\beta_{\mathbf{k}}(t), \beta_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(t)] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (4.6a)$$

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}] = [\beta_{\mathbf{k}}(t), \beta_{\mathbf{k}'}(t)] = 0, \quad (4.6b)$$

$$[b_{\mathbf{k}}^{\dagger}, b_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = [\beta_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t), \beta_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(t)] = 0. \quad (4.6c)$$

Daraus ergibt sich die Bedingung

$$|u_{\mathbf{k}}(t)|^2 - |v_{\mathbf{k}}(t)|^2 = 1 \quad (4.7)$$

zwischen  $u_{\mathbf{k}}(t)$  und  $v_{\mathbf{k}}(t)$ . Anschaulich können die Operatoren  $\beta_{\mathbf{k}}(t)$  und  $\beta_{-\mathbf{k}}^{\dagger}(t)$  als Vernichter- und Erzeugeroperatoren interpretiert werden.

Für die Kommutatorrelation zwischen einem allgemeinen bosonischen, diagonalisierten Hamilton-Operator

$$\hat{H}^{\text{diag}} = \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger} \alpha_{\mathbf{k}}, \quad (4.8)$$

mit dem zugehörigen Vernichtungsoperator  $\alpha_{\mathbf{k}}$  lässt sich durch Nachrechnen zeigen, dass für ein beliebiges  $\mathbf{k}$

$$\left[ \hat{H}^{\text{diag}}, \alpha_{\mathbf{k}} \right] = -\Delta_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}, \quad (4.9)$$

erfüllt ist.

Um den vorliegenden Hamilton-Operator in eine möglichst simple Form für das weitere Vorgehen zu überführen, werden  $u_{\mathbf{k}}(t)$  und  $v_{\mathbf{k}}(t)$  so gewählt, dass

$$\Delta_{\mathbf{k}} = 0 \quad (4.10)$$

entspricht.

Aufgrund der Zeitabhängigkeit der neuen Operatoren  $\beta_{\mathbf{k}}(t)$  wird das Heisenberg-Bild betrachtet [29]. Der Hamilton-Operator

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{H}(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.11)$$

ist somit im Vergleich zum statischen Fall um eine Zeitableitung erweitert. Durch (4.10) ist das Ziel durch die richtige Wahl von  $u_{\mathbf{k}}(t)$  und  $v_{\mathbf{k}}(t)$  den Hamilton-Operator in die Gestalt

$$\hat{\mathcal{H}}^{\text{diag}}(t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.12)$$

zu überführen.

Aus der oben motivierte Kommutatorrelation (4.9) lässt sich somit für den vorliegenden Fall der Kommutator

$$\left[ \hat{H}(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \beta_{\mathbf{k}}(t) \right] = 0 \quad (4.13)$$

ableiten, woraus eine gekoppelte Differentialgleichung für  $u_{\mathbf{k}}(t)$  und  $v_{\mathbf{k}}(t)$  gefolgert werden kann:

Durch das Resubstituieren der Ausdrücke innerhalb der Kommutatorrelation kann schließlich für ein beliebiges  $\mathbf{k}$  der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \left[ \hat{H}(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \beta_{\mathbf{k}}(t) \right] = & \left[ \frac{1}{2} \left( A_{\mathbf{k}}(t) (b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}) + \right. \right. \\ & B_{\mathbf{k}} (b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger) + A_{-\mathbf{k}}(t) (b_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}) + \\ & \left. \left. B_{-\mathbf{k}} (b_{-\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger) \right) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, u_{\mathbf{k}}(t) b_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}(t) b_{-\mathbf{k}}^\dagger \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

aufgestellt werden. Hierbei werden alle Terme der Summe über  $\mathbf{k}$  von (4.4) ausgewählt, die von  $\mathbf{k}$  und  $-\mathbf{k}$  abhängen. Die Ursache dieser Auswahl ist auf die bosonischen Kommutatorrelationen (4.6a) zurückzuführen.

Der Vergleich zu (4.13) liefert schließlich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} \left( A_{\mathbf{k}}(t) (b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}) + B_{\mathbf{k}} (b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger) + \right. \right. \\ \left. \left. A_{-\mathbf{k}}(t) (b_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}) + B_{-\mathbf{k}} (b_{-\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger) \right) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \right. \\ \left. u_{\mathbf{k}}(t) b_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}(t) b_{-\mathbf{k}}^\dagger \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nach dem Auflösen der Kommutatorrelationen wird der Ausdruck nach Erzeuger- und Vernichtoperatoren sortiert

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{k}} \left( B_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}(t) - A_{\mathbf{k}}(t) u_{\mathbf{k}}(t) \right) + b_{-\mathbf{k}}^\dagger \left( -B_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}(t) + A_{\mathbf{k}}(t) v_{\mathbf{k}}(t) \right) \\ = i\hbar b_{\mathbf{k}} \dot{u}_{\mathbf{k}}(t) + i\hbar b_{-\mathbf{k}}^\dagger \dot{v}_{\mathbf{k}}(t), \end{aligned} \quad (4.16)$$

woraus unmittelbar die Matrix-Differentialgleichung

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{u}_{\mathbf{k}}(t) \\ \dot{v}_{\mathbf{k}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{\mathbf{k}}(t) & B_{\mathbf{k}} \\ -B_{\mathbf{k}} & A_{\mathbf{k}}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}}(t) \\ v_{\mathbf{k}}(t) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

folgt. Zur Übersichtlichkeit wird die Substitution

$$\mathbf{X}_{\mathbf{k}}(t) = \begin{pmatrix} -A_{\mathbf{k}}(t) & B_{\mathbf{k}} \\ -B_{\mathbf{k}} & A_{\mathbf{k}}(t) \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

durchgeführt.

## 4.2 Anwenden des Satzes von Floquet

Im Folgenden findet die in Aussicht gestellte Anwendung der Floquet-Theorie für ein Vielteilchen-Problem statt, welches sich aus der Zeitabhängigkeit der Bogoliubov-Transformation und der daraus resultierenden Matrixdifferentialgleichung (4.17) ergibt.

Aufgrund der zeitlichen Periodizität der Matrix können die Lösungen nun gemäß des Satzes von Floquet durch

$$\begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}}(t) \\ v_{\mathbf{k}}(t) \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_{\mathbf{k}}t} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{k}}(t) \\ \tilde{v}_{\mathbf{k}}(t) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

dargestellt werden mit der Quasienergie  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  und den zeitlich periodischen Funktionen  $\tilde{u}_{\mathbf{k}}(t)$  und  $\tilde{v}_{\mathbf{k}}(t)$ .

Durch das Fourier-Transformieren der Matrixdifferentialgleichung (4.17) lässt sich das zeitabhängige Problem auf eine Eigenwertgleichung reduzieren.

- Die Fourier-Transformation der Floquet-Moden lautet

$$\mathbf{y}_{\mathbf{k},n} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{in\omega t} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{k}}(t) \\ \tilde{v}_{\mathbf{k}}(t) \end{pmatrix} dt \quad (4.20)$$

mit zugehörigen Fourier-Index  $n \in \mathbb{Z}$ .

- Analog ergibt sich für die Matrix der Ausdruck

$$\mathbf{X}_{\mathbf{k},n} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{in\omega t} \mathbf{X}_{\mathbf{k}}(t) dt. \quad (4.21)$$

- Daraus folgt die statische Eigenwertgleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_{\mathbf{k},n} \mathbf{y}_{\mathbf{k},m-n} - m\hbar\omega \mathbf{y}_{\mathbf{k},m} = \epsilon_{\mathbf{k}} \mathbf{y}_{\mathbf{k},m-n}, \quad (4.22)$$

die für alle  $m \in \mathbb{Z}$  erfüllt sein muss.

Die Summe über  $n$  kann auf die Fälle  $n = 0$

$$\mathbf{X}_{\mathbf{k},0} = \begin{pmatrix} -a_{\mathbf{k}} & B_{\mathbf{k}} \\ -B_{\mathbf{k}} & a_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad (4.23a)$$

und  $n = \pm 1$

$$\mathbf{X}_{\pm 1} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar_0}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar_0}{2} \end{pmatrix} \quad (4.23b)$$

reduziert werden, da das Integral (4.20) ansonsten verschwindet.

Bei  $\mathbf{X}_{\pm 1}$  wird von jetzt an auf den Zusatz  $\mathbf{k}$  bei der Indizierung verzichtet, da diese Matrix offensichtlich unabhängig von  $\mathbf{k}$  ist.

Ferner gilt

$$a_{\mathbf{k}} = h + \rho_{ex} \mathbf{k}^2 - \frac{S}{2} (D_{\mathbf{k}}^{xx} + D_{\mathbf{k}}^{yy}) + \frac{\Delta}{3}, \quad (4.24)$$

demzufolge handelt es sich um  $A_{\mathbf{k}}(t)$  ohne den zeitabhängigen Anteil. Daraus ergibt sich die Rekursionsgleichung

$$\mathbf{X}_{\pm 1}(\mathbf{y}_{\mathbf{k},m+1} + \mathbf{y}_{\mathbf{k},m-1}) + (\mathbf{X}_{\mathbf{k},0} - (\epsilon_{\mathbf{k}} + m\hbar\omega)\mathbb{I})\mathbf{y}_{\mathbf{k},m} = 0, \quad (4.25)$$

die zur Übersichtlichkeit durch die Substitution

$$\mathbf{X}_{\mathbf{k},0,m} = (\mathbf{X}_{\mathbf{k},0} - (\epsilon_{\mathbf{k}} + m\hbar\omega)\mathbb{I}) \quad (4.26)$$

in eine kompaktere Form überführt wird.

Unter der Annahme, dass es sich wegen  $h_0 \ll h$  um einen Kleinheitsparameter handelt, kann diese Rekursionsgleichung perturbativ betrachtet werden.

### 4.3 Matrixwertige Kettenbrüche

Um das Problem störungstheoretisch und später numerisch, entwickeln zu können, werden Leiteroperatoren  $\mathbf{S}_m^n$  mit  $n = \pm 1$  als Auf-, respektive Absteigeoperator eingeführt, welche die Bedingungen

$$\mathbf{y}_{\mathbf{k},m+1} = \mathbf{S}_m^{+1} \mathbf{y}_{\mathbf{k},m}, \quad (4.27a)$$

$$\mathbf{y}_{\mathbf{k},m-1} = \mathbf{S}_m^{-1} \mathbf{y}_{\mathbf{k},m} \quad (4.27b)$$

erfüllen [30]. Ferner gelten zwischen den Operatoren die Zusammenhänge:

$$\mathbf{S}_{m+1}^{+1} \mathbf{S}_m^{+1} = \mathbf{S}_m^{+2}, \quad (4.28a)$$

$$\left(\mathbf{S}_{m-1}^{+1}\right)^{-1} = \mathbf{S}_m^{-1} \quad (4.28b)$$

Dass (4.28a) gelten muss, folgt unmittelbar aus der Definition. Für (4.28b) zeigt sich durch Nachrechnen ausgehend von

$$\left(\mathbf{S}_m^{+1}\right)^{-1} \mathbf{y}_{\mathbf{k},m+1} = \mathbf{y}_{\mathbf{k},m}, \quad (4.29)$$

dass nach einem Indexshift  $m \rightarrow m - 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\mathbf{k},m-1} &= \left(\mathbf{S}_{m-1}^{+1}\right)^{-1} \mathbf{y}_{\mathbf{k},m} \\ &= \mathbf{S}_m^{-1} \mathbf{y}_{\mathbf{k},m} \end{aligned} \quad (4.30)$$

die Behauptung folgt.

Die Rekursionsgleichung (4.25) kann somit anhand der in (4.27a) und (4.27b) vorgestellten Leiteroperatoren dargestellt werden

$$\left(\mathbf{X}_{\pm 1}(\mathbf{S}_m^{+1} + \mathbf{S}_m^{-1}) + \mathbf{X}_{\mathbf{k},0,m}\right)\mathbf{y}_{\mathbf{k},m} = 0. \quad (4.31)$$

In diesem Fall ist es von Interesse einen allgemeinen Ausdruck für die Leiteroperatoren zu finden. Hierzu werden die Glieder  $\mathbf{y}_{\mathbf{k},m-1}$  und  $\mathbf{y}_{\mathbf{k},m+1}$  jeweils isoliert betrachtet

$$\mathbf{X}_{\pm 1} \mathbf{y}_{\mathbf{k},m-1} + \left(\mathbf{X}_{\pm 1} \mathbf{S}_m^{+1} + \mathbf{X}_{\mathbf{k},0,m}\right)\mathbf{y}_{\mathbf{k},m} = 0, \quad (4.32)$$

$$\left(\mathbf{X}_{\pm 1}\mathbf{S}_m^{-1} + \mathbf{X}_{\mathbf{k},0,m}\right)\mathbf{y}_{\mathbf{k},m} + \mathbf{X}_{\pm 1}\mathbf{y}_{\mathbf{k},m+1} = 0. \quad (4.33)$$

Aus dem Umstellen von (4.32) ergibt sich

$$\left(\mathbf{X}_{\pm 1}\mathbf{S}_m^{+1} + \mathbf{X}_{\mathbf{k},0,m}\right)^{-1}\mathbf{X}_{\pm 1} + \mathbf{y}_{\mathbf{k},m}\mathbf{y}_{\mathbf{k},m-1}^{-1} = 0 \quad (4.34)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y}_{\mathbf{k},m}\mathbf{y}_{\mathbf{k},m-1}^{-1} = -\left(\mathbf{X}_{\pm 1}\mathbf{S}_m^{+1} + \mathbf{X}_{\mathbf{k},0,m}\right)^{-1}\mathbf{X}_{\pm 1}. \quad (4.35)$$

Zuletzt wird ein Indexshift von  $m \rightarrow m + 1$  vollzogen und Ausnutzen von (4.27a) resultiert in einem konkreten Ausdruck für den Aufsteigeoperator

$$\mathbf{S}_m^{+1} = -\left(\mathbf{X}_{\pm 1}\mathbf{S}_{m+1}^{+1} + \mathbf{X}_{\mathbf{k},0,m+1}\right)^{-1}\mathbf{X}_{\pm 1}. \quad (4.36)$$

Nach analogem Vorgehen zeigt sich ausgehend von (4.33) für den Absteigeoperator der Zusammenhang

$$\mathbf{S}_m^{-1} = -\left(\mathbf{X}_{\pm 1}\mathbf{S}_{m-1}^{-1} + \mathbf{X}_{\mathbf{k},0,m-1}\right)^{-1}\mathbf{X}_{\pm 1}. \quad (4.37)$$

Auf Grundlage der so eingeführten Leiteroperatoren  $\mathbf{S}_m^{\pm 1}$  kann die Rekursionsrelation dargestellt werden. Deshalb kann von  $n = 0$  beginnend ein matrixwertiger Kettenbruch

$$\boxed{\left(\mathbf{X}_{\pm 1}(\mathbf{S}_0^{+1} + \mathbf{S}_0^{-1}) + \mathbf{X}_{\mathbf{k},0,0}\right)\mathbf{y}_{\mathbf{k},0} = 0} \quad (4.38)$$

zur Darstellung der Rekursion verwendet werden [30].

