

Bogoliubov-Theorie Dipolarer Bose-Gase bei endlichen Temperaturen

im Fachbereich Physik der

Universität Bielefeld



Universität Bielefeld

eingereichte

Bachelorarbeit

von

Tomasz Chęcinski

Betreuer und Erstgutachter: Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster

Zweitgutachter: Prof. Dr. Thomas Dahm

Bielefeld, den 27.10.2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Historischer Überblick	3
1.2	Aufbau der Bachelorarbeit	4
2	Bogoliubov-Theorie	7
2.1	Bosonen im Fock-Raum	7
2.2	Hamilton-Operator eines Bose-Gases	9
2.3	Bogoliubov-Transformation	11
2.4	Thermodynamisches Potential	15
3	Landau-Theorie	17
3.1	Variationsprinzip	17
3.2	Kondensatentleerung	20
3.3	Grundzustandsenergie	21
3.4	Bogoliubov-Dispersionsrelation	22
4	Dipolares Bose-Gas bei tiefen Temperaturen	25
4.1	Kontakt- und Dipol-Dipol-Wechselwirkung	25
4.2	Relative Wechselwirkungsstärke	26
4.3	Grundzustandsenergie	29
4.4	Kondensatentleerung	31
4.5	Gültigkeitsbereich der Theorie	33
4.6	Freie Energie	35
4.7	Ableitungen der freien Energie	37
4.8	Superfluide Dichte	38
5	Schallgeschwindigkeiten	43
5.1	Ergebnisse des Zwei-Flüssigkeiten-Modells	43
5.2	Zustandsgrößen für die Schallgeschwindigkeiten	45
5.3	Kopplung der ersten zwei Schallgeschwindigkeiten	47
6	Zusammenfassung und Ausblick	51
	Literaturverzeichnis	55

1 Einleitung

In einem kurzen historischen Überblick sollen die Entwicklung der Theorien und einige Experimente dargestellt werden, die für diese Bachelorarbeit von wesentlicher Bedeutung sind. Damit soll die Motivation für die Betrachtung eines Bose-Gases mit einer Dipol-Dipol-Wechselwirkung betont werden, was der Gegenstand dieser Arbeit ist. Anschließend wird die Vorgehensweise erläutert, mit der die Betrachtungen dieses Systems durchgeführt wird.

1.1 Historischer Überblick

Das Bose-Einstein-Kondensat (BEC) ist ein Aggregatzustand, der bei tiefen Temperaturen nahe dem absoluten Nullpunkt in Erscheinung tritt. Dabei besetzt ein makroskopischer Anteil der Teilchen eines Gases den quantenmechanischen Grundzustand, was zu einer Kondensation führt. Die theoretische Grundlage schuf zum Einen S.N. Bose, der sich mit der Ununterscheidbarkeit von Photonen, also masselosen Bosonen, beschäftigte [1] und zum Anderen sagte A. Einstein im Jahr 1924 für massive Bosonen eine kritische Temperatur für den Phasenübergang voraus [2]. Diese Erkenntnisse führten zu dem Forschungsgebiet der ultrakalten Bose-Gase, die mit der Bose-Einstein-Statistik beschrieben werden.

Im Jahr 1938 entdeckte P. Kapitza die superfluide Eigenschaft im Helium-II [3] nach der Unterschreitung einer kritischen Temperatur von 2,17 K. Die Superfluidität zeichnet sich durch die Abwesenheit der Reibung bzw. Viskosität aus. Allerdings befand sich im Helium-II neben der superfluiden Flüssigkeit noch eine normalfluide, was zu der Entwicklung des Zwei-Flüssigkeiten-Modells von L. Tisza [4] und L. Landau [5] im Jahr 1941 führte. Das Phänomen der Superfluidität wurde im Jahr 1938 von G. London [6] mit dem BEC in Verbindung gebracht. Doch die theoretisch vorhergesagte kritische Temperatur lag bei 3,1 K. Die Ursache für diesen Unterschied war die starke Wechselwirkung zwischen den Heliumatomen, die die Temperatur des Phasenübergangs senkte. Einen Ansatz für die Einbeziehung der Wechselwirkung in die Berechnungen schuf N. Bogoliubov im Jahr 1941 [7], in dem ein Bose-Gas mit einer Kontaktwechselwirkung in der Zweiten Quantisierung betrachtet wurde.

Ein technischer Durchbruch auf dem Gebiet der ultrakalten Quantengase gelangen C.E. Wieman und E. Cornell [8] sowie W. Ketterle [9], indem sie in Rubidium- und in Natriumdämpfen einen Phasenübergang von einem gasförmigen Zustand in das BEC im Jahr 1995 erzeugten, wofür sie im Jahr 2001 den Nobelpreis in Physik erhielten. Bei diesen Atomen ist jedoch die Wechselwirkung im Gegensatz zu Helium-II näherungsweise vernachlässigbar.

1 Einleitung

Inzwischen konnten weitere Elemente in den Zustand des BEC gebracht werden, wie die Atome aus der ersten Elementengruppe: Wasserstoff [10], Lithium [11], Kalium [12] und Caesium [13], die neben der kurzreichweitigen Kontaktwechselwirkung auch eine schwache magnetische Dipol-Dipol-Wechselwirkung besitzen. Vom besonderen Interesse ist auch das Element Chrom, das sich stark dipolar verhält und das im Jahr 2005 in den Zustand des BEC gebracht wurde [14]. Es ist gerade auch gelungen, das Element Dysprosium zu kondensieren [15], dessen Dipol-Dipol-Wechselwirkung noch stärker als bei Chrom ausgeprägt ist. Die besondere Eigenschaft der Dipol-Dipol-Wechselwirkung ist neben der langen Reichweite die Anisotropie. Die Wechselwirkung ist abhängig von der Ausrichtung der Atome zueinander und kann sich sowohl attraktiv als auch repulsiv verhalten.

Einen weiteren Schritt stellen Bose-Einstein-Kondensate dar, bei denen das Bose-Gas aus heteronuklearen Molekülen besteht. Im rovibratorischen Grundzustand besitzen diese heteronuklearen Moleküle ein elektrisches Dipolmoment, so dass es zu einer Dipol-Dipol-Wechselwirkung kommt, die noch stärker ist als die zwischen magnetischen Dipolen. Die ersten Experimente dazu wurden mit Hilfe der *Stimulated Raman Adiabatic Passage*-Methode (STIRAP) im Jahr 2009 an RbK-Molekülen durchgeführt [16]. Allerdings konnte damit noch kein BEC erzeugt werden, da sich die RbK-Moleküle als chemisch instabil erwiesen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Theorie für ein homogenes Bose-Gas mit einer Dipol-Dipol-Wechselwirkung zu entwickeln. Ein homogenes ultrakaltes Gas ist experimentell zwar nicht zu verwirklichen, doch die Behandlung dieses Systems kann als ein Anfangspunkt für die Beschreibung von Bose-Gasen im Labor dienen, die in einer harmonischen Falle gefangen sind. Dabei stützen sich die Betrachtungen auf die Doktorarbeit von A.R.P. Lima [17] und auf die Veröffentlichung [18]. In diesen Arbeiten wird die Bogoliubov-Theorie für ein homogenes Bose-Gas mit einer Dipol-Dipol-Wechselwirkung bei $T = 0$ entwickelt. Diese Theorie soll in dieser Bachelorarbeit für $T \geq 0$ verallgemeinert werden, wodurch viele hier gewonnene Ergebnisse im Limes $T \rightarrow 0$ mit den Arbeiten [17, 18] verglichen werden können. Zusätzlich werden die Ergebnisse der Bachelorarbeit von C. Wille [19] genutzt, um das System anhand des Zwei-Flüssigkeiten-Modells zu charakterisieren.

1.2 Aufbau der Bachelorarbeit

Diese Bachelorarbeit lässt sich inhaltlich in zwei Teile unterteilen. Der erste Teil umfasst die Kapitel 2 und 3, in denen die theoretische Grundlage für ein Bose-Gas mit einer allgemeinen Wechselwirkung geschaffen wird. Der zweite Teil besteht aus den Kapiteln 4 und 5, die sich sowohl mit der Kontakt- als auch mit der Dipol-Dipol-Wechselwirkung befassen. Außerdem wird in den zwei Kapiteln eine Tieftemperaturentwicklung für die betrachteten thermodynamischen Größen durchgeführt.

Im Kapitel 2 werden kurz der Begriff der Zweiten Quantisierung im Hinblick auf die Bosonen erläutert und der Hamilton-Operator für dieses System aufgestellt. Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt in der schon oben erwähnten Bogoliubov-Theorie, die das Bose-Gas im kondensierten Zustand beschreibt und den Hamilton-Operator diagonalisiert. Damit

kann anschliessend eine Zustandssumme im großkanonischen Ensemble aufgestellt werden, woraus ein effektives Potential gewonnen werden kann.

Das effektive Potential kann im Kapitel 3 mit Hilfe der Landau-Theorie für Phasenübergänge zweiter Ordnung [20] dazu genutzt werden, thermodynamische Zustandsgrößen zu berechnen. Hierfür spielt die Gleichgewichtsbedingung eine besonders wichtige Rolle, die eine Extremalisierung des effektiven Potentials zu Folge hat. Zusätzlich werden die Terme, die aus den Quantenfluktuation und aus den thermischen Fluktuationen resultieren, störungstheoretisch behandelt.

Im Kapitel 4 wird eine spezielle Wechselwirkung eingeführt, die sich aus der Kontakt- und der Dipol-Dipol-Wechselwirkung zusammensetzt. Dann wird der Übergang zum thermodynamischen Limes eingeleitet, bei dem Integrale auftreten, die analytisch nicht lösbar sind und die daher in einer Tieftemperaturentwicklung ausgewertet werden. Die Potenzreihenentwicklung wird bis zur achten Potenz in der Temperatur durchgeführt; aus der dann berechneten Kondensatentleerung kann eine Abschätzung für den Gültigkeitsbereich der Bogoliubov-Theorie erfolgen.

Kapitel 5 befasst sich mit den ersten zwei Schallgeschwindigkeiten, die aus dem Zwei-Flüssigkeiten-Modell resultieren. Dabei wird diskutiert, inwieweit sich die anisotrope Wechselwirkung auf die Schallwellen und inwieweit sich die Temperaturentwicklung beim Zusammenspiel der beiden Schallwellen auswirkt.

Im Kapitel 6 werden die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf eine mögliche Fortführung der Betrachtungen gegeben.

2 Bogoliubov-Theorie

Nach einer kurzen Einführung in die Zweite Quantisierung, die auf dem Fock-Raum beruht, wird der Hamilton-Operator des zu behandelnden Systems aufgestellt. Dieser ist wegen des Wechselwirkungsterms quartisch in den Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren und kann durch die Annahme einer großen Teilchenzahl im Grundzustand auf die Wechselwirkung zwischen den angeregten Teilchen mit den kondensierten Teilchen eingeschränkt werden. Zusätzlich wird die c -Zahl-Näherung eingeführt, die den Hamilton-Operator in einer quadratischen Form darstellen lässt. Dieser ist jedoch nicht diagonal, so dass eine lineare Transformation der Operatoren zur Diagonalisierung benötigt wird. Hierfür werden Quasiteilchen eingeführt, die wegen der Linearität der Transformation das ursprüngliche System repräsentieren. Zum Schluss liegt ein diagonaler Hamilton-Operator vor, der einer Summe von Oszillatoren gleicht. Deshalb ist es möglich, die Zustandssumme zu berechnen, aus der ein thermodynamisches Potential gewonnen werden kann.

2.1 Bosonen im Fock-Raum

Die quantenstatistische Behandlung von Bosonen beruht auf dem Prinzip der Ununterscheidbarkeit von identischen Teilchen. Dabei muss nach dem Spin-Statistik-Theorem von Pauli [21] die Spin-Quantenzahl der gegebenen Teilchen betrachtet werden. Die Bosonen besitzen einen ganzzahligen Spin, wobei dieser mit dem Planck'schen Wirkungsquantum \hbar multipliziert wird. Somit unterliegen die Bosonen nicht dem Pauli-Prinzip und die Wellenfunktion eines Vielteilchenzustands muss symmetrisch unter Vertauschung von zwei Teilchen untereinander sein. Diese Symmetrie führt zu der Bose-Einstein-Statistik und erlaubt die gleichzeitige Besetzung eines Einteilchenzustands mit mehreren Teilchen. Letztendlich ermöglicht gerade diese Eigenschaft eine makroskopische Anzahl an Bosonen, die den Grundzustand besetzen können.

Die Darstellung eines Vielteilchensystems ist über die Zweite Quantisierung bzw. über den Fock-Raum zu wählen. Hierfür werden Feldoperatoren $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ und $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})$ eingeführt, die als Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren interpretiert werden können. Angewandt auf den Vakuumzustand vernichten bzw. erzeugen sie ein Teilchen am Ort \mathbf{x} . Aufgrund der oben genannten Symmetrie genügen diese Operatoren den bosonischen Kommutatorrelationen:

$$\left[\hat{\psi}(\mathbf{x}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}') \right]_- = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \left[\hat{\psi}(\mathbf{x}), \hat{\psi}(\mathbf{x}') \right]_- = \left[\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}') \right]_- = 0. \quad (2.1)$$

2 Bogoliubov-Theorie

Darüber hinaus kann der Einteilchendichteoperator über die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren definiert werden:

$$\hat{n}(\mathbf{x}) = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Diese Feldoperatoren können bei einem homogenen System mit Hilfe der Fourier-Transformation in den Impulsraum überführt werden, wobei \mathbf{k} den quantisierten Wellenvektor darstellt. Die Transformation erfolgt also über eine diskrete Summe

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \hat{b}_{\mathbf{k}}, \quad (2.3)$$

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger, \quad (2.4)$$

wobei V das Volumen des Raumes bezeichnet.

Hierbei ergeben sich neue Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ und $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$, die jeweils ein Teilchen mit dem Wellenvektor \mathbf{k} vernichten bzw. erzeugen. Durch eine geeignete Fourier-Rücktransformation und unter der Verwendung von (2.1) können die bosonischen Kommutatorrelationen auch für diese Operatoren bestimmt werden:

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \right]_- = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad \left[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'} \right]_- = 0 = \left[\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \right]_-. \quad (2.5)$$

Der Zustand eines Vielteilchen-Systems ist über die Besetzungszahl der Einteilchenzustände \mathbf{k} gegeben [22, S. 55]:

$$|\phi\rangle = |N_{\mathbf{k}^0}, N_{\mathbf{k}^1}, \dots\rangle. \quad (2.6)$$

Damit lässt sich der Erwartungswert des Einteilchendichteoperators (2.2)

$$n(\mathbf{x}) = \langle \phi | \hat{n}(\mathbf{x}) | \phi \rangle \quad (2.7)$$

wie folgt definieren

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}) &= \langle \phi | \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x}) | \phi \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\mathbf{k}'\mathbf{x}} \langle \phi | \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} | \phi \rangle \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Aufgrund der vorausgesetzten Homogenität des Systems besitzt diese Dichte keine Ortsabhängigkeit. Desweiteren ist es auch wichtig, wie sich die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren angewendet auf den Zustand $|\phi\rangle$ verhalten:

$$\langle \phi | \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} | \phi \rangle = N_{\mathbf{k}}, \quad (2.9)$$

$$\hat{b}_{\mathbf{k}'} | N_{\mathbf{k}^0}, N_{\mathbf{k}^1}, \dots, N_{\mathbf{k}'}, \dots \rangle = \sqrt{N_{\mathbf{k}'}} | N_{\mathbf{k}^0}, N_{\mathbf{k}^1}, \dots, N_{\mathbf{k}'} - 1, \dots \rangle, \quad (2.10)$$

$$\hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger | N_{\mathbf{k}^0}, N_{\mathbf{k}^1}, \dots, N_{\mathbf{k}'}, \dots \rangle = \sqrt{N_{\mathbf{k}'} + 1} | N_{\mathbf{k}^0}, N_{\mathbf{k}^1}, \dots, N_{\mathbf{k}'} + 1, \dots \rangle. \quad (2.11)$$

2.2 Hamilton-Operator eines Bose-Gases

Das in dieser Arbeit behandelte Bose-Gas lässt sich durch einen Hamilton-Operator kennzeichnen, der aus vier einzelnen Einteilchenoperatoren besteht: kinetische Energie, Boost mit der Geschwindigkeit \mathbf{w} , chemisches Potential und Zweiteilchenwechselwirkung. Der Boost wird benötigt, um die superfluide Dichte von der normalfluiden zu unterscheiden, dabei ist \mathbf{w} die Differenzgeschwindigkeit zwischen den beiden Dichten [23, S. 131]. Das chemische Potential ermöglicht eine Vorgehensweise im großkanonischen Ensemble, durch welches die Teilchendichte aus dem thermodynamischen Potential zugänglich wird. Die Zweiteilchenwechselwirkung wird hier noch allgemein gehalten, später wird diese auf die Kontaktwechselwirkung und die Dipol-Dipol-Wechselwirkung spezialisiert:

$$\hat{H}_{\text{kin}} = - \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \hat{\psi}(\mathbf{x}), \quad (2.12)$$

$$\hat{H}_{\text{boost}} = \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \frac{\hbar}{i} \mathbf{w} \nabla \hat{\psi}(\mathbf{x}), \quad (2.13)$$

$$\hat{H}_\mu = - \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \mu \hat{\psi}(\mathbf{x}), \quad (2.14)$$

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}') V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\psi}(\mathbf{x}') \hat{\psi}(\mathbf{x}). \quad (2.15)$$

Der gesamte Hamilton-Operator ergibt sich aus der Addition der einzelnen Operatoren

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{kin}} + \hat{H}_{\text{boost}} + \hat{H}_\mu + \hat{H}_{\text{int}} \quad (2.16)$$

und kann in der Fourier-Darstellung der Feldoperatoren (2.3) und (2.4) aufgestellt werden:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + \hbar \mathbf{w} \mathbf{k} - \mu \right) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}}. \quad (2.17)$$

Hierbei ist die Wechselwirkung $V_{\mathbf{q}}$ die Fourier-Transformierte von $V(\mathbf{x})$:

$$V_{\mathbf{q}} = \frac{1}{V} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} V(\mathbf{x}). \quad (2.18)$$

2 Bogoliubov-Theorie

Der Wechselwirkungsterm in (2.17), also $V_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}}$, beschreibt einen Prozess, bei dem zwei Teilchen mit den Impulsen \mathbf{k} und \mathbf{k}' den Impuls \mathbf{q} austauschen. Die Impulserhaltung ist dabei zwangsläufig durch die Fourier-Darstellung in den Operatoren gegeben. Zunächst werden zwei Teilchen mit den Impulsen \mathbf{k} und \mathbf{k}' vernichtet und dann werden zwei Teilchen mit den Impulsen $\mathbf{k} - \mathbf{q}$ und $\mathbf{k}' + \mathbf{q}$ erzeugt.

Der Hamilton-Operator ist hier noch ganz allgemein gefasst und auch wenn die Wechselwirkung im Einzelnen angegeben werden kann, lässt sich dieser nur näherungsweise behandeln. Daher werden wir uns auf Bose-Gase bei tiefen Temperaturen beschränken, die im Rahmen der Bogoliubov-Theorie beschrieben werden.

Für kleine Temperaturen ist anzunehmen, dass die Anzahl der Teilchen im Grundzustand sehr groß ist, so dass für den Erwartungswert des Einteilchenzustands $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ gilt:

$$\langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{0}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{0}} | 0 \rangle = N_0 \gg 1, \quad (2.19)$$

und damit:

$$N_0 \pm 1 \approx N_0. \quad (2.20)$$

Die Wechselwirkung zwischen den Bosonen im kondensierten Zustand dominiert also den Wechselwirkungsterm, dagegen werden die Operatoren $\hat{b}_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}}$ und $\hat{b}_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}}^\dagger$ als eine Störung angesehen. Aus dieser Annahme kann der Hamilton-Operator (2.17) für ein wechselwirkendes Bose-Gas genähert werden [22, S. 62]. Hierzu werden Wechselwirkungsterme bis zur zweiten Ordnung in $\hat{b}_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}}$ betrachtet:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2V} V_0 \hat{b}_{\mathbf{0}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{0}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{0}} \hat{b}_{\mathbf{0}} - \mu \hat{b}_{\mathbf{0}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{0}} + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + \hbar \mathbf{w} \mathbf{k} - \mu \right) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \\ &+ \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} (V_0 + V_{\mathbf{k}}) \hat{b}_{\mathbf{0}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{0}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \\ &+ \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} V_{\mathbf{k}} \left(\hat{b}_{\mathbf{0}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{0}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{0}} \hat{b}_{\mathbf{0}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right) + \mathcal{O}(b_{\mathbf{k}}^3). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dabei können Terme in erster Ordnung in $\hat{b}_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}}$ wegen der oben diskutierten Impulserhaltung nicht auftreten.

Aus der Annahme der großen Anzahl an Bosonen im Grundzustand (2.19) werden die Operatoren $\hat{b}_{\mathbf{0}}$ und $\hat{b}_{\mathbf{0}}^\dagger$ durch eine c -Zahl ersetzt:

$$\hat{b}_{\mathbf{0}} = \hat{b}_{\mathbf{0}}^\dagger = \sqrt{N_0}. \quad (2.22)$$

Zusammen mit der Kondensatdichte $n_0 = N_0/V$ ergibt sich eine in den Operatoren $\hat{b}_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}}$ quadratische Form:

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & V n_0 \left(\frac{n_0}{2} V_0 - \mu \right) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu + n_0 (V_0 + V_{\mathbf{k}}) \right] \left(\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hbar \mathbf{w} \mathbf{k} \left(\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} - \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}} \right) \\
 & + \frac{n_0}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} V_{\mathbf{k}} \left(\hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right) + \mathcal{O}(b_{\mathbf{k}}^3) .
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass sich der Hamilton-Operator (2.23) durch eine Bogoliubov-Transformation diagonalisieren lässt.