## 4.4 Perturbative Entwicklung

Aus Gleichung (4.38) ergibt sich ein Eigenwertproblem, welches analytisch perturbativ betrachtet wird unter der Annahme  $h_0 \ll h$ :

Als Lösungsansatz fungiert die Potenzreihenentwicklung der Floquet-Energie in Abhängigkeit der Amplitude des treibenden Magnetfelds  $h_0$  [30]

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \sum_{j=0}^n \left(\frac{h_0}{2}\right)^j \cdot \epsilon_{\mathbf{k},j}. \quad (4.39)$$

### 4.4.1 Nullte Ordnung

Zu erwarten ist, dass die nullte Ordnung der Störungstheorie mit dem ungestörten Problem übereinstimmt. Dementsprechend ist zu erwarten, dass das Resultat der Dispersionsrelation (2.36) entspricht.

Die nullte Ordnung der Störungstheorie lautet

$$F_0(h_0) = \det \left( \begin{pmatrix} -a_{\mathbf{k}} & B_{\mathbf{k}} \\ -B_{\mathbf{k}} & a_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} - \epsilon_{\mathbf{k}}\mathbb{I} \right) \quad (4.40)$$

$$= \epsilon_{\mathbf{k}}^2 - a_{\mathbf{k}}^2 + B_{\mathbf{k}}^2. \quad (4.41)$$

Da dieser Term offensichtlich nicht von  $h_0$  abhängt, gilt für den Koeffizienten  $c_0(\epsilon_{\mathbf{k}})$  von  $h_0^0$ , dass dieser durch  $c_0(\epsilon_{\mathbf{k}}) = F_0(h_0)$  gegeben ist. Folglich ist die Nullstelle durch den Ausdruck

$$\epsilon_{\mathbf{k},0} = \sqrt{a_{\mathbf{k}}^2 - B_{\mathbf{k}}^2} \quad (4.42)$$

gegeben und stimmt erwartungsgemäß mit (2.36) überein. Die erste Ordnung tritt nicht auf. Infolgedessen ist als nächstes die zweite Ordnung zu untersuchen.

#### 4.4.2 Zweite Ordnung

Folglich wird die Entwicklung der Kettenbrüche bis zur zweiten Ordnung vorgenommen ausgehend von

$$0 = \det \left( \begin{pmatrix} -\frac{h_0}{2} & 0 \\ 0 & \frac{h_0}{2} \end{pmatrix} (\mathbf{S}_0^{-1} + \mathbf{S}_0^{+1}) + (\mathbf{X}_{\mathbf{k},0} - \epsilon \mathbb{I}) \right). \quad (4.43)$$

Somit müssen die Auf- und Absteigeoperatoren explizit berechnet werden bis zur zweiten Tiefe auf Grundlagen von (4.36) und (4.37).

Der Aufsteigeoperator  $\mathbf{S}_0^{+1}$  wird durch

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_0^{+1} = & - \left[ \begin{pmatrix} -a_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\omega & B_{\mathbf{k}} \\ -B_{\mathbf{k}} & a_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{h_0}{2} & 0 \\ 0 & \frac{h_0}{2} \end{pmatrix} \right] \\ & \left( \begin{pmatrix} -a_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - 2\hbar\omega & B_{\mathbf{k}} \\ -B_{\mathbf{k}} & a_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - 2\hbar\omega \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{h_0}{2} & 0 \\ 0 & \frac{h_0}{2} \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{h_0}{2} & 0 \\ 0 & \frac{h_0}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.44)$$

beschrieben.

Durch Umstellen und Zusammenfassen lässt sich der Operator in die übersichtlichere Form

$$\mathbf{S}_0^{+1} = -\frac{1}{g(h_0)} \begin{pmatrix} \alpha_1(h_0) & -\alpha_2(h_0) \\ \alpha_2(h_0) & \alpha_3(h_0) \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

überführen. Folgende Substitutionen wurden an dieser Stelle vorgenommen:

$$\alpha_1(h_0) = a_{\mathbf{k}} \left( \frac{h_0^2}{4c_0} + 1 \right) + \epsilon_{\mathbf{k}} \left( \frac{h_0^2}{4c_0} - 1 \right) + \hbar\omega \left( \frac{h_0^2}{2c_0} - 1 \right), \quad (4.46)$$

$$\alpha_2(h_0) = B_{\mathbf{k}} \left( \frac{h_0^2}{4c_0} + 1 \right), \quad (4.47)$$

$$\alpha_3(h_0) = a_{\mathbf{k}} \left( \frac{h_0^2}{4c_0} - 1 \right) - \epsilon_{\mathbf{k}} \left( \frac{h_0^2}{4c_0} + 1 \right) + \hbar\omega \left( \frac{h_0^2}{2c_0} + 1 \right). \quad (4.48)$$

Zusätzlich bezeichnet  $c_0$  die Determinante auf Grund des inneren Invertierens in (4.44), sowie  $g(h_0)$  die Determinante

$$g(h_0) = \alpha_3(h_0)\alpha_1(h_0) - \alpha_2(h_0)^2 \quad (4.49)$$

auf Grund des äußeren Invertierens. Ein analoges Resultat ergibt sich für  $\mathbf{S}_0^{-1}$ , einzig muss beachtet werden, dass das Vorzeichen der Terme mit  $\hbar\omega$  in (4.46) und (4.48)

zu invertieren ist.

Bezüglich der Berechnung der Determinante gilt es nun, die für die zweite Ordnung notwendigen Terme auszuwählen:

Bei  $g(h_0)$  handelt es sich allgemein um ein Polynom der Form

$$g(h_0) = \kappa_0 + \kappa_1 \cdot h_0^2 + \kappa_2 \cdot h_0^4 \quad (4.50)$$

mit den entsprechenden Koeffizienten  $\kappa_j$ . Eingangs wurde motiviert, dass es sich bei  $h_0$  um einen Kleinheitsparameter handelt, weshalb die Taylor-Entwicklung der Determinante an der Stelle  $h_0 = 0$  berechnet wird.

Es ergibt sich folgende Entwicklung

$$T\left(\frac{1}{g(h_0, 0)}\right) = \frac{1}{\kappa_0} - \frac{\kappa_1}{\kappa_0^2} \cdot \left(\frac{h_0}{2}\right)^2 + \mathcal{O}(h_0^4). \quad (4.51)$$

Um die Koeffizienten von  $h_0^2$ , d. h. bezüglich der zweiten Ordnung, zu berechnen, genügt es folglich nur den ersten Term der Entwicklung zu betrachten. Für  $\mathcal{S}_0^{+1}$  folgt somit als konkrete Darstellung

$$\kappa_0^{+1} = \left( -a_{\mathbf{k}}^2 + B_{\mathbf{k}}^2 + (-\epsilon_{\mathbf{k}} + \hbar\omega)^2 \right) \quad (4.52)$$

und analog für den Fall  $\mathcal{S}_0^{-1}$

$$\kappa_0^{-1} = \left( -a_{\mathbf{k}}^2 + B_{\mathbf{k}}^2 + (-\epsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\omega)^2 \right). \quad (4.53)$$

Werden nun diese Ausdrücke in die Matrix aus (4.43) eingesetzt, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$F_2(h_0) = \det \begin{pmatrix} -\xi_a(h_0) + \xi_\epsilon(h_0) - \xi_\omega(h_0) & -\xi_B(h_0) \\ \xi_B(h_0) & \xi_a(h_0) + \xi_\epsilon(h_0) - \xi_\omega(h_0) \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

mit nachfolgenden Substitutionen:

$$\xi_a(h_0) = a_{\mathbf{k}} \left( \frac{h_0^2}{4} \cdot \frac{2\hbar\omega\epsilon_{\mathbf{k}}}{(B_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}}^2 + (\hbar\omega)^2 - a_{\mathbf{k}})^2 - (2\hbar\omega\epsilon_{\mathbf{k}})^2} + 1 \right), \quad (4.55)$$

$$\xi_B(h_0) = B_{\mathbf{k}} \left( \frac{h_0^2}{4} \cdot \frac{2\hbar\omega\epsilon_{\mathbf{k}}}{(B_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}}^2 + (\hbar\omega)^2 - a_{\mathbf{k}})^2 - (2\hbar\omega\epsilon_{\mathbf{k}})^2} - 1 \right), \quad (4.56)$$

$$\xi_\epsilon(h_0) = \epsilon_{\mathbf{k}} \left( \frac{h_0^2}{4} \cdot \frac{2\hbar\omega\epsilon_{\mathbf{k}}}{(B_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}}^2 + (\hbar\omega)^2 - a_{\mathbf{k}})^2 - (2\hbar\omega\epsilon_{\mathbf{k}})^2} - 1 \right), \quad (4.57)$$

$$\xi_\omega(h_0) = \hbar\omega \left( \frac{h_0^2}{4} \cdot \frac{2\hbar\omega\epsilon_{\mathbf{k}}}{(B_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}}^2 + (\hbar\omega)^2 - a_{\mathbf{k}})^2 - (2\hbar\omega\epsilon_{\mathbf{k}})^2} \right). \quad (4.58)$$

Ausrechnen der Determinante und Sortieren nach Potenzen von  $h_0$  führt zu dem Koeffizienten  $c_2(\epsilon_{\mathbf{k}})$  von  $h_0^2$ , der durch

$$c_2(\epsilon_{\mathbf{k}}) = \frac{a_{\mathbf{k}}^4 - a_{\mathbf{k}}^2 - \epsilon_{\mathbf{k}}^4 - 2\epsilon^2 B_{\mathbf{k}}^2 + (\hbar\omega)^2 \epsilon_{\mathbf{k}}^2 - B_{\mathbf{k}}^4 - B_{\mathbf{k}}^2 (\hbar\omega)^2}{(a_{\mathbf{k}}^2 - B_{\mathbf{k}}^2 - (\hbar\omega - \epsilon_{\mathbf{k}})^2)(a_{\mathbf{k}}^2 - B_{\mathbf{k}}^2 - (\hbar\omega + \epsilon_{\mathbf{k}})^2)} \quad (4.59)$$

beschrieben wird.

Um die Entwicklung der Floquet-Energie bezüglich der zweiten Ordnung Störungstheorie aufstellen zu können, muss der Ausdruck für  $\epsilon_{\mathbf{k},2}$  berechnet werden. Durch die Betrachtung der zu Beginn angegebenen Potenzreihenentwicklung in der zweiten Ordnung

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k},0} + \left(\frac{h_0}{2}\right)^2 \epsilon_{\mathbf{k},2} \quad (4.60)$$

folgt mit den zugehörigen Koeffizienten aus den Kettenbrüchen (4.41) und (4.59) für  $\epsilon_{\mathbf{k},2}$  die Entwicklung

$$\begin{aligned} F_0(\epsilon_{\mathbf{k}}) + \left(\frac{h_0}{2}\right)^2 F_2(\epsilon_{\mathbf{k}}) \\ = -a_{\mathbf{k}}^2 + B_{\mathbf{k}}^2 + \epsilon_{\mathbf{k},0}^2 + 2\epsilon_{\mathbf{k},0}\epsilon_{\mathbf{k},2} \left(\frac{h_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{h_0}{2}\right)^2 F_2(\epsilon_{\mathbf{k},0}) + \mathcal{O}(h_0^4). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Weil die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung betrachtet werden soll, können höhere Potenzen weiterhin vernachlässigt werden und  $\epsilon_{\mathbf{k},2}$  entspricht der Nullstelle von

$$0 = -a_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k},0}^2 + 2\epsilon_{\mathbf{k},0}\epsilon_{\mathbf{k},2} \left(\frac{h_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{h_0}{2}\right)^2 F_2(\epsilon_{\mathbf{k},0}). \quad (4.62)$$

Durch Einsetzen von  $\epsilon_{\mathbf{k},0}$  und Umsortieren folgt der Ausdruck

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mathbf{k},2} &= -\frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k},0}} F_2(\epsilon_{\mathbf{k},0}) \\ &= \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k},0}} \cdot \frac{2B_{\mathbf{k}}^2}{-4\epsilon_{\mathbf{k},0}^2 + (\hbar\omega)^2}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Somit ist die perturbative Entwicklung der Floquet-Energie in der zweiten Ordnung gegeben durch

$$\boxed{\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k},0} \cdot \left(1 + \frac{h_0^2}{4\epsilon_{\mathbf{k},0}^2} \cdot \frac{B_{\mathbf{k}}^2}{(\frac{\hbar\omega}{2})^2 - \epsilon_{\mathbf{k},0}^2}\right)}. \quad (4.64)$$

Diese Approximation erweist sich besonders dann zu treffend, wenn gewährleistet ist, dass

$$\left| \frac{h_0^2}{4\epsilon_{\mathbf{k},0}^2} \cdot \frac{B_{\mathbf{k}}^2}{(\frac{\hbar\omega}{2})^2 - \epsilon_{\mathbf{k},0}^2} \right| \ll 1 \quad (4.65)$$

gültig ist, da so sichergestellt wird, dass die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung ausreichend ist und die Annahme in (4.51) erfüllt ist.

Dass sich daraus ergebende Verhalten ist für verschiedene Größenordnungen der Frequenz dargestellt in Abb. 4.1.