2.3 Bogoliubov-Transformation

Um den Hamilton-Operator zu diagonalisieren, wird eine lineare Transformation der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren durchgeführt. Dabei werden neue Quasiteilchen eingeführt, die sogenannten Bogolons [23, S. 42], die allerdings keine physikalische Interpretation besitzen. Zunächst soll nur die Definition angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 \hat{B}_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger , \\
 \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger &= u_{\mathbf{k}}^* \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger + v_{\mathbf{k}}^* \hat{b}_{-\mathbf{k}} .
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Wegen der Linearität der Transformation wird die Teilchenzahl bewahrt und die Energieniveaus werden nicht verändert. Auch die Eigenschaften von Bosonen sollen hier erhalten bleiben, wobei aber die zwei Bogoliubov-Parameter u und v noch unbestimmt sind. Die erste Bedingung an diese Parameter ist also die bosonische Natur der Teilchen, die sich wie in (2.5) in den Kommutatorrelationen widerspiegelt. Zunächst erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} &= \left[\hat{B}_{\mathbf{k}}, \hat{B}_{\mathbf{k}'}^\dagger \right]_- = \left[u_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger, u_{\mathbf{k}'}^* \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger + v_{\mathbf{k}'}^* \hat{b}_{-\mathbf{k}'} \right]_- \\
 &= (u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}^* - v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'}^*) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \\
 \Rightarrow 1 &= |u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2 ,
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

außerdem folgt

$$\begin{aligned}
 \left[\hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{B}_{\mathbf{k}'}^\dagger \right]_- &= 0 = \left[\hat{B}_{\mathbf{k}}, \hat{B}_{\mathbf{k}'} \right]_- \\
 &= \left[u_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger, u_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{-\mathbf{k}'}^\dagger \right]_- \\
 &= (u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} - u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}}) \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} \\
 \Rightarrow 0 &= u_{\mathbf{k}} v_{-\mathbf{k}} - u_{-\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} .
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

2 Bogoliubov-Theorie

Für eine weitere Interpretation kann hier wegen der Gleichung (2.25) ein Ansatz über die Hyperbolicusfunktionen gewählt werden:

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{k}} &= e^{i\alpha_{\mathbf{k}}} \cosh \phi_{\mathbf{k}}, \\ v_{\mathbf{k}} &= e^{i\beta_{\mathbf{k}}} \sinh \phi_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Einsetzen von (2.27) in (2.26) führt auf

$$e^{i(\alpha_{\mathbf{k}} - \alpha_{-\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{k}} + \beta_{-\mathbf{k}})} \cosh \phi_{\mathbf{k}} \sinh \phi_{-\mathbf{k}} = \cosh \phi_{-\mathbf{k}} \sinh \phi_{\mathbf{k}}. \quad (2.28)$$

Aus dieser Bedingung können erste Einschränkungen der Linearkoeffizienten ermittelt werden. Zum Einen gilt hier bis auf ein Vielfaches von 2π eine Phasenbeziehung:

$$\alpha_{\mathbf{k}} - \alpha_{-\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{k}} + \beta_{-\mathbf{k}} = 0, \quad (2.29)$$

zum Anderen ergibt sich aus den Additionstheoremen für Hyperbolicusfunktionen eine Achsensymmetrie des Rotationswinkels:

$$\begin{aligned} \cosh \phi_{\mathbf{k}} \sinh \phi_{-\mathbf{k}} - \cosh \phi_{-\mathbf{k}} \sinh \phi_{\mathbf{k}} &= \sinh(\phi_{\mathbf{k}} - \phi_{-\mathbf{k}}) = 0 \\ \Leftrightarrow \phi_{\mathbf{k}} &= \phi_{-\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Um den Hamilton-Operator (2.23) in Abhängigkeit der neuen Quasiteilchen darzustellen, wird eine Rücktransformation benötigt. Aus der Definition der Transformation (2.24), dem Ansatz (2.27) und der Phasenbeziehung (2.29) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\mathbf{k}} &= e^{-i(\alpha_{-\mathbf{k}} - \alpha_{\mathbf{k}})} \left(u_{-\mathbf{k}}^* \hat{B}_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} \hat{B}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right), \\ \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger &= e^{i(\alpha_{-\mathbf{k}} - \alpha_{\mathbf{k}})} \left(u_{-\mathbf{k}} \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger - v_{\mathbf{k}}^* \hat{B}_{-\mathbf{k}} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die Rücktransformation kann nun in den Hamilton-Operator (2.23) eingesetzt werden. Dieser ist wegen der Linearität der Transformation quadratisch in den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{B}_{\mathbf{k}}$ und $\hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger$, enthält aber noch nichtdiagonale Terme:

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & V n_0 \left(\frac{n_0}{2} V_0 - \mu \right) \\
 & + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left\{ \left[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu + n_0 (V_0 + V_{\mathbf{k}}) \right] |v_{\mathbf{k}}|^2 - \frac{n_0}{2} V_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} + u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^*) \right\} \\
 & + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left\{ \left[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu + n_0 V_0 \right] (|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2) + n_0 V_{\mathbf{k}} |u_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}}|^2 \right\} \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{k}} \\
 & - \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left\{ \left[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu + n_0 (V_0 + V_{\mathbf{k}}) \right] u_{-\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} - \frac{n_0}{2} V_{\mathbf{k}} (u_{-\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + v_{-\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}) \right\} \hat{B}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \\
 & - \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left\{ \left[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu + n_0 (V_0 + V_{\mathbf{k}}) \right] u_{-\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^* - \frac{n_0}{2} V_{\mathbf{k}} (u_{-\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^* + v_{-\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^*) \right\} \hat{B}_{-\mathbf{k}} \hat{B}_{\mathbf{k}} \\
 & + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hbar \mathbf{w} \mathbf{k} \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{k}}. \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

Die Diagonalisierung des Hamilton-Operators erfolgt durch eine geeignete Wahl der Bogoliubov-Parameter u und v , was die zweite Bedingung an diese darstellt. Der Hamilton-Operator (2.32) wird diagonal, wenn gilt:

$$\left[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu + n_0 (V_0 - V_{\mathbf{k}}) \right] u_{-\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} = \frac{n_0}{2} V_{\mathbf{k}} (u_{-\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + v_{-\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}). \tag{2.33}$$

Zunächst kann aus dieser Bedingung wieder eine Phasenbeziehung abgeleitet werden. Der Ansatz (2.27) und die schon bekannte Phasenbeziehung (2.29) führen auf:

$$\alpha_{\mathbf{k}} = \beta_{\mathbf{k}}. \tag{2.34}$$

Hieran ist die sogenannte U(1)-Eichsymmetrie erkennbar. Diese besagt, dass der Zustand beim Phasenübergang in ein Bose-Einstein-Kondensat eine beliebige allgemeine Phase annimmt. Diese Symmetriebrechung beruht auf der Erhaltung der Teilchenzahl [23, S. 11] und ist charakteristisch für alle Bose-Einstein-Kondensate.

Außerdem führt die zweite Bedingung (2.33) zur exakten Bestimmung der Bogoliubov-Parameter. Aus den Additionstheoremen der Hyperbolicusfunktionen kann jetzt aus (2.33) mit (2.34) der Rotationswinkel $\phi_{\mathbf{k}}$ bestimmt werden:

$$X := \tanh 2\phi_{\mathbf{k}} = \frac{n_0 V_{\mathbf{k}}}{\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu + n_0 (V_0 + V_{\mathbf{k}})}. \tag{2.35}$$

Über die Identität für den area tangens hyperbolicus [24, S. 168]

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \operatorname{artanh} X = \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt{\frac{1+X}{1-X}} \right) \tag{2.36}$$

2 Bogoliubov-Theorie

kann der voranstehende Ausdruck weiter vereinfacht werden und zusammen mit der Definition (2.35) ergibt sich für den Winkel:

$$\phi_{\mathbf{k}} = \ln \left(\sqrt{\frac{E_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}} \right), \quad (2.37)$$

mit der Bogoliubov-Dispersionsrelation:

$$E_{\mathbf{k}} := \sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + 2n_0 V_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}}, \quad (2.38)$$

wobei die freie Dispersion

$$\epsilon_{\mathbf{k}} := \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu + n_0 V_0. \quad (2.39)$$

als Abkürzung verwendet wird.

Jetzt können die Koeffizienten der Bogoliubov-Transformation in Abhängigkeit von $\epsilon_{\mathbf{k}}$ und $E_{\mathbf{k}}$ angegeben werden:

$$u_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} e^{i\alpha_{\mathbf{k}}} \frac{E_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}}}, \quad (2.40)$$

$$v_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} e^{i\alpha_{\mathbf{k}}} \frac{E_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}}}. \quad (2.41)$$

Diese Parameter erfüllen die Bedingung der kanonischen Kommutatorrelationen und diagonalisieren den Hamilton-Operator (2.32). Der daraus resultierende Hamilton-Operator ist:

$$\hat{H} = \tilde{\epsilon}_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \tilde{E}_{\mathbf{k}} \hat{N}_{\mathbf{k}}, \quad (2.42)$$

wobei die folgenden Abkürzungen verwendet werden:

$$\tilde{\epsilon}_0 = V n_0 \left(\frac{n_0}{2} V_0 - \mu \right) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (E_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - n_0 V_{\mathbf{k}}), \quad (2.43)$$

$$\tilde{E}_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} + \hbar \omega_{\mathbf{k}}, \quad (2.44)$$

$$\hat{N}_{\mathbf{k}} = \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{k}}. \quad (2.45)$$

In diesem Hamilton-Operator treten nun keine Wechselwirkungsterme, also keine quartischen Terme in den Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren, auf und schließlich ist dieser auch diagonal, was eine Aufstellung einer Zustandssumme und damit die weitergehende Behandlung über die Thermodynamik ermöglicht.

2.4 Thermodynamisches Potential

Der Hamilton-Operator (2.42) gleicht wegen (2.45) in seiner Form einer Summe von harmonischen Oszillatoren. Ausgehend von dieser Struktur kann die Zustandssumme im großkanonischen Ensemble aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \right) = e^{-\beta \tilde{\epsilon}_0} \text{Tr} \left(e^{-\beta \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \tilde{E}_{\mathbf{k}} \hat{N}_{\mathbf{k}}} \right) \\ &= e^{-\beta \tilde{\epsilon}_0} \prod_{\mathbf{k} \neq 0} \sum_{N_{\mathbf{k}}=0}^{\infty} e^{-\beta \tilde{E}_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}} = e^{-\beta \tilde{\epsilon}_0} \prod_{\mathbf{k} \neq 0} \sum_{N_{\mathbf{k}}=0}^{\infty} \left(e^{-\beta \tilde{E}_{\mathbf{k}}} \right)^{N_{\mathbf{k}}}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Die Summe über die Teilchenzahl $N_{\mathbf{k}}$ kann mit Hilfe der geometrischen Reihe [24] ausgeführt werden:

$$Z = e^{-\beta \tilde{\epsilon}_0} \prod_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{1 - e^{-\beta \tilde{E}_{\mathbf{k}}}}. \quad (2.47)$$

Für das effektive Potential $V_{\text{eff}} = -\frac{1}{\beta} \ln Z$ ergibt sich dann:

$$V_{\text{eff}} = \tilde{\epsilon}_0 + k_B T \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \ln \left(1 - e^{-\beta \tilde{E}_{\mathbf{k}}} \right). \quad (2.48)$$

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass das Extremum dieses effektiven Potentials bezüglich der Kondensatdichte entsprechend der Landau-Theorie mit dem thermodynamischen Potential zu identifizieren ist.

3 Landau-Theorie

Die thermodynamische Behandlung des Systems kann durch die Landau-Theorie, die Phasenübergängen zweiter Ordnung behandelt, ermöglicht werden. Da unser System eine $U(1)$ -Eichsymmetrie aufweist, kann ein Phasenübergang zweiter Ordnung angenommen werden [25]. Diese Eichsymmetrie bezieht sich auf die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die im Hamilton-Operator (2.17) immer paarweise vorkommen, wobei diese Eigenschaft bis zum Hamilton-Operator (2.42) bestehen bleibt. Besonders ist die Kondensatdichte n_0 zu betrachten, denn diese wird erst bei der Abkühlung des Bose-Gases und beim Unterschreiten der kritischen Temperatur T_c kontinuierlich von Null verschieden, so dass der Landau-Ansatz einer Potenzreihe um T_c des thermodynamischen Potentials berechtigt ist. Die Kondensatdichte n_0 wird also hier als Ordnungsparameter verwendet. Zusätzlich wird die Bedingung eines thermodynamischen Gleichgewichts an das effektive Potential V_{eff} aus (2.48) gestellt. Diese Gleichgewichtsbedingung spiegelt sich in der Minimalbedingung des effektiven Potentials wider, also in der ersten Ableitung nach dem Ordnungsparameter.

Bevor aber die Extremalisierung des effektiven Potentials V_{eff} stattfindet, wird noch ein künstlicher Kleinheitsparameter η eingeführt, der die Größe von quantenmechanischen bzw. thermischen Fluktuationen misst und eine systematische Entwicklung der gesuchten Zustandsgrößen ermöglicht. Bei allen Entwicklungen in η wird allerdings nur bis zur ersten Ordnung genähert, da jenseits der Bogoliubov-Theorie keine Terme berechenbar sind.

Im ganzen Kapitel 3 wird die Boostgeschwindigkeit \mathbf{w} zu Null gesetzt. Der Boost wurde für den Unterschied zwischen der superfluiden und normalfluiden Dichte eingeführt, was aber erst im Kapitel 4 behandelt wird.

3.1 Variationsprinzip

Der Hamilton-Operator (2.42) zusammen mit dem thermodynamischen Potential (2.48) ergeben ein effektives Potential, das von dem Ordnungsparameter n_0 abhängt. Zusätzlich wird ein künstlicher Kleinheitsparameter η eingeführt, damit die Quantenfluktuationen und die thermischen Fluktuationen als Störung betrachtet werden können. Alle thermodynamische Größen werden bis zur ersten Ordnung in η genähert, was die Möglichkeit zulässt, die Rechnung durch höhere Ordnungen zu verbessern. Am Ende der Störungsrechnung wird der Kleinheitsparameter wieder zu Eins gesetzt.

3 Landau-Theorie

Einsetzen von $\tilde{\epsilon}_0$ aus (2.43) und \tilde{E}_k aus (2.44) in (2.48) ergibt dann

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}(n_0) = & V \left(-\mu n_0 + \frac{n_0^2}{2} V_0 \right) \\
& + \frac{\eta}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[E_{\mathbf{k}} - \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu + n_0 (V_0 + V_{\mathbf{k}}) \right) \right] \\
& + \frac{\eta}{\beta} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \ln \left(1 - e^{-\beta E_{\mathbf{k}}} \right) .
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Wegen des thermodynamischen Gleichgewichtszustands kann jetzt das effektive Potential nach dem Ordnungsparameter extremalisiert werden:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial V_{\text{eff}}(n_0)}{\partial n_0}, \tag{3.2}$$

woraus folgt:

$$0 = V(-\mu + V_0 n_0) + \frac{\eta}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\left(1 + \frac{2}{e^{\beta E_{\mathbf{k}}} - 1} \right) \frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial n_0} - 2(V_0 + V_{\mathbf{k}}) \right] \tag{3.3}$$

mit der Ableitung

$$\frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial n_0} = \frac{1}{E_{\mathbf{k}}} \left[\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu + n_0 V_0 \right) (V_0 + V_{\mathbf{k}}) + n_0 V_0 V_{\mathbf{k}} \right]. \tag{3.4}$$

Die Gleichung (3.3) kann nicht explizit nach der Kondensatdichte umgestellt werden. Es ist allerdings möglich, einen selbstkonsistenten Ausdruck für n_0 zu erhalten, wobei n_0 auf der rechten Seite implizit in den Energieausdrücken steckt:

$$n_0 = \frac{\mu}{V_0} - \frac{1}{V V_0} \frac{\eta}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\left(1 + 2 \frac{1}{e^{\beta E_{\mathbf{k}}} - 1} \right) \left(\frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial n_0} \right) - 2(V_0 + V_{\mathbf{k}}) \right]. \tag{3.5}$$

Dieser kann iterativ bis zur ersten Ordnung in den thermischen bzw. Quantenfluktuationen, also in erster Ordnung in η , behandelt werden:

$$n_0 = n_0^{(0)} + \eta m_0^{(1)} + \mathcal{O}(\eta^2), \tag{3.6}$$

wobei:

$$n_{\mathbf{0}}^{(0)} = \frac{\mu}{V}, \quad (3.7)$$

$$n_{\mathbf{0}}^{(1)} = -\frac{1}{VV_0} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta E_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{0}}^{(0)})} - 1} \right) \frac{\partial E_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{0}}^{(0)})}{\partial n_{\mathbf{0}}} - (V_0 + V_{\mathbf{k}}) \right]. \quad (3.8)$$

Insgesamt ergibt sich für die Kondensatdichte $n_{\mathbf{0}}$:

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{0}} = & \frac{\mu}{V_0} - \frac{\eta}{2V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \left[\frac{\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \left(1 + \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0}\right) + \mu \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0}}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2\mu \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}}} \right. \\ & \left. \times \left(1 + \frac{2}{e^{\beta \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2\mu \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}}} - 1} \right) - \left(1 + \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ferner kann der Ausdruck für die Kondensatdichte (3.9) wiederum in das effektive Potential (3.1) eingesetzt werden, wodurch sich das thermodynamische Potential ergibt, das von der Temperatur, dem Volumen und dem chemischen Potential als natürliche Variablen abhängt. Es handelt sich folglich um die freie Energie:

$$V_{\text{eff}}(n_{\mathbf{0}}^{(0)} + \eta n_{\mathbf{0}}^{(1)}) = F(T, V, \mu). \quad (3.10)$$

In erster Näherung in η ergibt sich die freie Energie zu:

$$\begin{aligned} F(T, V, \mu) = & -\frac{V \mu^2}{2 V_0} \\ & + \frac{\eta}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \left[\sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2\mu \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0} \right] \\ & + \frac{\eta}{\beta} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \ln \left(1 - e^{-\beta \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2\mu \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}}} \right) + \mathcal{O}(\eta^2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Bei der Näherung in nullter Ordnung des Kleinheitsparameters η , was der ersten Zeile in Gleichung (3.11) entspricht, stellt sich das Ergebnis der Gross-Pitaevskii-Gleichung [23, S. 83] heraus. Sobald die Näherung in erster Ordnung für η erfolgt, erhalten wir zwei zusätzliche Terme. Die zweite Zeile entspricht der Erhöhung der Grundzustandsenergie in (2.42) bzw. (2.43) und kann daher als Quantenfluktuationen interpretiert werden. Die dritte Zeile besitzt ihren Ursprung im besetzungszahlabhängigen Term in (2.42) und ist

3 Landau-Theorie

daher auf thermische Fluktuationen zurückzuführen.

Die freie Energie ist eine Zustandsgröße und besitzt das folgende totale Differential:

$$dF = -SdT - pdV - Nd\mu, \quad (3.12)$$

aus dem weitere Zustandsgrößen über partielle Ableitungen der freien Energie ausgerechnet werden können.

3.2 Kondensatentleerung

Eine charakterisierende Größe des Bose-Einstein-Kondensats ist die Kondensatentleerung (eng.: *depletion*). Diese ist definiert durch die Differenz der Kondensatdichte n_0 und der Teilchendichte n :

$$\Delta n_0 = n - n_0. \quad (3.13)$$

Die Kondensatdichte n_0 ist aus dem Variationsprinzip durch (3.9) gegeben und die Dichte n kann gemäß (3.12) durch eine Ableitung der freien Energie (3.11) nach dem chemischen Potential errechnet werden:

$$n = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{T,V}. \quad (3.14)$$

Es ergibt sich damit

$$n = \frac{\mu}{V_0} - \frac{\eta}{2V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\frac{\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0}}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2\mu \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}}} \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{2}{e^{\beta \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2\mu \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}}} - 1} \right) - \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0} \right] + \mathcal{O}(\eta^2). \quad (3.15)$$

So kann jetzt die Differenz (3.13) aufgestellt werden. Da die Kondensatentleerung hier in Abhängigkeit von der Dichte interessiert, muss das chemische Potential durch einen dichteabhängigen Ausdruck ersetzt werden. Die Gleichung (3.9) kann in erster Näherung zum chemischen Potential μ invertiert werden:

$$n_0 = n_0(\mu) \leftrightarrow \mu = \mu(n_0) \quad (3.16)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mu = V_0 n_0 + \frac{\eta V_0}{2V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} & \left[\frac{\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \left(1 + \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0}\right) + n_0 V_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2n_0 V_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}}} \right. \\ & \left. \times \left(1 + \frac{2}{e^{\beta \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2n_0 V_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}}} - 1}\right) - \left(1 + \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0}\right) \right] + \mathcal{O}(\eta^2). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Es ist zu erkennen, dass für $\eta = 0$ der folgende Zusammenhang gilt:

$$\mu^{(0)} = V_0 n_0^{(0)} = V_0 n^{(0)}, \quad (3.18)$$

wodurch sich schließlich die Kondensatentleerung in Abhängigkeit von der Dichte n ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta n_0 := \frac{\eta}{2V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} & \left[\frac{\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + n V_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2V_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}}} - 1 \right] \\ & + \frac{\eta}{V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + n V_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2n V_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}}} \left(\frac{1}{e^{\beta \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2V_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}}} - 1} \right) + \mathcal{O}(\eta^2). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Offenbar beschreibt die erste Zeile den Einfluss von Quantenfluktuationen und die zweite Zeile den Einfluss, der von den thermischen Fluktuationen verursacht wird.

3.3 Grundzustandsenergie

Die Grundzustandsenergie ist definiert als die innere Energie im Limes $T \rightarrow 0$. Hier ist die freie Energie gegeben durch (3.11). Durch eine geeignete Legendre-Transformation kann die innere Energie bei der Temperatur $T = 0$ berechnet werden. Wird (3.12) mit der Grundrelation der Thermodynamik reversibler Prozesse verglichen

$$dU = TdS - pdV + \mu dN, \quad (3.20)$$

so folgt unmittelbar

$$U = F + TS + \mu N. \quad (3.21)$$

Für die Grundzustandsenergie im Tieftemperaturlimites gilt also:

$$\begin{aligned} E_0 &= \lim_{T \rightarrow 0} U = \lim_{T \rightarrow 0} (F + TS + Vn\mu) \\ &= F(T = 0, V, \mu = \mu(n, T = 0)) + Vn\mu(n, T = 0). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aus den Gleichungen (3.11) und (3.17) zusammen mit (3.18) ergibt sich:

$$E_0 = \frac{VV_0 n^2}{2} + \frac{\eta}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2nV_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - nV_{\mathbf{k}}} \right] + \mathcal{O}(\eta^2). \quad (3.23)$$

3.4 Bogoliubov-Dispersionsrelation

Der aus der Bogoliubov-Theorie resultierende Hamilton-Operator (2.42) gleicht einer Summe von Oszillatoren mit der Dispersionsrelation (2.38). Die Näherung für die Grundzustandsenergie (3.23) lässt eine qualitative Betrachtung der Einteilchenenergien in Abhängigkeit des Wellenvektors \mathbf{k} . So ergibt sich die Dispersionsrelation:

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2nV_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)}. \quad (3.24)$$

Die Dispersionsrelation kann für zwei Grenzfälle betrachtet werden. Für den Grenzfall $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ ist ein lineares Verhalten zubeobachten:

$$E_{\mathbf{k}} \approx \sqrt{2nV_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)} = \sqrt{\frac{nV_{\mathbf{k}}}{m}} \hbar |\mathbf{k}|, \quad (3.25)$$

was einem phonischen Zweig entspricht und kann mit dem Goldstone-Theorem erklärt werden [26, S. 55]. Hier kann auch eine Schallgeschwindigkeit abgeleitet werden:

$$c = \sqrt{\frac{nV_{\mathbf{k}}}{m}}. \quad (3.26)$$

Für den Grenzfall $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$ ist ein quadratisches Verhalten erkennbar:

$$E_{\mathbf{k}} \approx \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2} = \frac{\hbar^2}{2m} |\mathbf{k}|^2, \quad (3.27)$$

was den freien Teilchen entspricht.
Graphisch dargestellt:

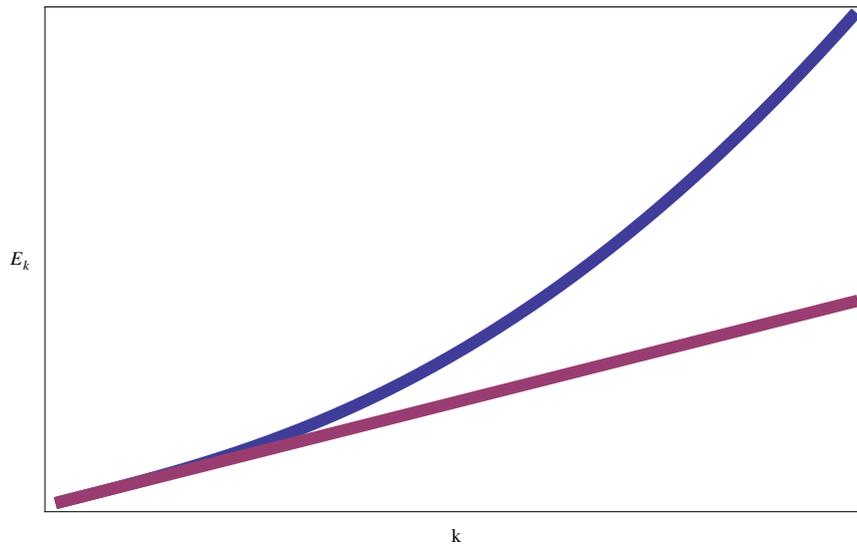


Abbildung 3.1: Dispersionsrelation $E_{\mathbf{k}}$ aus (3.24) für die Quasiteilchen der Bogoliubov-Theorie und lineares Verhalten aus (3.25) (blau).

4 Dipolares Bose-Gas bei tiefen Temperaturen

Durch die Bogoliubov-Theorie und die Landau-Theorie erschließt sich ein Zugang zu den Zustandsgrößen eines wechselwirkenden Bose-Gases, die nun auf eine Kontakt- und Dipol-Dipol-Wechselwirkung angewendet werden. Am Anfang sollen die Wechselwirkungsarten und deren Zusammenspiel diskutiert werden. Anschließend werden mit Hilfe des thermodynamischen Limes und einer Tieftemperaturentwicklung explizite Darstellungen von thermodynamischen Größen gewonnen.

4.1 Kontakt- und Dipol-Dipol-Wechselwirkung

Die Kontaktwechselwirkung kann im Rahmen der Streutheorie mit Hilfe der Born'schen Näherung [22] beschrieben werden. Sie wird mit Hilfe der Dirac'schen Deltafunktion mit der Wechselwirkungsstärke g dargestellt, zu der die s-Streuwellenlänge a und die Masse m beitragen:

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (4.1)$$

Die Kontaktwechselwirkung geht repulsiv in die Betrachtungen ein. Der Fall mit ausschließlich einer dipolaren Wechselwirkung ist aus Stabilitätsgründen nicht möglich [23, S. 268].

Die Dipol-Dipol-Wechselwirkung kann magnetischer oder elektrischer Natur sein [17] und [18], so dass entweder das magnetische Dipolmoment m und die magnetische Permeabilität μ_0 oder das elektrische Dipolmoment d in Debye-Einheiten ausgedrückt die Wechselwirkungsstärke C_{dd} bestimmen:

$$C_{dd} = \mu_0 m^2, \quad (4.2)$$

$$C_{dd} = 4\pi d^2. \quad (4.3)$$

Die Ausrichtung der zwei wechselwirkenden Teilchen führt zu einem attraktiven oder repulsiven Verhalten, das durch den Winkel θ zwischen der Polarisationsrichtung und der relativen Position zwischen den Dipolen [17, 18] beschrieben wird.

4 Dipolares Bose-Gas bei tiefen Temperaturen

Insgesamt ergibt sich die Zweiteilchenwechselwirkung in der Ortsdarstellung:

$$V(\mathbf{x}) = g\delta(\mathbf{x}) + \frac{C_{dd}}{4\pi|\mathbf{x}|^3} (1 - 3\cos^2\theta) , \quad (4.4)$$

wobei $\theta = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{e}_z)$ gilt, wenn die Dipole ohne Beschränkung der Allgemeinheit entlang der z -Richtung ausgerichtet sind. In der hier benötigten Fourier-Darstellung, die schon in (2.18) eingeführt wurde, erhalten wir wie in [27]:

$$V_{\mathbf{k}} = g [1 + \epsilon_{dd} (3\cos^2\theta - 1)] , \quad (4.5)$$

wobei hier die relative Wechselwirkungsstärke

$$\epsilon_{dd} = \frac{C_{dd}}{3g} . \quad (4.6)$$

eingeführt wird.

In Gleichung (4.5) ist zu erkennen, dass die Wechselwirkung nicht vom Betrag des Wellenvektors \mathbf{k} abhängt, sondern von der Lage des Vektors \mathbf{k} bezüglich der Polarisationsrichtung. Eine weitere wichtige und oft auftretende Grösse ist V_0 . Offenbar ergibt sich aus (4.5) im Limes $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$, dass die Größe V_0 nicht eindeutig ist:

$$V_0 = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}} V_{\mathbf{k}} = g [1 + \epsilon_{dd} (3\cos^2\theta - 1)] . \quad (4.7)$$

Demnach hängt V_0 auch vom Winkel θ zwischen \mathbf{k} und der Polarisationsrichtung ab.

4.2 Relative Wechselwirkungsstärke

Die relative Wechselwirkungsstärke ϵ_{dd} in (4.6) tritt bei allen charakterisierenden Größen auf und hilft, zwischen der Kontakt- und der Dipol-Dipol-Wechselwirkung zu unterscheiden. Wird ϵ_{dd} nämlich zu Null gesetzt, so wird der Fall der Kontaktwechselwirkung betrachtet. Beim Anstieg von ϵ_{dd} wird dagegen die dipolare Wechselwirkung gegenüber der Kontaktwechselwirkung stärker. Der Wertebereich von ϵ_{dd} liegt im Intervall: $0 \leq \epsilon_{dd} \leq 1$. Bei der weiteren Analyse der Bogoliubov-Theorie im Tieftemperaturlimit spiegelt sich die Wechselwirkungsstärke in der Funktion

$$I(\epsilon_{dd}, \alpha) = \int_0^1 du [1 + \epsilon_{dd} (3u^2 - 1)]^\alpha \quad (4.8)$$

wider, die sich aus dem Integral über $V_{\mathbf{k}}$ und aus dem Übergang in Kugelkoordinaten ergibt.

Mit Hilfe einer partiellen Integration kann hierfür eine Rekursionsformel entwickelt werden, die sich iterativ anwenden lässt:

$$\begin{aligned}
 I(\epsilon_{dd}, \alpha) &= \frac{1}{2\alpha + 1} [(1 + 2\epsilon_{dd})^\alpha + 2\alpha(1 - \epsilon_{dd})I(\epsilon_{dd}, \alpha - 1)] \\
 \Leftrightarrow I(\epsilon_{dd}, \alpha - 1) &= \frac{-1}{2\alpha(1 - \epsilon_{dd})} [(1 + 2\epsilon_{dd})^\alpha - (2\alpha + 1)I(\epsilon_{dd}, \alpha)]. \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Für einige Werte von α , wie z.B. $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, lässt sich das Integral mit elementaren Methoden analytisch lösen. Dann können über die Rekursionsformel weitere $I(\epsilon_{dd}, \alpha)$ -Funktionen berechnet werden. In dieser Arbeit treten insgesamt zehn verschiedene α -Werte auf, die sich aufgrund ihrer unterschiedlichen Verläufe in zwei Gruppen unterteilen lassen. Die erste Gruppe enthält nur positive α -Werte:

$$\begin{aligned}
 I\left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2}\right) &= \frac{1}{6}(1 + 2\epsilon_{dd})^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{24}(1 - \epsilon_{dd})(1 + 2\epsilon_{dd})^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{16}(1 - \epsilon_{dd})^2\sqrt{1 + 2\epsilon_{dd}} \\
 &\quad + \frac{5}{16} \frac{(1 - \epsilon_{dd})^3}{\sqrt{3\epsilon_{dd}}} \ln\left(\frac{\sqrt{3\epsilon_{dd}} + \sqrt{1 + 2\epsilon_{dd}}}{\sqrt{1 - \epsilon_{dd}}}\right), \\
 I\left(\epsilon_{dd}, \frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{4}(1 + 2\epsilon_{dd})^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}(1 - \epsilon_{dd})\sqrt{1 + 2\epsilon_{dd}} \\
 &\quad + \frac{3}{8} \frac{(1 - \epsilon_{dd})^2}{\sqrt{3\epsilon_{dd}}} \ln\left(\frac{\sqrt{3\epsilon_{dd}} + \sqrt{1 + 2\epsilon_{dd}}}{\sqrt{1 - \epsilon_{dd}}}\right), \\
 I\left(\epsilon_{dd}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{1 + 2\epsilon_{dd}}}{2} + \frac{1 - \epsilon_{dd}}{2\sqrt{3\epsilon_{dd}}} \ln\left(\frac{\sqrt{3\epsilon_{dd}} + \sqrt{1 + 2\epsilon_{dd}}}{\sqrt{1 - \epsilon_{dd}}}\right), \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

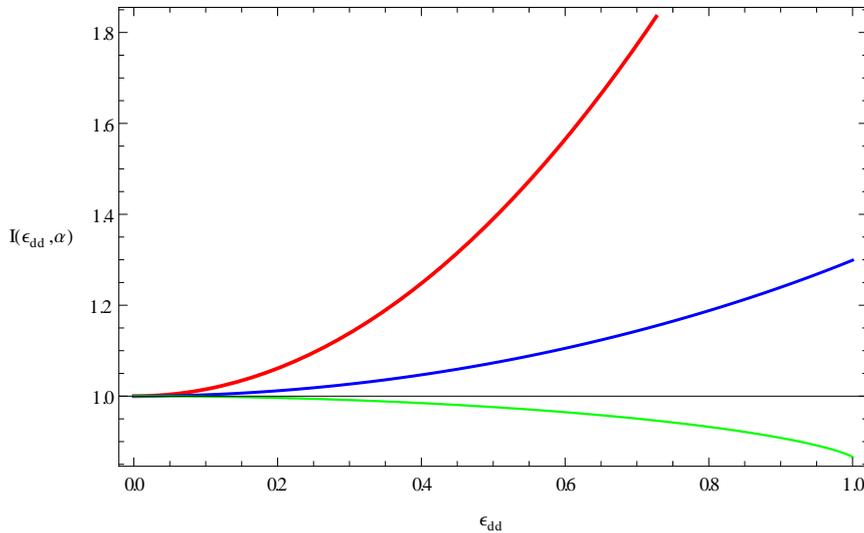


Abbildung 4.1: Funktionen $I(\epsilon_{dd}, \alpha)$ aus (4.10) mit den α -Werten $\frac{5}{2}$ (rot), $\frac{3}{2}$ (blau), $\frac{1}{2}$ (grün).