Es ist zu erkennen, dass für die verwendeten Parameter bezüglich um Größenordnungen größerer und kleinerer Frequenzen (relativ zur Dispersionsrelation) keine erkennbaren Abweichungen von der bisherigen Dispersionsrelation auftreten. Für eine Treibfrequenz unterhalb des Minimums, aber von derselben Größenordnung, zeigt sich eine erkennbare Verschiebung der Dispersion zu höherer Energie, besonders deutlich für  $\mathbf{k}$ -Werte im Bereich unterhalb von  $\mathbf{k}_{min}$  zu erkennen.

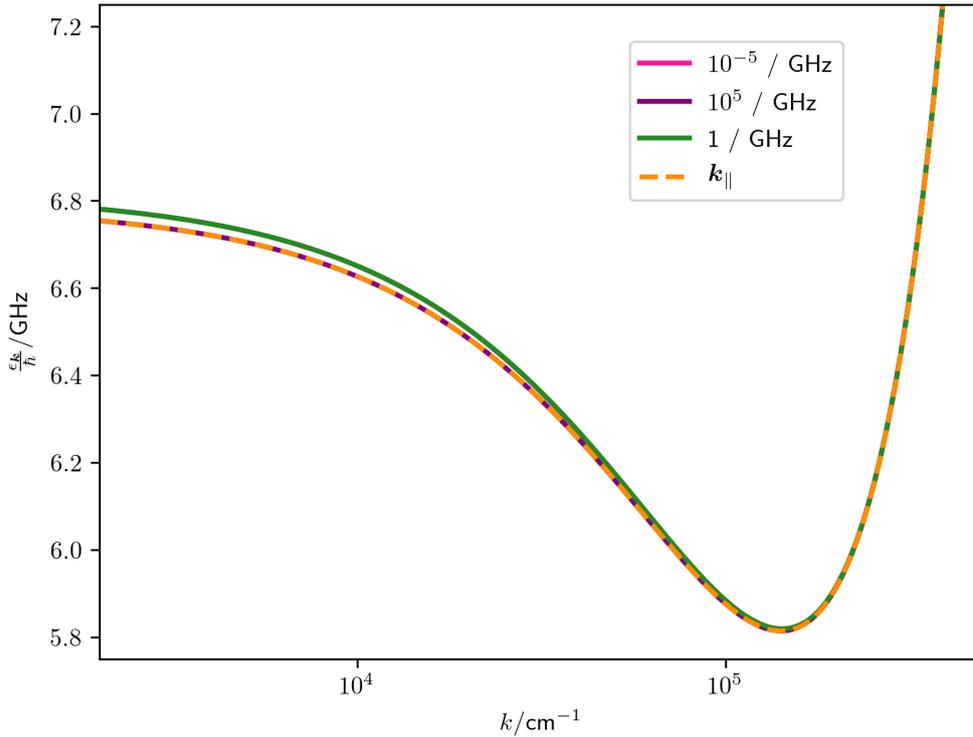


Abbildung 4.1: Die statischen Parameter sind so gewählt, dass das angelegte (konstante) Magnetfeld 1700 Oe und die Dicke des YIG-Films  $0.2 \mu\text{m}$  beträgt. Auf Grundlage von (4.64) werden verschiedene Fälle untersucht: Die Amplitude des treibenden Magnetfeldes beträgt jeweils 850 Oe und die zugehörige Treibfrequenz wird in obiger Legende angegeben.  $k_{||}$  bezeichnet den ungetriebenen Fall.

## 4.5 Parametrische Instabilität

Bei der Betrachtung von (4.64) zeigt sich, dass die zweite Ordnung der Störungstheorie für eine Treibfrequenz von  $\hbar\omega = 2\epsilon_{k,0}$  eine parametrische Instabilität aufweist, welche sich an der Singularität der Floquet-Energie zeigt.

In der experimentellen Untersuchung von YIG-Filmen werden allerdings genau diese Frequenzen verwendet, um Magnonen mit festgelegter Energie und Impuls zu erzeugen, was als parametrisches Pumpen bezeichnet wird und in Abb. 4.2 illustriert wird [15, 31].

Deshalb bietet es sich an, hier eine tiefgründigere Analyse vorzunehmen.

## 4.6 Numerische Berechnung

Neben der Möglichkeit die Kettenbrüche aus (4.38) perturbativ zu behandeln, können diese bis zu einer gewissen Tiefe  $n$  entwickelt werden, um anschließend die Floquet-Energien aus den Nullstellen der Determinante dieser Matrix zu berechnen.

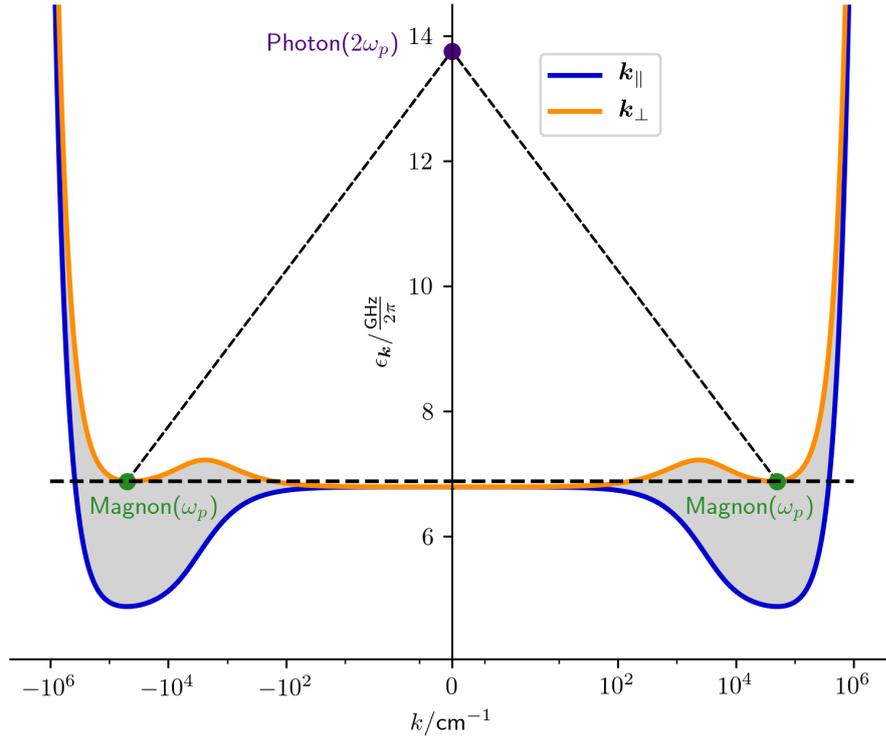


Abbildung 4.2: Darstellung des parametrischen Pumpens: Ein Mikrowellenphoton mit Frequenz  $2\omega_p$  und Impuls  $\approx 0$  zerfällt in zwei Magnonen, die jeweils die Frequenz  $\omega_p$  mit dem zugehörigen Impuls  $\pm\mathbf{k}$  auf Grund von Impuls- und Energieerhaltung besitzen. Im vorliegenden Beispiel wird ein Magnetfeld der Stärke von 1700 Oe betrachtet und eine Dicke des YIG-Films von  $6,7 \mu\text{m}$ .

#### 4.6.1 Verhalten der Quasienergie am Minimum

Ausgehend von einer Treibfrequenz  $\frac{2}{\hbar} \cdot \epsilon_{\mathbf{k}_{min}}$  kann aus physikalischer Sicht, keine Aussage durch den störungstheoretischen Ausdruck über das Verhalten der Quasienergie am Ort des Minimums getroffen werden, weil der Störterm bezüglich der zweiten Ordnung, wie oben erwähnt, divergiert und somit nicht mehr die Voraussetzung (4.65) erfüllt.

Mithilfe des eingangs beschriebenen Vorgehens wird nun numerisch eine Lösung bestimmt:

Zunächst muss hierzu eine ausreichende Tiefe der Entwicklung gewählt werden, so dass sich die Konvergenz abzeichnet, und gleichzeitig sichergestellt werden, dass die numerische Suche nach Nullstellen in einem geeigneten Intervall stattfindet.

Aus Kapitel 3.1 ist bekannt, dass die Floquet-Energie für alle Floquet-Brillouin-Zonen sich äquivalent verhält, weshalb das Intervall <sup>1</sup>

$$\left[ -\epsilon_{\mathbf{k}_{min}}, \epsilon_{\mathbf{k}_{min}} \right) \quad (4.66)$$

auf mögliche Nullstellen untersucht wird.

<sup>1</sup>Offensichtlich könnte auch jede weitere Brillouin-Zone betrachtet werden, die Berechnung für die erste Brillouin-Zone ist allerdings leichter zu implementieren.

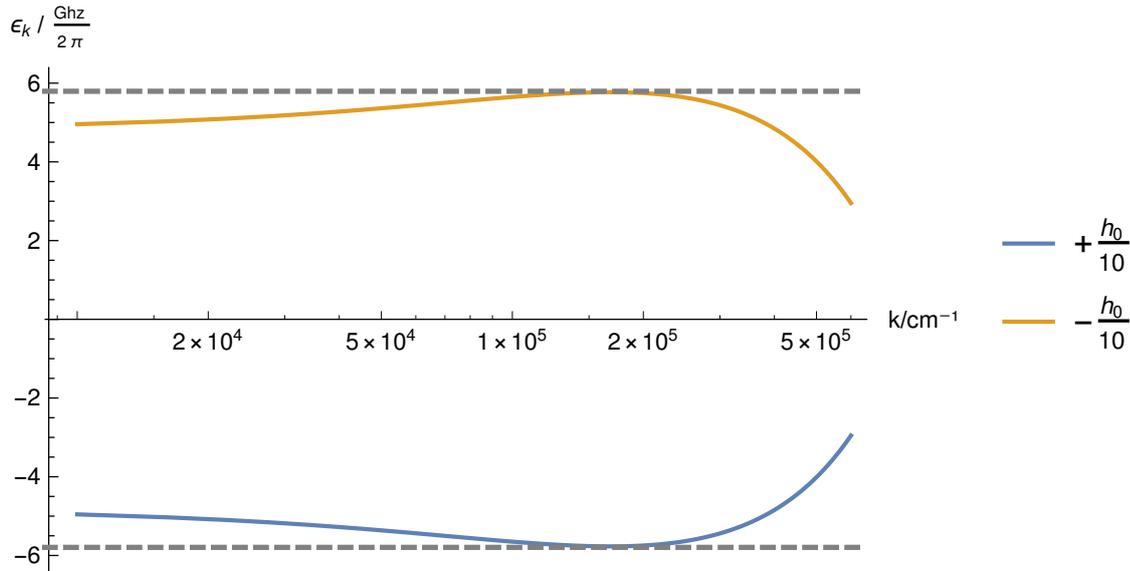


Abbildung 4.3: Für ein konstantes Magnetfeld von 1700 Oe und eine Dicke des YIG-Films von  $0,2 \mu\text{m}$  zeigen sich zwei Lösungen in der ersten Floquet-Brillouin-Zone. Die Treibamplitude besitzt die Magnetfeldstärke von 170 Oe. Die untere Lösung ist hierbei die Gesuchte.

Es ist zu erkennen, dass zwei mögliche Lösungen in der ersten Brillouin-Zone existieren, was graphisch in Abb. 4.3 dargestellt ist. Die untere Lösung ist hierbei die gesuchte Lösung, was auf zwei Gründe zurückzuführen ist:

Einerseits ist die Energie der unteren Lösung niedriger im Vergleich zur oberen, wodurch die Energieminimierung gewährleistet ist.

Des Weiteren wird durch das Abbilden der Dispersionsrelation in die erste Brillouin-Zone deutlich, dass die untere Lösung für eine verschwindende Amplitude  $h_0 \rightarrow 0$  des Magnetfeldes gegen die statische Dispersionsrelation konvergiert, zu sehen in Abb. 4.4.

Aus dieser Abbildung kann ferner die Erkenntnis gewonnen werden, dass durch das periodische Treiben eine Verschiebung der Dispersionsrelation zu höherer Energie stattfindet. Ein partielles Ansteigen der Quasienergie konnte bereits in Abb. 4.1 durch den störungstheoretischen Ansatz dargestellt werden.

Weiterhin ist es von Interesse zu untersuchen, wie sich die Position des Minimums bezüglich  $\mathbf{k}$  verhält.

### 4.6.2 Untersuchung der Position des Minimums

Aus experimenteller Sicht ist es von Interesse die Position des Minimums zu untersuchen [6–10]. Wie in Abb. 4.2 bereits dargestellt wurde, lassen sich durch parametrisches Pumpen Magnonen mit genau definierten Impuls und Energie erzeugen.

Deshalb wird die Position des Minimums unter Einfluss des Treibens mit Frequenz  $\frac{2}{\hbar} \cdot \epsilon_{\mathbf{k}_{\min}}$  betrachtet, da durch das makroskopische Besetzen des dort vorliegenden Grundzustandes ein Bose-Einstein-Kondensat gebildet wird, was für YIG von be-

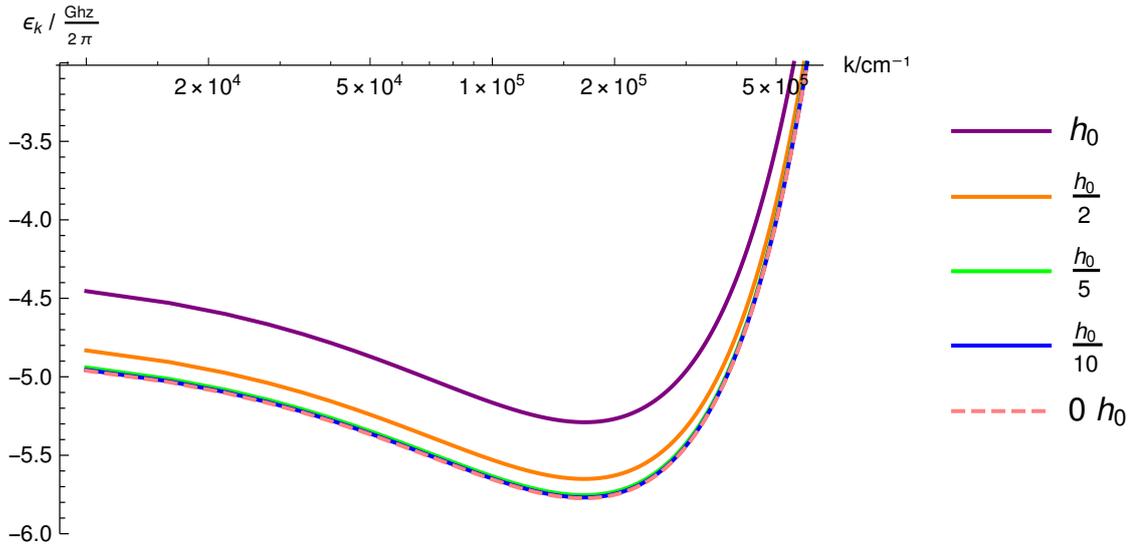


Abbildung 4.4: Die statischen Parameter sind analog zu Abb. 4.3. Zusätzlich ist die Dispersionsrelation für den ungetriebenen Fall zu Vergleichszwecken in die erste Floquet-Brillouin-Zone abgebildet und lässt sich so mit dem getriebenen Fall für verschiedene Amplituden vergleichen.

sonderem Interesse ist, da dies bei Raumtemperatur möglich ist und YIG eine vergleichsweise lange Relaxationszeit besitzt [32]. Die lange Relaxationszeit ist hier von Bedeutung, weil zur Bose-Einstein-Kondensation eine kritische Dichte bei der Besetzung des Grundzustandes überschritten werden muss [6].

Um das Verhalten zu analysieren, erfolgt die Untersuchung des Falls  $h_0 = h$  graphisch in Abb. 4.5.

Als Resultat kann festgehalten werden, dass der  $\mathbf{k}$ -Wert des Minimums unverändert bleibt, einzig die Floquet-Energie des Minimums wird nach oben verschoben.

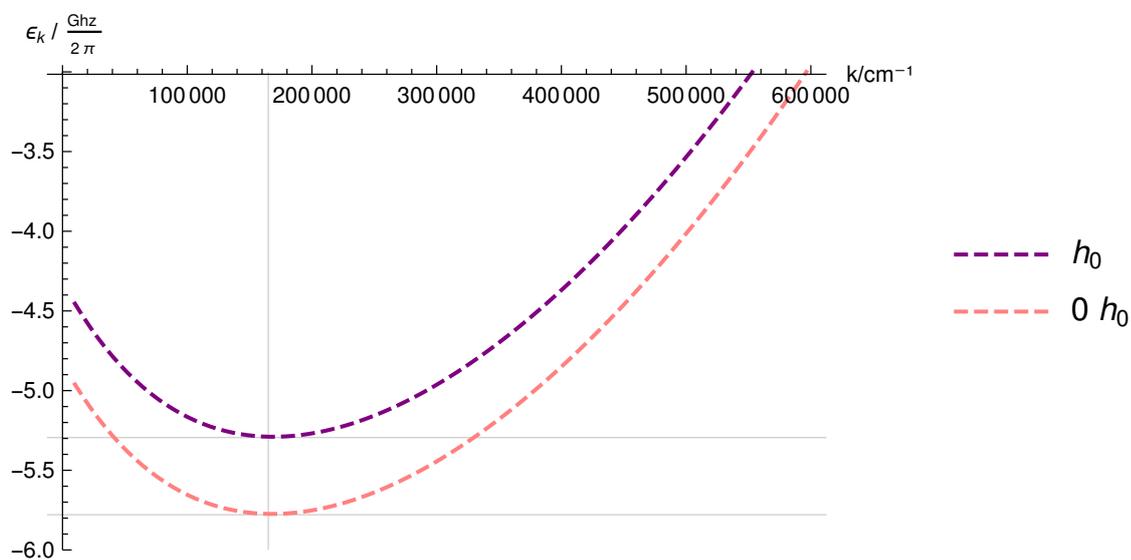


Abbildung 4.5: Analoge Parameter wie in Abb.4.4. Einzig die Skalierung der  $k$ -Achse erfolgt linear, um das Auslesen der Minima zu erleichtern. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Position der Minima übereinstimmt.

# Kapitel 5

## Lokales Treiben

Im Unterschied zum vorherigen Kapitel wird nun eine lokale Störung betrachtet, die sich entlang der  $y$ -Achse ausdehnt und auf einen einzelnen Punkt des Gitters in  $z$ -Richtung beschränkt ist. Die globale Dispersion ändert sich in diesem Fall nicht, viel mehr ist es von Interesse das Transmissionsverhalten durch diese Potentialbarriere zu analysieren.

### 5.1 Hamilton-Operator mit lokalem Störterm

Zur Darstellung des Problems wird der ursprüngliche Hamilton-Operator zweiter Ordnung (2.21) im Ortsraum um einen entsprechenden Störterm erweitert

$$\begin{aligned}\hat{H}(t) &= \hat{H}_2 + \hat{H}^S(t) \\ &= \hat{H}_2 - V_0 \cos(\omega t) \sum_{\gamma} b_{\gamma}^{\dagger} b_{\gamma},\end{aligned}\tag{5.1}$$

wobei die Summe über  $\gamma$  der in Abb. 5.1 dargestellten Geometrie entspricht. Es wird folglich über die einzelnen Gitterpunkte in  $y$ -Richtung summiert.

Das weitere Vorgehen erfolgt zu Beginn analog zum statischen Fall im Impulsraum, indem der ungestörte Hamilton-Operator durch eine Bogoliubov-Transformation diagonalisiert wird.

Im Zuge dessen ist es notwendig, den Störterm durch diese Operatoren darzustellen. Anschließend wird das gesamte Problem zurück in den Ortsraum überführt, um den lokalen Charakter der Störung ausnutzen zu können.

### 5.2 Transformation der Störterme

Analog zum Abschnitt 2.2.2 wird der Hamilton-Operator in den reziproken Raum überführt, mit dem Ziel den ungestörten Hamilton-Operator zu diagonalisieren: Durch die dort vorgestellte Fourier-Transformation (2.23) in Kombination mit der Uniform Mode Approximation (2.26) ergibt sich für den Störterm (Vgl. ausführliche Rechnung A)

$$\hat{H}_{\mathbf{k}}^S(t) = -V_0 \cos(\omega t) \frac{1}{N_x N_z} \sum_{k_y, k_z} \sum_{k'_z} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}'},\tag{5.2}$$



erfüllen müssen. In Übereinstimmung zu [15, 18] lassen sich für die angegebene Bogoliubov-Transformation die zugehörigen Konstanten

$$u_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{A_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}}}, \quad (5.10)$$

$$v_{\mathbf{k}} = \frac{B_{\mathbf{k}}}{|B_{\mathbf{k}}|} \sqrt{\frac{A_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}}} \quad (5.11)$$

ermitteln. Einsetzen in (5.2) liefert schließlich für die Operatoren des Störterms

$$\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}'} = u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}}^{\dagger} \beta_{\mathbf{k}'} + u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}}^{\dagger} \beta_{-\mathbf{k}'}^{\dagger} + v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} \beta_{-\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} \beta_{-\mathbf{k}} \beta_{-\mathbf{k}'}^{\dagger}. \quad (5.12)$$

Dies konnte weiter vereinfacht werden, da obige Konstanten stets reell sind und somit die komplexe Konjugation in (5.5) vernachlässigbar ist.

### 5.2.1 Fourier-Transformation des Hamilton-Operators

Bei dem vorliegenden Verhalten handelt es sich um ein Streuproblem: Wird ein einlaufendes Teilchen, im hier betrachteten Fall ein Magnon, mit dem Impuls  $k_0$  angenommen, das sich auf die Potentialbarriere zu bewegt, so kann es diese transmittieren oder an dieser reflektiert werden.

Um dieses lokale Verhalten durch einen geeigneten Ansatz beschreiben zu können, ausgehend von einem einzelnen Teilchen, muss eine weitere Fourier-Transformation zurück in den Ortsraum durchgeführt werden.

In der hier vorgestellten Geometrie, dass die Ausdehnung der Barriere in  $y$ -Richtung erfolgt, wird nun im Folgenden primär der Fall untersucht, dass die Ausbreitung der Spinwellen in  $z$ -Richtung stattfindet.

Deshalb wird die entsprechende Fourier-Transformation ausschließlich in  $z$ -Richtung durchgeführt. Somit wird eine zu (2.23) inverse Fourier-Transformation

$$\beta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N_z}} \sum_j \beta_{j, k_y} e^{-ik_z r_j} \quad (5.13)$$

aufgestellt, durch die der Hamilton-Operator bezüglich der  $z$ -Richtung zurück in den Ortsraum überführt wird.

Zu beachten ist demzufolge, dass im Vergleich zu den in Abschnitt 2.2.2 definierten Gitterpunkten, die neu eingeführten sich nur in  $z$ -Richtung erstrecken, was auf die Uniform-Mode-Approximation und die auf die  $z$ -Richtung beschränkte Fourier-Transformation zurückzuführen ist. Ferner wird der Einfluss der Potentialbarriere auf Grund der Uniform-Mode-Approximation im Mittel über die Schichten  $N_x$  in  $x$ -Richtung angenommen, was sich an dem Vorfaktor  $\frac{1}{N_x}$  in (5.2) zeigt.

Durch Einsetzen obiger Transformation ergibt sich der Hamilton-Operator

$$\hat{H}(t) = \sum_{k_y} \sum_{i,j} \left( J_j^{k_y} \beta_{i, k_y}^{\dagger} \beta_{i-j, k_y} - V_0 \cos(\omega t) \left( \beta_{i, k_y}^{\dagger} \beta_{j, k_y} U_{j,i}^{k_y} + \beta_i^{\dagger} \beta_{j, k_y}^{\dagger} \tilde{U}_{j,i}^{k_y} \right) \right) \quad (5.14)$$

mit den Substitutionen

$$J_j^{k_y} = \sum_{k_z} \frac{E_{\mathbf{k}}}{N_z} e^{ik_z r_j}, \quad (5.15)$$

$$U_{j,i}^{k_y} = \frac{1}{N_x N_z^2} \sum_{k_z, k'_z} \left( u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} e^{i(k_z r_j - k'_z r_i)} + v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} e^{-i(k_z r_j + k'_z r_i)} \right), \quad (5.16)$$

$$\tilde{U}_{j,i}^{k_y} = \frac{1}{N_x N_z^2} \sum_{k_z, k'_z} \left( v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} e^{-i(k_z r_j + k'_z r_i)} + u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} e^{i(k_z r_j - k'_z r_i)} \right). \quad (5.17)$$

Der eindimensionale Ortsvektor  $r_j$  lässt sich anhand der Gitterkonstante als  $r_j = a \cdot j$  darstellen.

Die Fourier-Transformierte der Dispersionsrelation koppelt von den Gitterpunkten  $i$  in  $z$ -Richtungen zu allen weiteren Gitterpunkten, was durch den Index  $j$  beschrieben wird. Der zugehörige Term  $J_j^{k_y}$  wird im weiteren Verlauf als Kopplungsterm bezeichnet. Dieser Kopplungsterm hängt nicht von  $i$  ab, sondern wird ausschließlich durch den relativen Abstand  $j$  zwischen den jeweiligen Kopplungspartnern bestimmt.

Die Fourier-Transformierte der Potentialbarriere, koppelt analog von den Gitterpunkten  $i$  zu allen weiteren Gitterpunkten, hier ebenfalls dargestellt durch den Index  $j$ . Ferner ist zu beachten, dass im Unterschied zu den Kopplungskonstanten  $J_j^{k_y}$  bei  $U_{j,i}^{k_y}$  und  $\tilde{U}_{j,i}^{k_y}$  zusätzlich eine Abhängigkeit vom betrachteten Gitterpunkt  $i$  besteht.

Dieses im Vergleich zu den anfänglichen Operatoren untypische Verhalten, dass die Barriere mit weiteren Gitterpunkten verknüpft ist, resultiert aus der Einführung der neuen Operatoren  $\beta_i$ , welche zuvor im Impulsraum einer Bogoliubov-Transformation unterzogen wurden. Im Gegensatz hierzu tritt bei den zu Beginn eingeführten Operatoren  $b_i$ ,  $b_j$  die Potentialbarriere nur an den Punkten auf, die in Abb. 5.1 dargestellt sind und es findet zusätzlich keine Kopplung zu weiteren benachbarten Gitterpunkten statt.

Zur konkreten Berechnung wird es im weiteren Verlauf von Relevanz sein, die zugehörigen Summen über  $j$  jeweils nach einer ausreichenden Zahl an Kopplungspartnern abzurechnen, um obige Konstellation geeignet zu approximieren.

Nachdem der Hamilton-Operator zurück in den Ortsraum bezüglich der  $z$ -Richtung überführt wurde, gilt es im Folgenden, wie bereits in Kapitel 4 durch das Anwenden des Satzes von Floquet die Zeitabhängigkeit zu beseitigen.

### 5.3 Anwenden der Floquet-Theorie

Um die Floquet-Theorie besonders einfach anwenden zu können, werden einige Substitutionen zur Verbesserung der Übersichtlichkeit durchgeführt. Der Hamilton-Operator lässt sich durch

$$\hat{H}(t) = \sum_{k_y} \hat{H}_0^{k_y} + 2\hat{H}_1^{k_y} \cos(\omega t) \quad (5.18)$$

darstellen mit den entsprechenden Substitutionen

$$\hat{H}_0^{k_y} = \sum_{i,j} J_j^{k_y} \beta_{i,k_y}^\dagger \beta_{i-j,k_y}, \quad (5.19)$$

$$\hat{H}_1^{k_y} = - \sum_{i,j} \frac{V_0}{2} \left( \beta_{j,k_y}^\dagger \beta_{i,k_y} U_{j,i}^{k_y} + \beta_{i,k_y}^\dagger \beta_{j,k_y} \tilde{U}_{j,i}^{k_y} \right). \quad (5.20)$$

Zusätzlich wird angenommen, dass keine Ausbreitung von Spinwellen in  $y$ -Richtung stattfindet, demzufolge gilt  $k_y = 0$ . Deshalb wird der zugehörige Index im weiteren Verlauf vernachlässigt.