4 Dipolares Bose-Gas bei tiefen Temperaturen

während die zweite Gruppe lautet

$$\begin{aligned}
I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3\epsilon_{dd}}} \ln\left(\frac{\sqrt{3\epsilon_{dd}} + \sqrt{1+2\epsilon_{dd}}}{\sqrt{1-\epsilon_{dd}}}\right), \\
I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})(1+2\epsilon_{dd})^{\frac{1}{2}}}, \\
I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{5}{2}\right) &= \frac{2}{3} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^2 \sqrt{1+2\epsilon_{dd}}} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})(1+2\epsilon_{dd})^{\frac{3}{2}}}, \\
I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{7}{2}\right) &= \frac{8}{15} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^3 \sqrt{1+2\epsilon_{dd}}} + \frac{4}{15} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^2 (1+2\epsilon_{dd})^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{1}{5} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})(1+2\epsilon_{dd})^{\frac{5}{2}}}, \\
I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{9}{2}\right) &= \frac{16}{35} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^4 \sqrt{1+2\epsilon_{dd}}} + \frac{8}{35} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^3 (1+2\epsilon_{dd})^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{6}{35} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^2 (1+2\epsilon_{dd})^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{7} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})(1+2\epsilon_{dd})^{\frac{7}{2}}}, \\
I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{11}{2}\right) &= \frac{128}{315} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^5 \sqrt{1+2\epsilon_{dd}}} + \frac{64}{315} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^4 (1+2\epsilon_{dd})^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{16}{105} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^3 (1+2\epsilon_{dd})^{\frac{5}{2}}} + \frac{8}{63} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^2 (1+2\epsilon_{dd})^{\frac{7}{2}}} \\
&\quad + \frac{1}{9} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})(1+2\epsilon_{dd})^{\frac{9}{2}}}, \\
I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{13}{2}\right) &= \frac{256}{693} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^6 \sqrt{1+2\epsilon_{dd}}} + \frac{128}{693} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^5 (1+2\epsilon_{dd})^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{32}{231} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^4 (1+2\epsilon_{dd})^{\frac{5}{2}}} + \frac{80}{693} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^3 (1+2\epsilon_{dd})^{\frac{7}{2}}} \\
&\quad + \frac{10}{99} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})^2 (1+2\epsilon_{dd})^{\frac{9}{2}}} + \frac{1}{11} \frac{1}{(1-\epsilon_{dd})(1+2\epsilon_{dd})^{\frac{11}{2}}}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

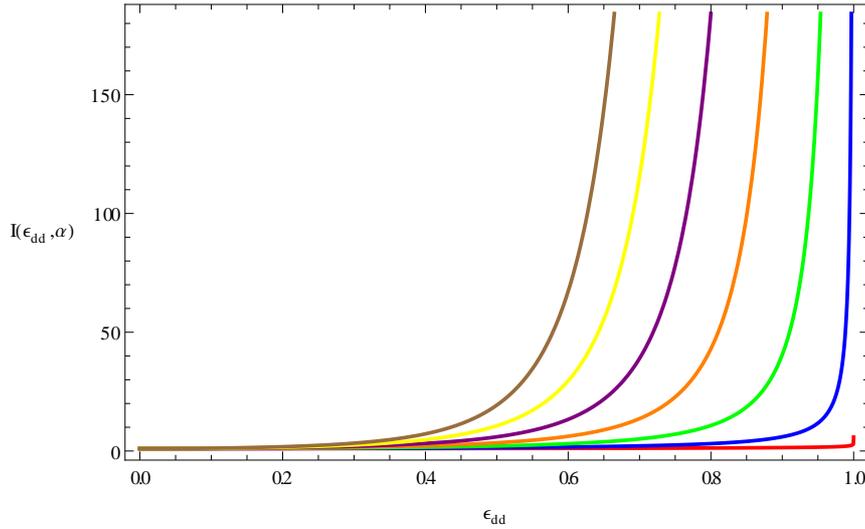


Abbildung 4.2: Funktionen $I(\epsilon_{dd}, \alpha)$ aus (4.11) mit den α -Werten $-\frac{1}{2}$ (rot), $-\frac{3}{2}$ (blau), $-\frac{5}{2}$ (grün), $-\frac{7}{2}$ (orange), $-\frac{9}{2}$ (violett), $-\frac{11}{2}$ (gelb), $-\frac{13}{2}$ (braun).

Alle Funktionen besitzen die Eigenschaft:

$$\lim_{\epsilon_{dd} \rightarrow 0} I(\epsilon_{dd}, \alpha) = 1, \quad (4.12)$$

was den Grenzfall der alleinigen Kontakt-Wechselwirkung widerspiegelt.

Die Unterteilung in zwei Gruppen erfolgt hier aufgrund unterschiedlichen Verhaltens im Limes $\epsilon_{dd} \rightarrow 1$. Die Funktionen (4.11) divergieren an der Stelle $\epsilon_{dd} = 1$ im Gegensatz zu den Funktionen (4.10), die bei $\epsilon_{dd} = 1$ einen endlichen Wert besitzen:

$$I\left(1, \frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad (4.13)$$

$$I\left(1, \frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad (4.14)$$

$$I\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (4.15)$$

4.3 Grundzustandsenergie

Die Gleichung (3.23) für die Grundzustandsenergie kann jetzt im thermodynamischen Limes betrachtet werden, d.h., dass die Summation über den Wellenvektor \mathbf{k} in ein Integral überführt wird:

4 Dipolares Bose-Gas bei tiefen Temperaturen

$$\sum_{\mathbf{k}}' = \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}. \quad (4.16)$$

Dabei wird auch über den Punkt $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ hinweg integriert, der eigentlich in der Summation nicht vorhanden ist. Da aber das Lebesgue-Maß von einem isolierten Punkt nach der Maß- und Integrationstheorie nicht zum Integral beiträgt, ist dieser Punkt nicht von Bedeutung [28].

Weiterhin ist es günstig, das zylindersymmetrische Integral in Kugelkoordinaten auszuwerten:

$$\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^1 d \cos \theta \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\epsilon}, \quad (4.17)$$

wobei hier die Substitution

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (4.18)$$

wegen der Übersichtlichkeit eingesetzt wird. Es bleibt also noch auszuwerten:

$$E_0 = \frac{VV_0 n^2}{2} + \eta \frac{V}{8\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^1 d \cos \theta \times \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\epsilon} \left[\sqrt{\epsilon^2 + 2nV_{\mathbf{k}}\epsilon} - \epsilon - nV_{\mathbf{k}} \right]. \quad (4.19)$$

Hier besteht die Möglichkeit, dass die Integration über ϵ wegen der oberen Grenze divergiert. Deshalb wird hier ein ultravioletter (UV) Cut-Off [29] verwendet, bei dem die obere Grenze des Integrals zu einem festen Wert gesetzt wird und nach der Durchführung der Integration dieser im Limes untersucht werden kann:

$$\int_0^\infty d\epsilon = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda d\epsilon. \quad (4.20)$$

Das ϵ -Integral kann wegen der Dipol-Dipol-Wechselwirkung durchgeführt werden, weil $V_{\mathbf{k}}$ gemäß (4.5) nur vom Winkel θ abhängt. So nimmt die Grundzustandsenergie nach der Integration über ϵ die folgende Form an:

$$E_0 = \frac{VV_0 n^2}{2} + \eta \frac{V}{8\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^1 d \cos \theta \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4}{15} (2nV_{\mathbf{k}})^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} \Lambda^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} nV_{\mathbf{k}} \Lambda^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{2}{3} (\Lambda + 2nV_{\mathbf{k}}) \Lambda^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (\Lambda + 2nV_{\mathbf{k}})^2 \Lambda^{\frac{1}{2}} \right] \sqrt{1 + \frac{2nV_{\mathbf{k}}}{\Lambda}} \right\}. \quad (4.21)$$

Für $\Lambda \gg nV_{\mathbf{k}}$ kann nun die Wurzelfunktion gemäß [24, S. 278]:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots \quad (4.22)$$

entwickelt werden, und schließlich folgt:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{VV_0 n^2}{2} + \eta \frac{256}{15} \sqrt{\pi} \frac{V}{m} (na)^{\frac{5}{2}} I\left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2}\right) \\ &+ \eta \frac{V}{8\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^1 d\cos\theta \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{8}{15} nV_{\mathbf{k}} \Lambda^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{15} (nV_{\mathbf{k}})^2 \Lambda^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Der erste Teil der Grundzustandsenergie ist hier konvergent und kann als Endergebnis dieser Betrachtung wie in [17] und [18] angesehen werden. Der zweite Teil der Gleichung, bei dem der Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ noch nicht ausgeführt wurde, divergiert in diesem Grenzfall. Allerdings verschwindet dieser Term im Zuge der Renormierung [30, S. 318].

4.4 Kondensatentleerung

Die Kondensatentleerung (3.19) kann analog zu der Grundzustandsenergie behandelt werden. An zwei Stellen unterscheidet sich aber die Berechnung grundsätzlich. Zum Einen treten keine UV-divergenten Terme auf und zum Anderen ist der temperaturabhängige Teil hier neu. Deshalb sollen die thermischen Fluktuationen nach dem Übergang in Kugelkoordinaten und der Substitution (4.18) hier genauer beschrieben werden. Zunächst ist eine partielle Integration der thermischen Fluktuationen der Kondensatentleerung möglich:

$$\begin{aligned} (\Delta n_0)_{\text{TF}} &= \eta \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^1 d\cos\theta \frac{1}{\beta} \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\epsilon} \frac{d}{d\epsilon} \ln\left(1 - e^{-\beta\sqrt{\epsilon^2 + 2nV_{\mathbf{k}}\epsilon}}\right) \\ &= -\eta \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^1 d\cos\theta \int_0^\infty d\epsilon \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \ln\left(1 - e^{-\beta\sqrt{\epsilon^2 + 2nV_{\mathbf{k}}\epsilon}}\right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

In der Tieftemperaturentwicklung kann die Reihendarstellung der Logarithmusfunktion [24, S. 281]

$$\ln(1 - e^x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu x}}{\nu} \quad (4.25)$$

verwendet werden und durch die Substitution

$$\epsilon = \frac{\kappa^2}{\beta^2 n V_0} \quad (4.26)$$

4 Dipolares Bose-Gas bei tiefen Temperaturen

ist ein Zugang für die Entwicklung der Wurzelfunktion geschaffen. So ergibt sich die folgende Form:

$$\begin{aligned}
 (\Delta n_0)_{\text{TF}} = & \eta \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{nV_0}} \\
 & \times \int_0^1 d \cos \theta \int_0^{\infty} d\kappa e^{-\nu\kappa \sqrt{\frac{2V_{\mathbf{k}}}{V_0}} \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\beta^2 2n^2 V_{\mathbf{k}} V_0}}}. \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

Nach der Wurzelentwicklung für kleine Temperaturen, wie in (4.22), kann auch die Exponentialfunktion

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad (4.28)$$

entwickelt werden:

$$\begin{aligned}
 (\Delta n_0)_{\text{TF}} = & \eta \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{nV_0}} \int_0^1 d \cos \theta \\
 & \times \sqrt{\frac{V_0}{2V_{\mathbf{k}}}} \left[\zeta(2)\Gamma(1) - \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{1}{2nV_{\mathbf{k}}} \right)^2 \zeta(4)\Gamma(4) \right] + \dots \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

Die Summation über ν und die Integration über κ ergeben die Riemansche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s}, \quad (4.30)$$

die für gerade Werte für s analytisch angegeben werden kann und die Gammafunktion [24, S. 138]:

$$\Gamma(\tau) = \int_0^{\infty} dx x^{\tau-1} e^{-x}, \quad (4.31)$$

die für natürliche Werte gemäß [24]

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (4.32)$$

die Fakultätsfunktion darstellt. Folglich lässt sich die gesamte Kondensatentleerung wie folgt ausgedrücken:

$$\begin{aligned}
 \Delta n_0 = & \eta \frac{8}{3\sqrt{\pi}} (na)^{\frac{3}{2}} I\left(\epsilon_{dd}, \frac{3}{2}\right) \\
 & + \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^4} \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{6} n^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{1}{2}\right) \\
 & - \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^8} \frac{\pi^{\frac{7}{2}}}{960} n^{-\frac{5}{2}} a^{-\frac{5}{2}} I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{5}{2}\right) + \dots,
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

wobei die thermische de-Broglie-Wellenlänge wie folgt definiert ist [23, S. 5]:

$$\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}. \tag{4.34}$$

Für den Fall $T = 0$ entspricht dies dem Ergebnis in [17] und [18].