Durch Anwenden des Satzes von Floquet auf den periodischen Hamilton-Operator (5.18) ergibt sich wiederum aus der Fourier-Transformation ein zeitunabhängiges Problem, welches an dieser Stelle in Bra-Ket-Notation

$$\hat{H}_0 |\Phi_n\rangle + \hat{H}_1 (|\Phi_{n-1}\rangle + |\Phi_{n+1}\rangle) = (\epsilon_0 + \hbar\omega n) |\Phi_n\rangle \quad (5.21)$$

angegeben wird.

Der Index  $n \in \mathbb{Z}$  bezeichnet den Floquet-Kanal mit der zugehörigen Fourier-Komponente  $|\Phi_n\rangle$  der Floquet-Mode.

Das Problem lässt sich nun durch den in Aussicht gestellten Ein-Teilchen-Ansatz

$$|\Phi_n\rangle = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha,n} \beta_{\alpha}^\dagger |0\rangle \quad (5.22)$$

approximieren [11].

- $|0\rangle$  bezeichnet den Vakuum-Zustand.
- $\beta_{\alpha}^\dagger$  beschreibt den zugehörigen Erzeugungsoperator für ein einzelnes Teilchen auf dem Gitterpunkt  $\alpha$ .

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in den zeitunabhängigen Hamilton-Operator (5.21) folgt unter Ausnutzen der bosonischen Kommutatorrelationen und der Eigenschaft des Vernichtungsoperators, dass für alle Gitterpunkte  $i$

$$\beta_i |0\rangle = 0 \quad (5.23)$$

erfüllt ist, der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \left( J_j \phi_{i-j,n} \beta_i^\dagger - \frac{V_0}{2} \left( U_{j,i} (\phi_{j,n+1} + \phi_{j,n-1}) \beta_j^\dagger + \sum_{\alpha} \tilde{U}_{j,i} (\phi_{\alpha,n-1} + \phi_{\alpha,n+1}) \beta_i^\dagger \beta_j^\dagger \beta_{\alpha}^\dagger \right) \right) |0\rangle \\ = \sum_{\alpha} (\epsilon_0 + \hbar\omega n) \phi_{\alpha,n} \beta_{\alpha}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Dieser Ausdrucks wird mit  $\langle 0 | \beta_m$  multipliziert, um so auf ein Ein-Teilchen-Problem projiziert zu werden, welches durch

$$\sum_j J_j \phi_{m-j,n} - \frac{V_0}{2} \sum_j U_{j,m} (\phi_{m,n+1} + \phi_{m,n-1}) = (\epsilon_0 + \hbar\omega n) \phi_{m,n} \quad (5.25)$$

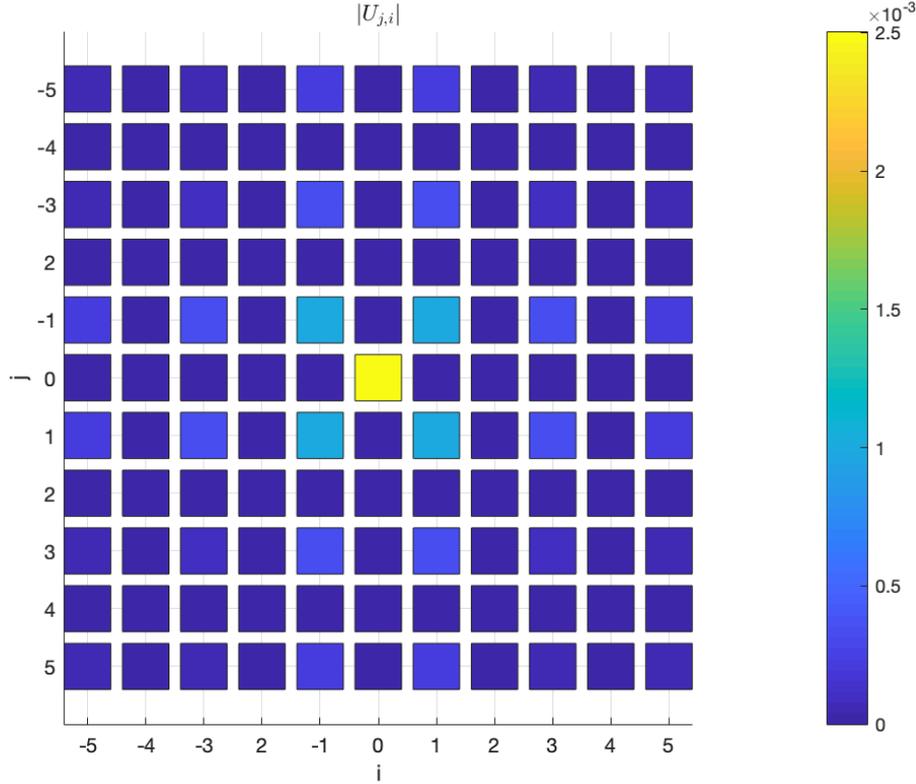


Abbildung 5.2: Abgebildet ist das Verhalten von  $|U_{j,i}|$ . Deutlich zu erkennen der dominierende Term  $U_{0,0}$ . Für präzisere Untersuchungen könnten zusätzlich die Hopping-Terme  $U_{1,1}$ ,  $U_{-1,1}$ ,  $U_{1,-1}$  durch einen erweiterten Ansatz berücksichtigt werden. Die Bestimmung von  $U_{j,i}$  wurde entsprechend Abschnitt 5.3.1 durchgeführt.

gegeben ist und in der weiteren Betrachtung von den zugehörigen Wellenfunktionen  $\phi_{j,n}$  abhängt. Aufgrund der Approximation durch ein Ein-Teilchen-Problem verschwindet erwartungsgemäß der Ausdruck aus den drei Erzeugungsoperatoren.

Als Grundlage für das einlaufendes Teilchen werden ebene Wellen als Ansatz betrachtet, d. h. Lösungen der allgemeinen Form  $\phi_{q,n} \propto e^{ik_n a q}$ , wobei  $a$  die Gitterkonstante von YIG bezeichnet [11].

Im weiteren Verlauf wird die lokale Struktur der Barriere ausgenutzt. Ausgehend von dem eingangs dargelegten Verhalten an der Potentialbarriere, bestehend aus Transmission und Reflexion, gilt es, an dieser Stelle einen geeigneten Ansatz aufzustellen. Vordergründig muss hierzu die Struktur der Potentialbarriere, die aus dem Verhalten der zugehörigen Hopping-Terme  $U_{j,i}$  resultiert, untersucht werden.

Nachfolgend wird angenommen, dass diese Hopping-Terme durch  $U_{j,0}$  approximiert werden können und deshalb weiterhin von einer einzelnen Gitterstelle in  $z$ -Richtung (d. h.  $i = 0$ ) ausgehen, die zu den entsprechenden  $j$  koppelt.

Gemäß (5.17) kommt es allerdings zu weiteren Termen, die hier jedoch als klein gegenüber dem Ausdruck  $U_{j,0}$  mit dem dominierenden Term  $U_{0,0}$  eingestuft werden und somit vernachlässigt sind, was in Abb. 5.2 illustriert wird.

Der allgemeine Ansatz (5.22) lässt sich aufgrund der getroffenen Annahmen für einen

Floquet-Zustand  $n$  durch

$$|\Phi_n\rangle = \sum_{m<0} (\delta_{n,0} e^{ik_0 a m} + r_n e^{-ik_n a m}) \beta_m^\dagger |0\rangle + \xi_n \beta_0^\dagger |0\rangle + \sum_{m>0} t_n e^{ik_n a m} \beta_m^\dagger |0\rangle \quad (5.26)$$

darstellen.

Die Summe ergibt sich für dieses Modell folglich aus den verschiedenen Bereichen in Abb. 5.1:

Betrachtet wird das einlaufende Teilchen für  $m < 0$  zusammen mit den in den jeweiligen Floquet-Kanal  $n$  reflektierten Anteilen. Anschließend folgt der Bereich der Potentialbarriere mit der Amplitude  $\xi_n$  und abschließend der durch die Potentialbarriere transmittierende Anteil  $t_n$  mit  $m > 0$ .

Aus den Stetigkeitsbedingungen an der Potentialbarriere folgt sofort für die entsprechenden Konstanten der Zusammenhang

$$\delta_{n,0} + r_n = t_n = \xi_n \quad (5.27)$$

in Übereinstimmung zu [11].

Die Beziehung zwischen den Wellenfunktionen  $\phi_{m,n}$  werden nun explizit für den Fall  $m = 0$  aufgestellt

$$\sum_j J_j \phi_{-j,n} - \frac{V_0}{2} \sum_j U_{j,0} (\phi_{0,n+1} + \phi_{0,n-1}) = (\epsilon_0 + \hbar\omega n) \phi_{0,n}, \quad (5.28)$$

woraus die Rekursionsgleichung zur Bestimmung von  $\xi_n$  gefolgert werden kann:

Einsetzen des Ansatzes (5.26) in Kombination mit den Stetigkeitsbedingungen (5.27) liefert schließlich die Beziehung

$$\xi_{n+1} + \xi_{n-1} = \frac{(\sum_j J_j e^{ik_n a |j|} - (\epsilon_0 + \hbar\omega n)) \xi_n - \sum_{j<0} 2i \delta_{n,0} \sin(k_0 a j)}{\frac{V_0}{2} \sum_j U_{j,0}} \quad (5.29)$$

für  $\xi_n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ .

Diese Gleichung und die damit verbundene Rekursionsvorschrift gilt es im Folgenden, geeignet zu untersuchen und so die konkrete Berechnung der Transmission vorzunehmen.

### 5.3.1 Approximation der Summen

Zur numerischen Analyse der Rekursionsgleichung müssen zunächst die Kopplungskonstanten und Hopping-Terme bestimmt werden.

Hierzu werden die in (5.17) vorkommenden Summen durch die Betrachtung im thermodynamischen Limes mittels Integration über die erste Brillouin-Zone approximiert [33]. Daraus folgt die Darstellung der Summe über  $k_z$  durch das Integral

$$\sum_{k_z} = \frac{N_z a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dk_z. \quad (5.30)$$

Hieraus ergibt sich sofort für die Terme aus (5.17) die Darstellung als Integral

$$J_j = \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} E_{k_z} e^{ik_z r_j} dk_z, \quad (5.31)$$

$$U_{j,l} = \frac{a^2}{4\pi^2 N_x} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} u_{k_z} u_{k_{z'}} e^{i(k_z r_j - k_{z'} r_i)} + v_{k_z} u_{k_{z'}} e^{-i(k_z r_j + k_{z'} r_i)} dk_z dk_{z'}. \quad (5.32)$$

Die Summe über  $j$  in (5.29) soll durch eine ausreichende Zahl an Summengliedern abgeschätzt werden. Das Verhalten der zugehörigen Summen wird deshalb in Abb. 5.3 und 5.4 dargestellt.

Aus den Abbildungen kann entnommen werden, dass in erster Näherung der Ausdruck  $U_{0,0}$  für  $U_{j,0}$ , sowie die Summen von  $j = -1$  bis  $j = 1$  für  $J_j$  angenommen werden können.

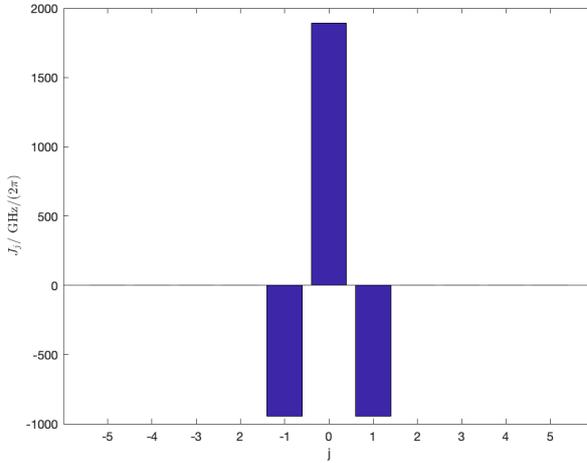


Abbildung 5.3: Abgebildet wird das Verhalten der Kopplungskonstante  $J_j$ , wobei der Parameter  $j$  die Kopplung zu dem entsprechenden Nachbar darstellt. Das Verhalten der diskreten  $J_j$ -Werte zeigt einen raschen Abfall für  $|j| > 1$ , die Terme sind verschwindend klein im Vergleich zu  $J_1$ ,  $J_{-1}$  und  $J_0$ .

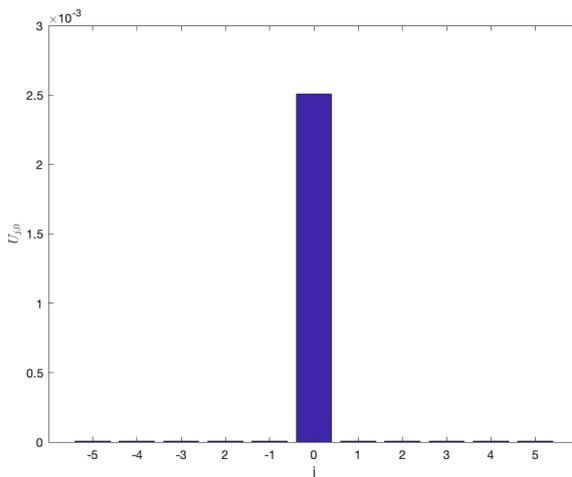


Abbildung 5.4: Hier sind die Hopping-Terme  $U_{j,0}$  dargestellt, die sich aus dem Integral über die Konstanten der Bogoliubov-Transformation ergeben. Es ist deutlich zu erkennen, dass  $U_{j,0}$  für  $j \neq 0$  sehr klein gegenüber  $U_{0,0}$  ist.

Im Folgenden wird die numerische Auswertung der Rekursionsgleichung durchgeführt, um daraus die Transmission durch die Potentialbarriere zu berechnen.

### 5.3.2 Berechnung der Transmission

Durch die Reduzierung auf ein eindimensionales Problem in  $z$ -Richtung wird im Folgenden der Index  $z$  bei den  $k$ -Vektoren aus Gründen der Übersichtlichkeit vernachlässigt werden.

Die totale Transmission kann aus dem Verhältnis der transmittierten Anteile von der gesamten einlaufenden Wahrscheinlichkeitsstromdichte berechnet werden. Hierzu werden alle offenen Kanäle mit der zugehörigen Transmission

$$T = \sum_n T_n = \sum_n |t_n|^2 \frac{\sin(k_n a)}{\sin(k_0 a)} \quad (5.33)$$

berücksichtigt [11]. Werden darüber hinaus die Erhaltung der Wahrscheinlichkeitsstromdichte aus der quantenmechanischen Kontinuitätsgleichung

$$\sin(k_0 a) = \sum_n (|r_n|^2 + |t_n|^2) \sin(k_n a) \quad (5.34)$$

in Kombination mit (5.27) in Betracht gezogen, so folgt schließlich nach einigen Rechenschritten eine vereinfachte Darstellung der totalen Transmission durch [11]

$$T = \operatorname{Re}(\xi_0). \quad (5.35)$$

### 5.3.3 Numerische Berechnung von $\xi_0$

Ziel ist es, das Problem durch ein lineares Gleichungssystem

$$\underline{A}\underline{\xi} = \underline{B} \quad (5.36)$$

der Größe  $n \in \mathbb{N}$  geeignet zu approximieren. Aufgestellt wird hierzu eine quadratische Matrix dieser Größe mit den einzelnen Einträgen

$$A_{m,n} = (\delta_{m,n+1} + \delta_{m,n-1}) \cdot \frac{V_0 \cdot U_{0,0}}{2} - \delta_{m,n} \cdot \left( \sum_{j=-1}^1 J_j e^{ik_n a |j|} - \epsilon_0 - \hbar \omega n \right), \quad (5.37)$$

sowie der Vektor  $\underline{B}$  mit den Einträgen

$$B_n = -2i J_1 \delta_{n,0} \sin(k_0 a), \quad (5.38)$$

jeweils aus der Rekursionsgleichung (5.29) folgend. An dieser Stelle bezeichnet  $\epsilon_0$  die Energie und  $k_0$  den Impuls des einlaufenden Teilchen.

Anhand der getroffenen Näherungen liefert Fourier-Transformieren in den  $k$ -Raum die diesen Näherungen entsprechende Dispersionsrelation

$$J_0 + 2J_1 \cos(k_n a) = \epsilon_0 + n\omega \quad (5.39)$$

mit  $J_1 = J_{-1}$ .

Ziel ist es, die Entwicklung für ein ausreichend großes  $n$  zu betrachten, dass die äußeren Terme von  $\underline{\xi}$  allmählich gegen 0 konvergieren. Hieraus lässt sich dann der Wert  $\xi_0$  auslesen.

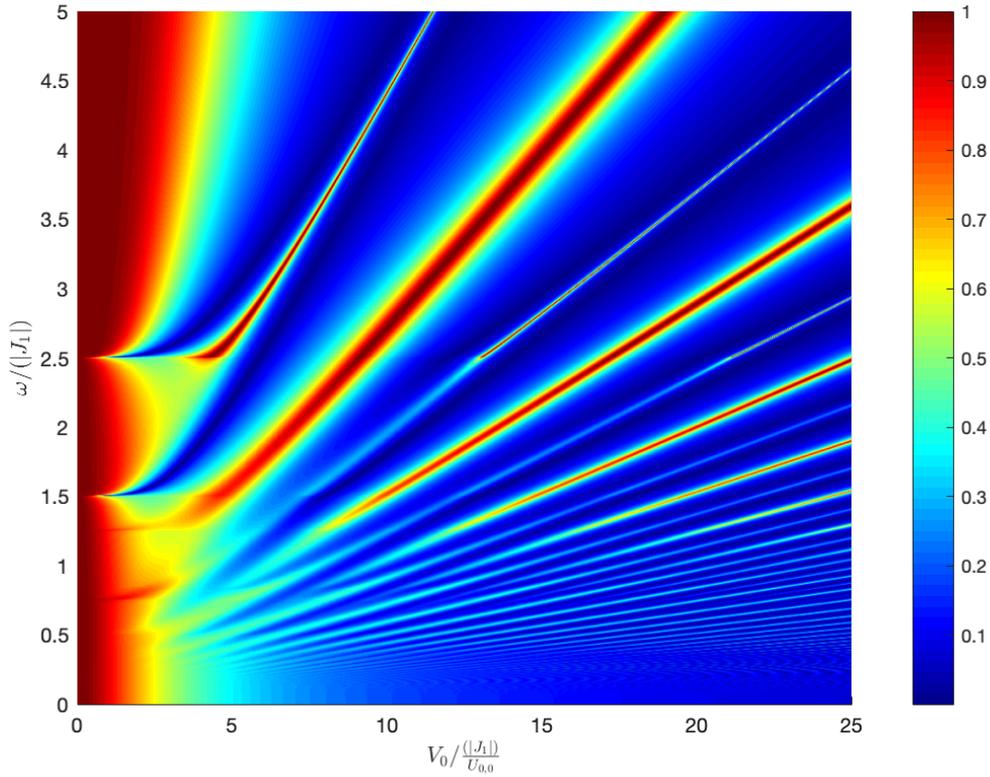


Abbildung 5.5: Das konstante Magnetfeld beträgt 400 Oe und die Dicke des YIG Films entspricht  $400a$  ( $a$  bezeichnet den Gitterabstand). Die Energie  $\epsilon_0$  wurde auf  $\epsilon_0 = \frac{1}{2}J_1 + J_0$  gesetzt. Deutlich zu erkennen ist das Verschwinden der Transmission ausgehend von  $\omega = 1.5|J_1|$  und  $\omega = 2.5|J_1|$ . Das Verschwinden der Transmission ausgehend von einer bestimmten Frequenz unabhängig von der Amplitude der Potentialbarriere wird als Quanten-Resonanz-Katastrophe bezeichnet [11].

In Analogie zur Tight-Binding-Kette in [11] lässt sich das Transmissionsverhalten in Abhängigkeit der Frequenz  $\omega$  und der Störampplitude  $V_0$  untersuchen. Dabei bietet sich die Skalierung der Achsen in Einheiten von  $|J_1|$  und  $\frac{|J_1|}{U_{0,0}}$  an. In Abb. 5.5 erfolgt die Darstellung der Transmission für eine fest gewählte Energie  $\epsilon_0$ .

In dieser Abbildung ist die Quanten-Resonanz-Katastrophe zu erkennen:

Für die Frequenzen  $\omega = 1.5|J_1|$  und  $\omega = 2.5|J_1|$  bildet sich jeweils ein Bereich aus, auf dem die Transmission verschwindet. Das besondere an dieser Stelle ist, dass die Transmission ausgehend von obigen Frequenzen bereits für den Limes der Amplitude der Potentialbarriere gegen null das Verschwinden der Transmission zur Folge hat.

Darüber hinaus kann das Transmissionsverhalten in Abhängigkeit der Energie des einlaufenden Teilchens betrachtet werden:

Auch in diesem Fall ist das Abklingen der Transmission für eine bestimmte Energie  $\epsilon_0 \approx 1.5 \cdot J_1 + J_0$  in Kombination mit der Amplitude  $V_0 = \frac{|J_1|}{U_{0,0}}$  des Störterms zu erkennen, siehe hierzu Abb. 5.6. Auch dieses Verhalten zeigt sich bei der Tight-Binding-Kette [11].

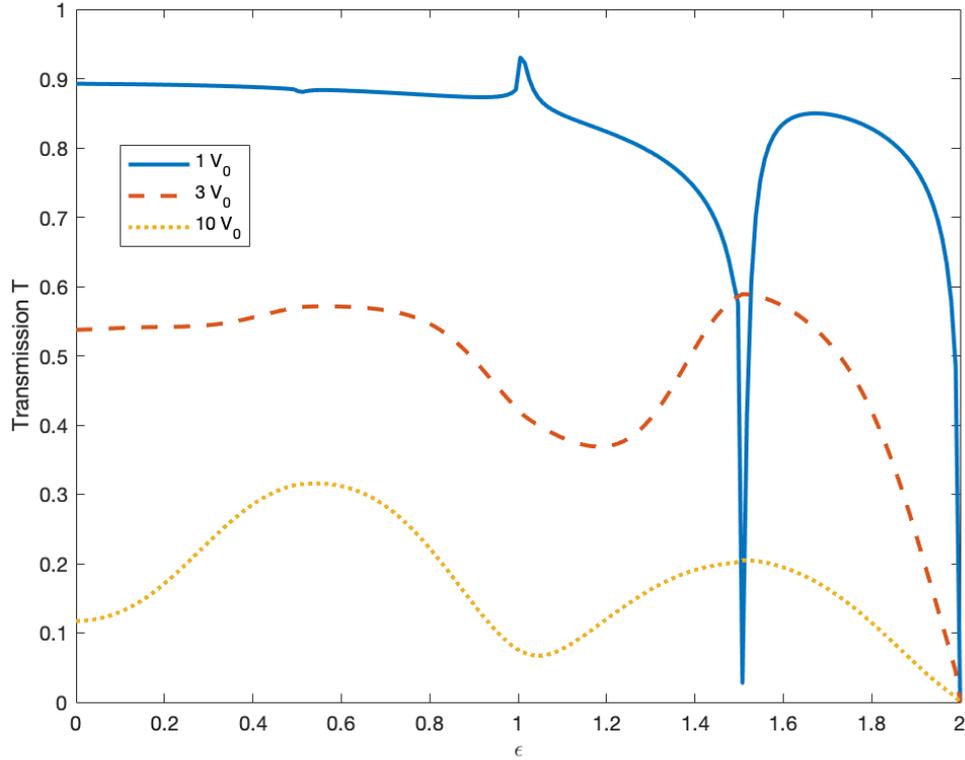


Abbildung 5.6: Die äußeren Parameter sind analog zu 5.5. Hier liegt der Fokus auf der Energie des einlaufenden Teilchens:  $\epsilon_0(\epsilon) = \epsilon \cdot J_1 + J_0$ . Graphisch dargestellt wird die Abhängigkeit der Transmission für verschiedene Amplituden der Barriere mit  $V_0 = \frac{|J_1|}{U_{0,0}}$ .

Die dargestellte Frequenz in 5.5 und 5.6 befindet sich hierbei in der Größenordnung

$$\omega \propto 10^3 \text{ GHz}, \quad (5.40)$$

d. h. diese befindet sich im Bereich der Terahertzstrahlung [34]. Wird ferner die Energieskala für obige Potentialbarriere betrachtet, so wird diese durch

$$V_0 \propto 10^5 \text{ GHz}. \quad (5.41)$$

wiedergegeben. Daraus folgt für die Größenordnung der Magnetfeldstärke

$$\frac{\hbar}{\mu} 10^5 \text{ GHz} \propto 10^8 \text{ Oe} \quad (5.42)$$

aus der zugehörigen Zeemannergie [17, 18]. Ein Magnetfeld dieser Größe übersteigt die experimentell üblichen Größenordnungen deutlich [6].

Aus experimenteller Sicht wäre es folglich von größerer Relevanz, den Bereich um das Minimum der Dispersionsrelation zu betrachten, welches wie anfänglich erwähnt, bei ungefähr  $k_{min} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$  liegt.

Zur weiteren Analyse ist es notwendig, die Bereiche, an denen die oben getroffenen Annahmen keine ausreichende Näherung bieten, festzuhalten:

Aus Abb. 5.7 und 5.8 geht hervor, dass das Minimum nicht durch obige Näherung beschrieben wird, sondern primär das Verhalten im Bezug auf die gesamte Erste Brillouin-Zone approximiert wird. Das Auftreten des Minimums ist hierbei auf zwei

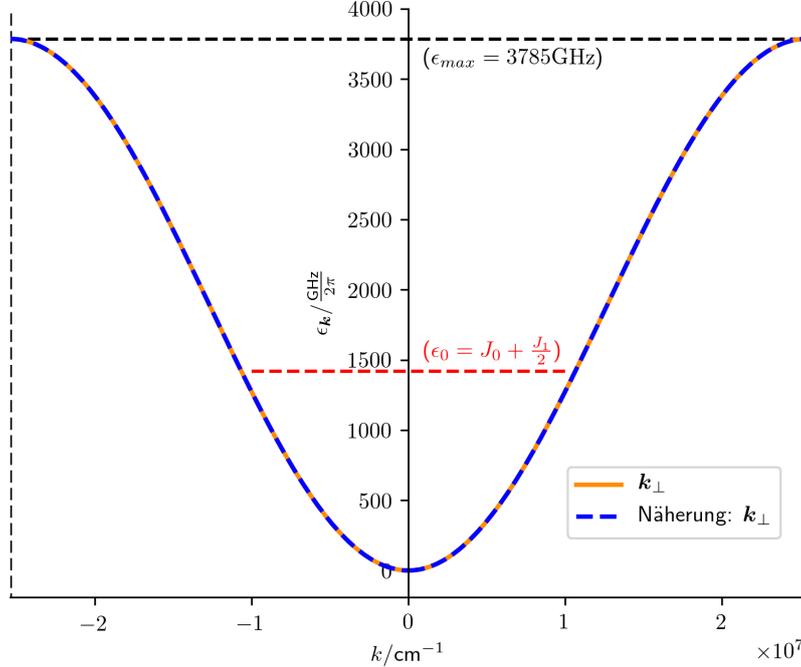


Abbildung 5.7: Abgebildet ist die Dispersionsrelation, die aus der Näherung durch Auswählen von  $J_{-1}$ ,  $J_0$  und  $J_1$  hervorgegangen ist im Vergleich zur Dispersionsrelation aus (2.36). Zusätzlich ist die Energie  $\epsilon_0$  von Abb. 5.5 eingezeichnet. Zu beachten ist deren Größenordnung verglichen mit der des Minimums der Dispersionsrelation aus (2.36). Weiterhin gelten die Parameter aus Abb. 5.5.

Faktoren zurückzuführen:

Ausgehend von den Herleitungen aus Kapitel 2 entsteht das Minimum aus der Überlagerung von Dipol-Dipol-Wechselwirkung und der Austauschwechselwirkung des Heisenberg-Modells, die wiederum auf nächste Nachbarn beschränkt ist.

Dipol-Dipol-Wechselwirkung hingegen zeichnet sich dadurch aus, dass sie besonders langreichweitig ist [13, 17]. Deshalb ist es zur Beschreibung des Minimums nicht ausreichend, die in Abschnitt 5.3.1 motivierten Approximationen vorzunehmen bezüglich der Kopplungskonstante  $J_j$ , die hier auf nächste Nachbarn beschränkt wird. Aus dieser Beschränkung auf nächste Nachbarn folgen gleichzeitig die Gemeinsamkeiten zur Tight-Binding-Kette [11].