4.5 Gültigkeitsbereich der Theorie

Anhand einer Abschätzung der Kondensatentleerung kann eine Betrachtung des Gültigkeitsbereichs der Theorie stattfinden. Dieser sollte im Bereich

$$0 \leq \frac{\Delta n_0}{n} \leq \frac{1}{2} \tag{4.35}$$

gegeben sein. Für eine überschaubare Abschätzung wählen wir eine andere Darstellung über den Gasparameter

$$\gamma = na^3 \tag{4.36}$$

und der Sprungtemperatur $T_c^{(0)}$ [23, S. 4]:

$$T_c^{(0)} = \frac{2\pi\hbar^2 n^{\frac{2}{3}}}{k_B m [\zeta(\frac{3}{2})]^{\frac{2}{3}}}. \tag{4.37}$$

Damit ergibt sich für die Kondensatentleerung aus (4.33):

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta n_0}{n} = & \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\gamma} I\left(\epsilon_{dd}, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{T}{T_c^{(0)}}\right)^2 \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{6 [\zeta(\frac{3}{2})]^{\frac{4}{3}}} \gamma^{-\frac{1}{6}} I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{1}{2}\right) \\
 & - \left(\frac{T}{T_c^{(0)}}\right)^4 \frac{\pi^{\frac{7}{2}}}{960 [\zeta(\frac{3}{2})]^{\frac{8}{3}}} \gamma^{-\frac{5}{6}} I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{5}{2}\right) + \dots
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

4 Dipolares Bose-Gas bei tiefen Temperaturen

So lässt sich die Kondensatentleerung für die Werte $\Delta n_0/n = 1/2$ und $\Delta n_0/n = 0$ in Abhängigkeit von der Temperatur T/T_c^0 und von dem Gasparameter γ graphisch darstellen. Dabei werden zwei Fälle betrachtet: der Fall der alleinigen Kontaktwechselwirkung mit $\epsilon_{dd} = 0$ und der Fall einer starken dipolaren Wechselwirkung mit $\epsilon_{dd} = 0,8$, die für Dysprosium gegeben sein könnte.

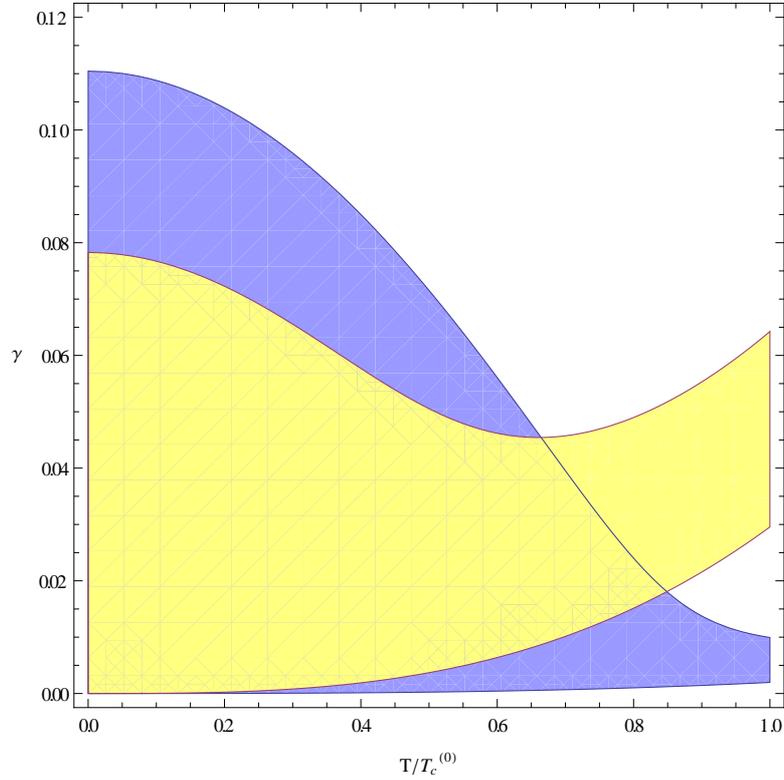


Abbildung 4.3: Der Bereich $0 < \Delta n_0/n < 1/2$ aus (4.35) mit (4.38) in Abhängigkeit von der Temperatur T und dem Gasparameter γ dargestellt für $\epsilon_{dd} = 0$ (blau gefärbte Fläche) und $\epsilon_{dd} = 0,8$ (gelb gefärbte Fläche).

Der Bereich, in dem die Bedingung (4.35) gilt, befindet sich in der Abbildung 4.3 in den jeweiligen gefärbten Flächen. Dabei gehen die oberen Grenzen der Flächen aus der oberen Schranke für die Kondensatentleerung hervor und analog für die unteren Grenzen die untere Schranke.

Aus der Gleichung (4.38) kann auch im Fall $T = 0$ angegeben werden, in welchem Wertebereich sich der Gasparameter γ in Abhängigkeit von der relativen Wechselwirkungsstärke ϵ_{dd} befindet. Es ergibt sich also aus dem Gültigkeitsbereich der Bogoliubov-Theorie (4.35) zusammen mit der Gleichung (4.38) im Fall $T = 0$:

$$0 \leq \gamma(\epsilon_{dd}) \leq \left[\frac{3\sqrt{\pi}}{16} \frac{1}{I\left(\epsilon_{dd}, \frac{3}{2}\right)} \right]^2, \quad (4.39)$$

graphisch dargestellt:

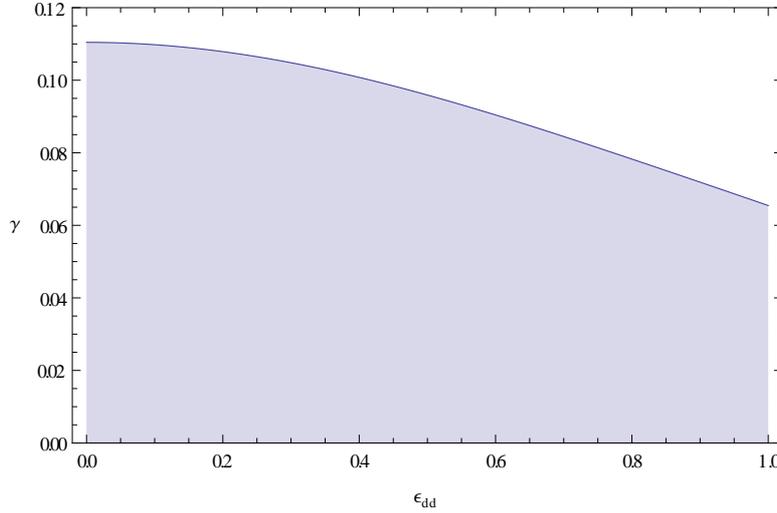


Abbildung 4.4: Der Gültigkeitsbereich des Gasparameters γ aus (4.39) in Abhängigkeit von der relativen Wechselwirkungsstärke ϵ_{dd} im Grenzfall $T = 0$.

An der Abbildung 4.4 ist zu erkennen, dass im Rahmen der Bogoliubov-Theorie der Wertebereich des Gasparameters γ mit steigender dipolarer Wechselwirkung im Grenzfall $T = 0$ kleiner wird.

4.6 Freie Energie

Die Gleichung (3.11) kann analog zu der Grundzustandsenergie und der Kondensatentleerung behandelt werden. Der nichtthermische Teil der freien Energie entspricht bis auf ein Vorzeichen der Grundzustandsenergie, wobei die Teilchendichte in erster Näherung in η durch das chemische Potential (3.18) ersetzt werden muss:

$$F(T, V, \mu) = -\frac{V\mu^2}{2V_0} + \eta \frac{256\pi^{\frac{1}{2}} V}{15 m} \left(\frac{\mu a}{V_0}\right)^{\frac{5}{2}} I\left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2}\right) + \eta \frac{1}{\beta} \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^1 d\cos\theta \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\epsilon} \ln \left(1 - e^{-\beta \sqrt{\epsilon^2 + 2\mu \frac{V_0}{\hbar^2} \epsilon}}\right). \quad (4.40)$$

4 Dipolares Bose-Gas bei tiefen Temperaturen

Die Temperaturentwicklung unterscheidet sich von der in der Kondensatentleerung verwendeten Methode nur durch die entsprechend variierte Substitution (4.26):

$$\epsilon = \frac{\kappa^2}{\beta^2 \mu}. \quad (4.41)$$

Nach der Reihendarstellung der Logarithmusfunktion (4.25) ergibt sich:

$$\begin{aligned} F(T, V, \mu) = & -\frac{V\mu^2}{2V_0} + \eta \frac{256\pi^{\frac{1}{2}} V}{15} \frac{(\mu a)^{\frac{5}{2}}}{m} I\left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2}\right) \\ & - \eta \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{1}{\beta^4} \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \mu^{-\frac{3}{2}} \int_0^1 d \cos \theta \\ & \times \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^2 e^{-\nu\kappa \sqrt{\frac{2V_{\mathbf{k}}}{V_0}} \sqrt{1 + \frac{V_0}{2V_{\mathbf{k}}\mu^2} \frac{\kappa^2}{\beta^2}}}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Im Tieftemperaturlimites können jetzt die Wurzelfunktion (4.22) und die Exponentialfunktion (4.28) entwickelt werden:

$$\begin{aligned} F(T, V, \mu) = & -\frac{V\mu^2}{2V_0} + \eta \frac{256\pi^{\frac{1}{2}} V}{15} \frac{(\mu a)^{\frac{5}{2}}}{m} I\left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2}\right) \\ & - \eta \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{1}{\beta^4} \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \mu^{-\frac{3}{2}} \int_0^1 d \cos \theta \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^2 e^{-\nu\sqrt{\frac{2V_{\mathbf{k}}}{V_0}} \kappa} \\ & \times \left(1 - \nu \frac{1}{2\beta^2 \mu^2} \sqrt{\frac{V_0}{2V_{\mathbf{k}}}} \kappa^3 + \nu^2 \frac{1}{8\beta^4 \mu^4} \frac{V_0}{2V_{\mathbf{k}}} \kappa^6 + \dots\right) \\ & \times \left[1 + \nu \frac{1}{8\beta^4 \mu^4} \left(\frac{V_0}{2V_{\mathbf{k}}}\right)^{\frac{3}{2}} \kappa^5 + \dots\right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Wie bei der Kondensatentleerung führt die Integration über κ auf die Riemannschesche Zetafunktion (4.30) und die Gammafunktion (4.31) und insgesamt ergibt sich dann die freie Energie in Abhängigkeit von λ_{dB} aus (4.34) und mit g aus (4.1):

$$\begin{aligned} F(T, V, \mu) = & -\frac{V\mu^2}{2V_0} + \eta \frac{256\pi^{\frac{1}{2}} V \hbar^2}{15} \frac{(\mu a)^{\frac{5}{2}}}{m} I\left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2}\right) \\ & - \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^8} \frac{\pi^{\frac{9}{2}} V \hbar^2}{45} \frac{(\mu a)^{-\frac{3}{2}}}{m} I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{3}{2}\right) \\ & + \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^{12}} \frac{\pi^{\frac{13}{2}} V \hbar^2}{252} \frac{(\mu a)^{-\frac{7}{2}}}{m} I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{7}{2}\right) \\ & - \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^{16}} \frac{3\pi^{\frac{17}{2}} V \hbar^2}{1280} \frac{(\mu a)^{-\frac{11}{2}}}{m} I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{11}{2}\right) + \dots \end{aligned} \quad (4.44)$$