Durch diese Beschränkung wird effektiv der Fall betrachtet, dass die Dipol-Dipol-Wechselwirkung vernachlässigbar ist und somit ausschließlich die ferromagnetische Austausch-Wechselwirkung entsprechend (2.3) berücksichtigt wird.

Zusätzlich könnte hier eine weitere Abweichung auftreten für den Fall, dass der Energiebereich aus Abb. 5.5 betrachtet wird:

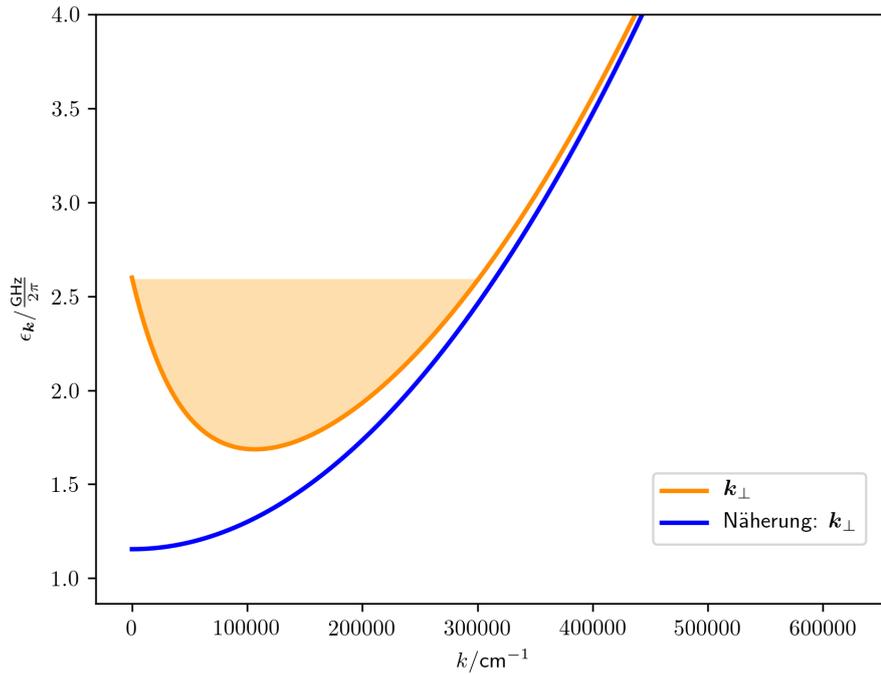


Abbildung 5.8: Zu Erkennen ist hier die Problematik der Näherung: Das Minimum wird nicht dargestellt. In Abb. 5.7 ist zu erkennen, dass die Näherung sich nur auf die gesamte Brillouin-Zone als sinnvoll erweist. Aus experimenteller Sicht ist der eingefärbte Bereich um das Minimum hingegen besonders relevant [6–8, 32].

Den gesamten Annahmen in Kapitel 2.2 liegt die Annahme zu Grunde, dass der Limes niedriger Energien untersucht wird. Die betrachtete Energie des einlaufenden Teilchens liegt hier bei  $\approx 1500$  GHz und somit deutlich über dem Minimum (typischerweise 1-10 GHz), dessen Untersuchung in [15, 17, 18] primär vorgenommen wurde.

Im Folgenden wird deshalb untersucht bis zu welcher Ordnung die Entwicklung fortgesetzt werden muss, um eine geeignete Näherung des Minimums der Dispersionsrelation zu erhalten.

## 5.4 Darstellung des Minimums

Wie bereits in Abb. 5.8 dargestellt wurde, muss eine größere Zahl an Kopplungstermen  $J_j$  berücksichtigt werden. Durch die Berücksichtigung der Kopplung bis zum  $\nu$ -ten Nachbarn mit  $\nu \in \mathbb{N}$  und  $\nu \neq 0$  kann eine Fourier-Zerlegung der Dispersionsrelation angegeben werden durch

$$\epsilon_{\nu}(k_n) = J_0 + 2 \cdot \sum_{\nu_0=1}^{\nu} J_{\nu_0} \cdot \cos(k_n a \nu_0), \quad (5.43)$$

welche die zur jeweiligen Anzahl an Kopplungspartnern entsprechende Dispersionsrelation im  $k$ -Raum darstellt.

Ziel ist es, durch eine geeignete Wahl von  $\nu$ , das Minimum der Dispersionsrelation (2.36) reproduzieren zu können.

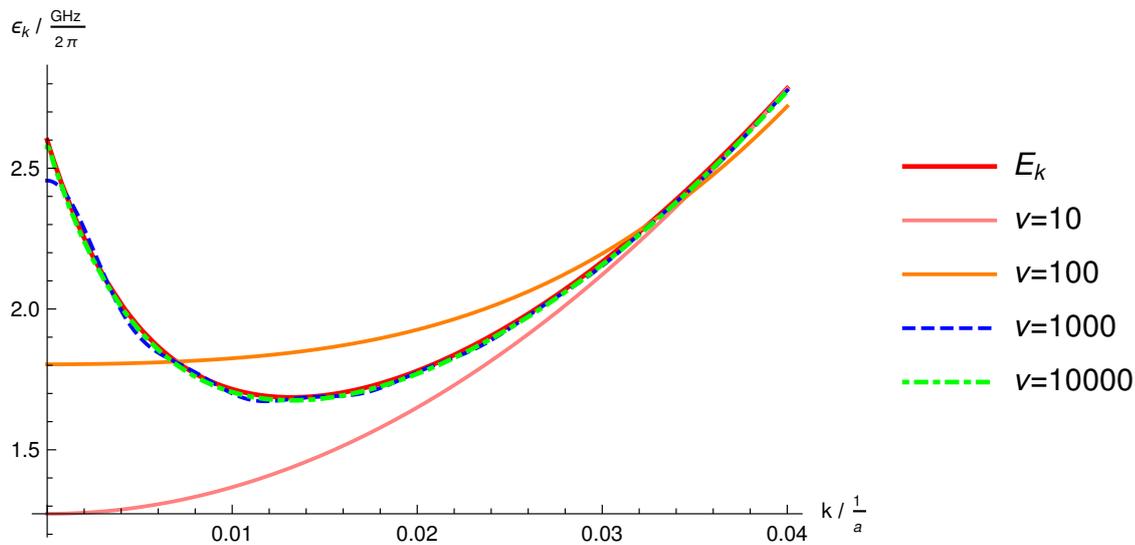


Abbildung 5.9: Abgebildet ist der Bereich unmittelbar um das Minimum.  $E_k$  bezeichnet die Dispersionsrelation aus (2.36) und die jeweiligen  $\nu$  entsprechen denen der Summe (5.43).

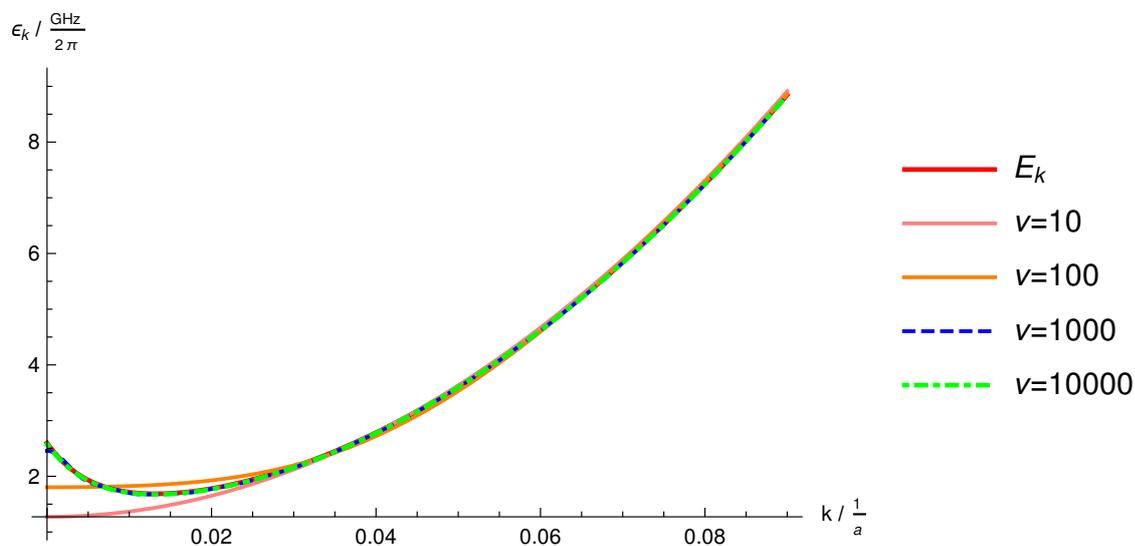


Abbildung 5.10: Zusätzlich zu 5.9 wurde ein größeres Intervall betrachtet, um sicherzustellen, dass außerhalb des Minimums die Übereinstimmung zur Dispersionsrelation (2.36) gegeben ist.

Um dies festzuhalten, wird das Verhalten graphisch untersucht:

Wie aus Abb. 5.9 hervorgeht, zeigt sich bei der Betrachtung der 10 und 100 nächsten Nachbarn eine sehr deutliche Abweichung. Erst bei Berücksichtigung der 1000 nächsten Nachbarn zeichnet sich allmählich die Konvergenz ab. Für 10000 Nachbarn wird das Minimum von (2.36) sehr präzise wiedergegeben.

Ferner zeigt sich aus der Darstellung 5.10, dass die Übereinstimmung auch außerhalb des Minimums weiterhin gegeben ist.

Daraus folgt, dass es möglich wäre, durch diese Anzahl an Kopplungspartnern das Problem in dem Bereich des Minimums mit entsprechender Rechenleistung numerisch zu analysieren.

# Kapitel 6

## Schlussfolgerung und Ausblick

In Kapitel 6.1 werden die Ergebnisse dieser Arbeit dargelegt und anschließend in Kapitel 6.2 ein kurzer Ausblick gegeben.

### 6.1 Schlussfolgerung

Es konnte gezeigt werden, dass sich interessante Effekte unter periodischen Treiben für Magnonen generieren lassen.

Unter globalem Treiben konnte gezeigt werden in Kapitel 4, dass durch die Überführung der Bogoliubov-Transformation in den nicht-statischen Fall eine Veränderung der Dispersion auftritt für Treibfrequenzen im Mikrowellenbereich. Unter Ausnutzen der zeitlichen Periodizität wurde das Vielteilchen-Problem durch den Satz von Floquet analysiert. Hierdurch wurde eine Bogoliubov-Transformation für den Fall periodischer Zeitabhängigkeit aufgestellt. Aus dieser konnte schließlich eine Rekursionsgleichung hergeleitet werden, die anschließend durch matrixwertige Kettenbrüche entwickelt wurde. Diese wurden störungstheoretisch und numerisch untersucht. So konnte final die Erkenntnis gewonnen werden, dass eine Energieverschiebung zu höherer Energie stattfindet.

Der aus experimenteller Sicht interessante Fall des parametrischen Pumpens mit der Frequenz  $\omega = 2\epsilon_{min}$ , wobei  $\epsilon_{min}$  das Minimum der Dispersionskurve bezeichnet, wurde eingehend untersucht:

Hier konnte gezeigt werden, dass die Position des Minimums bezüglich  $k$  unverändert bleibt, auch für den Fall, dass die Treibamplitude die selbe Größenordnung, wie das statische Magnetfeld besitzt. Es zeigte sich einzig ein Anstieg der Quasienergie.

Zusätzlich wurde das lokale Verhalten betrachtet in Kapitel 5. Auch hier konnte eine Rekursionsgleichung hergeleitet werden. Dies wurde ebenfalls durch Floquet-Theorie bewerkstelligt, an dieser Stelle wurde jedoch ein Ein-Teilchen-Ansatz verwendet.

Die Rekursionsgleichung wurde numerisch ausgewertet: Hierzu wurde die Kopplungskonstante approximativ bis zu den nächsten Nachbarn betrachtet.

In der Folge zeigte sich die Quanten-Resonanz-Katastrophe: Bei entsprechender Treibfrequenz  $\omega$  verschwindet bereits für kleine Amplituden der Potentialbarriere die Transmission durch die Barriere. Aufgrund der angenommenen Näherungen wurde aus physikalischer Sicht die Dipol-Dipol-Wechselwirkung vernachlässigt.

Um diese und somit auch das Minimum der Dispersionskurve bei  $k \approx 2 \cdot 10^5 \text{cm}^{-1}$

behandeln zu können, wurde abschließend eine geeignete Approximation vorgestellt, wodurch bei einer ausreichenden Anzahl an Nachbarn, bezüglich derer Wechselwirkung stattfindet, das Minimum darstellbar ist.

## 6.2 Ausblick

Für die zeitabhängige Bogoliubov-Transformation wäre es von Interesse, die zugehörigen Funktionen  $u_{\mathbf{k}}(t)$  und  $v_{\mathbf{k}}(t)$  konkret zu berechnen und so zu überprüfen, ob die Bedingung

$$|u_{\mathbf{k}}(t)|^2 - |v_{\mathbf{k}}(t)|^2 = 1 \quad (6.1)$$

weiterhin erfüllt ist.

In Folge dessen könnte das Verhalten der Magnetisierung unter periodischem Treiben untersucht werden, da aus der Holstein-Primakoff-Transformation der Ausdruck für den Spin-Operator in  $z$ -Richtung

$$S_i^z = S - b_i^\dagger b_i \quad (6.2)$$

folgt.

Des Weiteren wäre es interessant zu untersuchen, welches Verhalten sich für das lokale Treiben zeigen lässt, falls die in Kapitel 5 vorgenommenen Abschätzungen weiter präzisiert werden:

Die konkrete Berechnung des Transmissionsverhaltens durch die Barriere unter Berücksichtigung der Dipol-Dipol-Wechselwirkung wäre eine vielversprechende Erweiterung. Daraus folgt die Möglichkeit das Verhalten des Minimums bezüglich der Quanten-Resonanz-Katastrophe zu untersuchen und so das Vorgehen aus Kapitel 5 fortzusetzen.

Zusätzlich könnte neben dem ausgewählten Index  $U_{0,0}$  zur Approximation der Hopping-Terme die Genauigkeit des Modells erhöht werden, falls weitere Hopping-Terme  $U_{1,1}$ ,  $U_{-1,1}$ ,  $U_{1,-1}$  und  $U_{-1,-1}$  berücksichtigt werden, vergleiche Abb. 6.1.

In diesem Fall müsste das Problem durch einen modifizierten Ansatz behandelt werden.

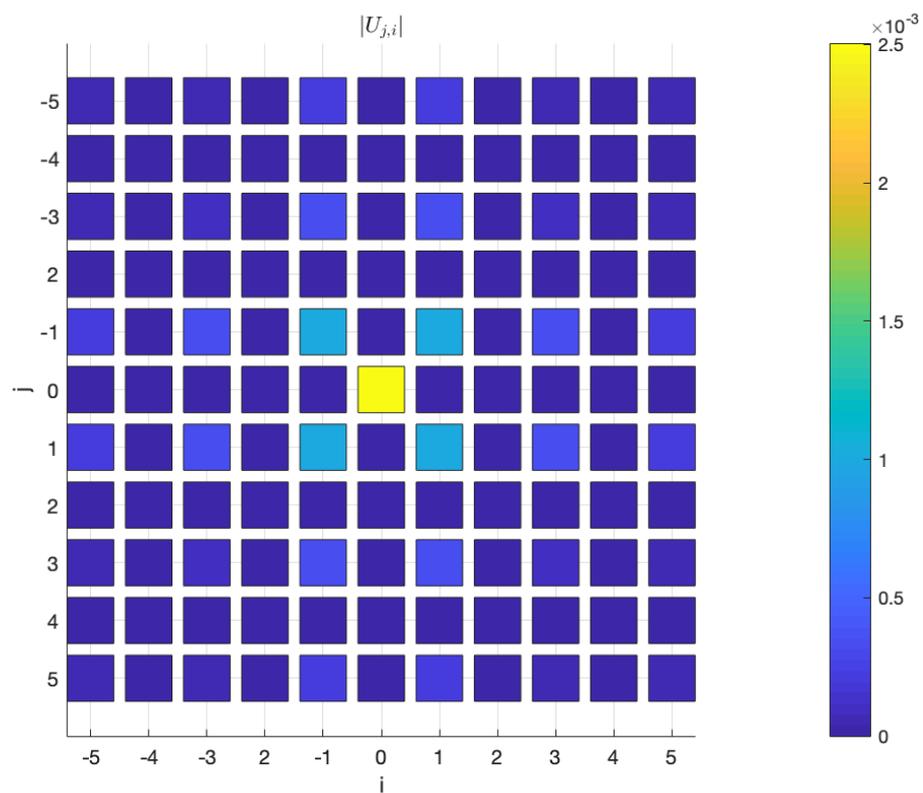


Abbildung 6.1: Dargestellt wurde  $|U_{j,i}|$ . Neben dem verwendeten Hopping-Term  $U_{0,0}$  sind möglicherweise weitere Terme von Interesse: Die Hopping-Terme  $U_{1,1}$ ,  $U_{-1,1}$ ,  $U_{1,-1}$  und  $U_{-1,-1}$  entsprechen der Größenordnung von  $U_{0,0}$ .

# Anhang A

## Fourier-Transformation des lokalen Störterms

In Abschnitt 5.2 ist der Störterm nach der Fourier-Transformation gegeben durch (5.2). An dieser Stelle werden die dazu notwendigen Rechenschritte angeführt: Für die Fourier-Transformation gilt nach (2.23):

$$b_i = \frac{1}{\sqrt{N_y N_z}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i} b_{\mathbf{k}}(x_i) \quad (\text{A.1})$$

Wobei  $\mathbf{k}$  der zwei-dimensionale Wellenvektor mit den zugehörigen Ortsvektoren  $\mathbf{r}_i$  der einzelnen Gitterpunkte in der  $yz$ -Ebene.

Durch die Uniform-Mode-Approximation kann die Abhängigkeit der Operatoren von der  $x$ -Komponente vernachlässigt werden und die Transformation wird erweitert zu

$$b_i = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y N_z}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i} b_{\mathbf{k}}. \quad (\text{A.2})$$

Unter der Annahme, dass sich der Störterm über die gesamte  $y$ -Komponente des YIG-Films ausdehnt, folgt schließlich unter der Annahme periodischer Randbedingungen:

Seien gemäß des vorgestellten Modells,  $N_y$  Gitterpunkte in  $y$ -Richtung, sowie sei  $N_y$  o.B.d.A. eine ungerade Zahl, so lautet die Randbedingung

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i} \Big|_{\mathbf{r}_i = \left(\frac{N_y-1}{2}a, 0\right)^T} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i} \Big|_{\mathbf{r}_i = \left(-\frac{N_y-1}{2}a, 0\right)^T}. \quad (\text{A.3})$$

Hieraus folgt für den Wellenvektor

$$k_y = 2\pi \frac{n_y}{(N_y - 1)a} \quad (\text{A.4})$$

mit  $n_y = -\frac{N_y-3}{2}, \dots, \frac{N_y-1}{2}$ . Das Summenglied  $-\frac{N_y-3}{2}$  bezeichnet bewusst die untere Schranke, da  $-\frac{N_y-1}{2}$  und  $\frac{N_y-1}{2}$  aufgrund der Randbedingungen den selben Zustand beschreiben.

Durch Einsetzen dieser Relationen in den Störterm folgt für die Summation über  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma} b_{\gamma}^{\dagger} b_{\gamma} &= \frac{1}{N_x N_y N_z} \sum_{\gamma} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}r_{\gamma}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} \sum_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}'r_{\gamma}} b_{\mathbf{k}'} \\
&= \frac{1}{N_x N_y N_z} \sum_{\gamma} \sum_{(k_y, k_z), (k'_y, k'_z)} b_{k_y, k_z}^{\dagger} b_{k'_y, k'_z} e^{i(k'_y - k_y)r_{\gamma}^y} e^{i(k'_z - k_z)r_{\gamma}^z} \\
&= \frac{1}{N_x N_y N_z} \sum_{\gamma} \sum_{n_y, n'_y, k_z, k'_z} b_{k_y, k_z}^{\dagger} b_{k'_y, k'_z} e^{i \frac{2\pi(n'_y - n_y)}{(N_y - 1)} \frac{r_{\gamma}^y}{a}} e^{i(k'_z - k_z)r_{\gamma}^z} \\
&= \frac{1}{N_x N_y N_z} \sum_{n_y, n'_y, k_z, k'_z} b_{k_y, k_z}^{\dagger} b_{k'_y, k'_z} (\delta_{n_y, n'_y} N_y) e^{i(k'_z - k_z)r_{\gamma}^z} \\
&= \frac{1}{N_x N_z} \sum_{k_y, k_z, k'_z} b_{k_y, k_z}^{\dagger} b_{k'_y, k'_z} e^{i(k'_z - k_z)r_{\gamma}^z} \\
&= \frac{1}{N_x N_z} \sum_{k_y, k_z, k'_z} b_{k_y, k_z}^{\dagger} b_{k'_y, k'_z} \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Was dem in Abschnitt 5.2 aufgeführten Zusammenhang entspricht. Im zweiten Schritt wurde der aus den Randbedingungen folgende Ausdruck für  $k_y$  eingesetzt. Durch weitere Rechnungen folgt im dritten Schritt, dass  $n_y$  und  $n'_y$  über ein Kronecker-Delta multipliziert mit der Anzahl der Teilchen  $N_y$  in y-Richtung verknüpft sind. Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass  $r_{\gamma}^z = 0$  auf Grund der nicht vorhandenen Ausdehnung in z-Richtung gilt.

# Literatur

- [1] M. El Ghafar u. a. “Dynamical Localization in the Paul Trap”. In: *Phys. Rev. Lett.* 78 (22 Juni 1997), S. 41.
- [2] G. Floquet. “Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques”. fre. In: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 12 (1883), S. 47–88.
- [3] A. V. Chumak u. a. “Magnon spintronics”. In: *Nature Physics* 11 (Juni 2015), S. 453.
- [4] J.R. Christman. *Fundamentals of solid state physics*. Wiley, 1988.
- [5] I. Maksymov und M. Kostylev. “Broadband Stripline Ferromagnetic Resonance Spectroscopy of Ferromagnetic Films, Multilayers and Nanostructures”. In: *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 69 (Mai 2015).
- [6] S. O. Demokritov u. a. “Bose–Einstein condensation of quasi-equilibrium magnons at room temperature under pumping”. In: *Nature* 443 (Sep. 2006), S. 430.
- [7] S.O. Demokritov u. a. “Quantum coherence due to Bose–Einstein condensation of parametrically driven magnons”. In: *New Journal of Physics* 10.4 (Apr. 2008), S. 45.
- [8] O. Dzyapko u. a. “Direct observation of Bose–Einstein condensation in a parametrically driven gas of magnons”. In: *New Journal of Physics* 9.3 (März 2007), S. 64.
- [9] D. Bozhko u. a. *Long-distance supercurrent transport in a room-temperature Bose-Einstein magnon condensate*. Aug. 2018.
- [10] A. Serga u. a. “Bose-Einstein condensation in an ultra-hot gas of pumped magnons”. In: *Nature communications* 5 (März 2014), S. 34.
- [11] D. Thuberg, S. A. Reyes und S. Eggert. “Quantum resonance catastrophe for conductance through a periodically driven barrier”. In: *Phys. Rev. B* 93 (18 Mai 2016), S. 18.
- [12] W. Heisenberg. “Zur Theorie des Ferromagnetismus”. In: *Zeitschrift für Physik* 49.9 (Sep. 1928), S. 619–636.
- [13] N. W. Ashcroft und N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Cengage, 1975.
- [14] W. Nolting. *Quantentheorie des Magnetismus 1*. Vieweg+Teubner Verlag, 1986.
- [15] A. Rückriegel. “Magnetoelastic interactions and condensation of magnons in yttrium-iron garnet films”. Diss. 2016, S. 135.

- [16] V. Cherepanov, I. Kolokolov und V. L'vov. "The saga of YIG: Spectra, thermodynamics, interaction and relaxation of magnons in a complex magnet". In: *Physics Reports* 229.3 (1993), S. 81–144.
- [17] A. Kreisel u. a. "Microscopic spin-wave theory for yttrium-iron garnet films". In: *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* 71 (Sep. 2009), S. 59–68.
- [18] A. Kreisel. "Spin-wave calculations for Heisenberg magnets with reduced symmetry". Diss. 2011, S. 189.
- [19] A. Kreisel u. a. "Spin-waves in Yttrium-iron garnet". English. In: *Europhysics News* 40.6 (Juni 2009).
- [20] T. Kloss, A. K. und P. Kopietz. "Parametric pumping and kinetics of magnons in dipolar ferromagnets". In: *Phys. Rev. B* 81 (10 März 2010), S. 43.
- [21] B. R. Tittmann. "Possible identification of magnetostatic surface spin wave modes in ferromagnetic resonance on epitaxial yttrium-iron-garnet films". English (US). In: *Solid State Communications* 13.4 (Aug. 1973), S. 463–466.
- [22] A.G. Gurevich und G.A. Melkov. *Magnetization Oscillations and Waves*. CRC Press, Boca Ration, 1996.
- [23] W. Nolting. *Quantentheorie des Magnetismus 2*. Vieweg+Teubner Verlag, 1986.
- [24] C. Dauer. "Tuning of Scattering Properties by Periodic Modulation". Diplomarbeit. TU Kaiserslautern, 2018.
- [25] Grifoni M. und P. Hänggi. "Driven quantum tunneling". In: *Physics Reports* 304.5 (1998), S. 229.
- [26] M. Holthaus. "Floquet engineering with quasienergy bands of periodically driven optical lattices". In: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 49.1 (Nov. 2015), S. 13.
- [27] A. Eckardt. "Colloquium: Atomic quantum gases in periodically driven optical lattices". In: *Rev. Mod. Phys.* 89 (1 März 2017), S. 30.
- [28] S. Eggert. "One-dimensional quantum wires: A pedestrian approach to bosonization". In: (Aug. 2007).
- [29] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics*. Springer US, 2012.
- [30] C. Simmendinger. "Untersuchung von Instabilitäten in Systemen mit zeitlicher Verzögerung". Diplomarbeit. Universität Stuttgart, 1995.
- [31] A. A. Serga u. a. "Brillouin light scattering spectroscopy of parametrically excited dipole-exchange magnons". In: *Phys. Rev. B* 86 (13 Okt. 2012), S. 134403.
- [32] D. Bozhko u. a. "Supercurrent in a room-temperature Bose–Einstein magnon condensate". In: *Nature Physics* 12 (Aug. 2016), S. 1057.
- [33] Nolting W. und Ramakanth A. *Quantum Theory of Magnetism*. Springer Verlag, 2009.
- [34] Demtröder W. *Experimentalphysik 2*. Springer Verlag, 2013.

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich denen Danken die mich beim Anfertigen dieser Arbeit unterstützt haben.

Zunächst möchte ich mich besonders bei meinem Betreuer Prof. Dr. Sebastian Eggert bedanken, dass mir die Gelegenheit gegeben wurde, in seiner Gruppe diese Arbeit anfertigen zu dürfen und ich jederzeit auf seine Unterstützung bei auftretenden Problemen bauen durfte.

Darüber hinaus danke ich Priv. Doz. Dr. habil. Axel Pelster für die zahlreichen Diskussionen in denen er mir bei Verständnisproblemen weiterhalf und weitere Denkanstöße lieferte.

Besonders danke ich Christoph Dauer für den großen Aufwand und die Kompetenz, mit der er mich fortlaufend bei Problemen und Unklarheiten unterstützte.

Auch den restlichen Mitgliedern der AG Eggert danke ich außerordentlich für die vielen hilfreichen Konversationen.

Zusätzlich danke ich Dennis Lönard für das Korrekturlesen der Arbeit.

Außerdem bedanke ich mich ganz besonders bei meinen Eltern, dass sie immer ein offenes Ohr für meine Probleme haben und ihre Unterstützung bei meinem Werdegang.

# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet, sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Kaiserslautern, den 26. März 2019

André Becker