4.7 Ableitungen der freien Energie

Wie schon in (3.12) beschrieben, besitzt die freie Energie ein totales Differential, so dass aus ihren partiellen Ableitungen weitere Zustandsgrößen gewonnen werden können. Die Entropie ist die partielle Ableitung der freien Energie nach der Temperatur bei konstantem Volumen und konstantem chemischen Potential:

$$S(T, V, \mu) = - \left(\frac{\partial F(T, V, \mu)}{\partial T} \right)_{V, \mu} \quad (4.45)$$

und sie kann hier aus der freien Energie (4.44) für kleine Temperaturen explizit angegeben werden:

$$\begin{aligned} S(T, V, \mu) = & \eta \frac{k_B}{\lambda_{\text{dB}}^6} \frac{2\pi^{\frac{7}{2}} V}{45} \left(\frac{\mu a}{V_0} \right)^{-\frac{3}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, -\frac{3}{2} \right) \\ & - \eta \frac{k_B}{\lambda_{\text{dB}}^{10}} \frac{\pi^{\frac{11}{2}} V}{84} \left(\frac{\mu a}{V_0} \right)^{-\frac{7}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, -\frac{7}{2} \right) \\ & + \eta \frac{k_B}{\lambda_{\text{dB}}^{14}} \frac{3\pi^{\frac{15}{2}} V}{320} \left(\frac{\mu a}{V_0} \right)^{-\frac{11}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, -\frac{11}{2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.46)$$

Hier ist zu erkennen, dass der dritte Hauptsatz der Thermodynamik [20, S. 112] erfüllt ist:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T, V, \mu) = 0. \quad (4.47)$$

Die freie Energie hängt linear vom Volumen V ab, wodurch der Druck $p(T, V, \mu)$ auch über eine Division errechnet werden kann und dann nicht mehr vom Volumen abhängt:

$$p(T, V, \mu) = - \left(\frac{\partial F(T, V, \mu)}{\partial V} \right)_{T, \mu} = - \frac{F(T, V, \mu)}{V}. \quad (4.48)$$

Nach der expliziten Form der freien Energie (4.44) ist dann der Druck gegeben durch

$$\begin{aligned} p(T, \mu) = & \frac{\mu^2}{2V_0} - \eta \frac{256\pi^{\frac{1}{2}} \hbar^2}{15 m} \left(\frac{\mu a}{V_0} \right)^{\frac{5}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2} \right) \\ & + \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^8} \frac{\pi^{\frac{9}{2}} \hbar^2}{45 m} \left(\frac{\mu a}{V_0} \right)^{-\frac{3}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, -\frac{3}{2} \right) \\ & - \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^{12}} \frac{\pi^{\frac{13}{2}} \hbar^2}{252 m} \left(\frac{\mu a}{V_0} \right)^{-\frac{7}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, -\frac{7}{2} \right) \\ & + \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^{16}} \frac{3\pi^{\frac{17}{2}} \hbar^2}{1280 m} \left(\frac{\mu a}{V_0} \right)^{-\frac{11}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, -\frac{11}{2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.49)$$

4 Dipolares Bose-Gas bei tiefen Temperaturen

Die Teilchendichte kann aus der Gleichung (3.15) gewonnen werden, entspricht aber auch der partiellen Ableitung der freien Energie nach dem chemischen Potential. Diese hängt, wie beim Druck ebenso nicht mehr vom Volumen ab:

$$n(T, V, \mu) = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial F(T, V, \mu)}{\partial \mu} \right)_{T, V}. \quad (4.50)$$

Analog zu der Entropie und dem Druck erhalten wir die Tieftemperaturentwicklung:

$$\begin{aligned} n(T, \mu) = & \frac{\mu}{V_0} - \eta \frac{128\pi^{\frac{1}{2}} \hbar^2}{3 m} \mu^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{V_0} \right)^{\frac{5}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2} \right) \\ & - \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^8} \frac{\pi^{\frac{9}{2}} \hbar^2}{30 m} \mu^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{a}{V_0} \right)^{-\frac{3}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, -\frac{3}{2} \right) \\ & + \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^{12}} \frac{\pi^{\frac{13}{2}} \hbar^2}{72 m} \mu^{-\frac{9}{2}} \left(\frac{a}{V_0} \right)^{-\frac{7}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, -\frac{7}{2} \right) \\ & - \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^{16}} \frac{33\pi^{\frac{17}{2}} \hbar^2}{2560 m} \mu^{-\frac{13}{2}} \left(\frac{a}{V_0} \right)^{-\frac{11}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, -\frac{11}{2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.51)$$

Aus der Invertierung der Teilchendichte n kann noch das chemische Potential gewonnen werden. Dabei findet die Invertierung von (4.51) in erster Ordnung des Kleinheitsparameters η statt:

$$\begin{aligned} \mu(T, n) = & V_0 n + \eta \frac{128\pi^{\frac{1}{2}} \hbar^2}{3 m} n^{\frac{3}{2}} a^{\frac{5}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2} \right) \\ & + \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^8} \frac{\pi^{\frac{9}{2}} \hbar^2}{30 m} n^{-\frac{5}{2}} a^{-\frac{3}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, -\frac{3}{2} \right) \\ & - \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^{12}} \frac{\pi^{\frac{13}{2}} \hbar^2}{72 m} n^{-\frac{9}{2}} a^{-\frac{7}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, -\frac{7}{2} \right) \\ & + \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^{16}} \frac{33\pi^{\frac{17}{2}} \hbar^2}{2560 m} n^{-\frac{13}{2}} a^{-\frac{11}{2}} I \left(\epsilon_{dd}, -\frac{11}{2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.52)$$

4.8 Superfluide Dichte

Die superfluide Dichte kann in Anlehnung an die Referenzen [23, S. 133] und [31, S. 181] aus der gesamten Dichte und der normalfluiden Dichte berechnet werden:

$$n_s = n - n_n. \quad (4.53)$$

Die normalfluide Dichte lässt sich dadurch berechnen, indem das Bose-Gas über einen Boost in ein gleichförmig zum Laborsystem bewegtes Koordinatensystem transformiert wird. Dabei zeigt sich, dass sich die freie Energie wie folgt mit der Boostgeschwindigkeit \mathbf{w} ändert:

$$\Delta F = \frac{\eta}{\beta} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \ln \left(1 - e^{-\beta E_{\mathbf{k}}} e^{-\beta \hbar \mathbf{w} \mathbf{k}} \right). \quad (4.54)$$

Für kleine Boostgeschwindigkeiten kann dies in einer Taylor-Reihe um $\mathbf{w} \mathbf{k} = 0$ entwickelt werden, dabei verschwinden aus Symmetriegründen die Terme mit ungeraden Potenzen in $\mathbf{w} \mathbf{k}$:

$$\Delta F = \frac{\eta}{\beta} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \ln \left(1 - e^{-\beta E_{\mathbf{k}}} \right) - \eta \frac{\beta \hbar^2}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} (\mathbf{w} \mathbf{k})^2 \frac{e^{\beta E_{\mathbf{k}}}}{(e^{\beta E_{\mathbf{k}}} - 1)^2} + \mathcal{O} \left((\mathbf{w} \mathbf{k})^4 \right). \quad (4.55)$$

Hierbei ist die folgende Komponentenschreibweise zu beachten:

$$(\mathbf{w} \mathbf{k})^2 = \left(\sum_{i=1}^3 w_i k_i \right) \left(\sum_{j=1}^3 w_j k_j \right). \quad (4.56)$$

Wird die freie Energie ΔF nach den Komponenten der Boostgeschwindigkeit w_α differenziert, so ergibt sich die Impulskomponente p_α :

$$p_\alpha = - \frac{\partial \Delta F}{\partial w_\alpha}. \quad (4.57)$$

Einsetzen von (4.55) und (4.56) in (4.57) führt dann auf

$$p_\alpha = \eta \beta \hbar^2 \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \frac{e^{\beta E_{\mathbf{k}}}}{(e^{\beta E_{\mathbf{k}}} - 1)^2} \sum_{j=1}^3 w_j k_j k_\alpha + \dots \quad (4.58)$$

Der Impuls des Bose-Gases hängt wie folgt von der normalfluiden Dichte n_n ab:

$$\mathbf{p} = mV n_n \mathbf{w} + \dots \quad (4.59)$$

Demnach stellt die normalfluide Dichte einen Tensor dar. In Komponentenschreibweise lautet der Impuls (4.59) also:

$$p_\alpha = mV \sum_{j=1}^3 (n_n)_{\alpha j} w_j + \dots \quad (4.60)$$

4 Dipolares Bose-Gas bei tiefen Temperaturen

Der Vergleich von (4.58) und (4.60) führt auf

$$(n_n)_{\alpha j} = \eta \frac{\beta \hbar^2}{mV} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \frac{e^{\beta E_{\mathbf{k}}}}{(e^{\beta E_{\mathbf{k}}} - 1)^2} k_j k_{\alpha}, \quad (4.61)$$

was sich im thermodynamischen Limes reduziert auf

$$(n_n)_{\alpha j} = \eta \frac{1}{m} \frac{\beta \hbar^2}{8\pi^3} \int d^3k \frac{e^{\beta E_{\mathbf{k}}}}{(e^{\beta E_{\mathbf{k}}} - 1)^2} k_{\alpha} k_j. \quad (4.62)$$

Hier ist zu erkennen, dass die normalfluide Dichte im Limes $T \rightarrow 0$ verschwindet, so dass die gesamte Dichte n in diesem Grenzfall unabhängig von der Wechselwirkungsart $V_{\mathbf{k}}$ ganz superfluid ist. Außerdem stellt sich für das zylindersymmetrische dipolare Bose-Gas heraus, dass dieser Tensor diagonal ist.

Im Übergang in die Kugelkoordinaten ist es wichtig, zwischen der x - y -Ebene und der z -Achse zu unterscheiden. Das Produkt $k_{\alpha} k_j$ ist dann:

$$k_{x \text{ oder } y}^2 = \frac{1}{2}(k_x^2 + k_y^2) = \frac{1}{2}k^2(1 - \cos^2 \theta) \quad (4.63)$$

und

$$k_z^2 = k^2 \cos^2 \theta. \quad (4.64)$$

Ausserdem kann die Reihendarstellung

$$\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu e^{-\nu x} \quad (4.65)$$

verwendet werden, die sich durch Differentiation aus (4.25) ableiten lässt. Für die normalfluiden Dichten ergibt sich also:

$$n_{x,y} = \eta \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu \beta \hbar^2}{4\pi^2 m} \int_0^1 d \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \int_0^{\infty} dk k^4 e^{-\nu \beta \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2 + 2\mu \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)}}, \quad (4.66)$$

$$n_z = \eta \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu \beta \hbar^2}{2\pi^2 m} \int_0^1 d \cos \theta \cos^2 \theta \int_0^{\infty} dk k^4 e^{-\nu \beta \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2 + 2\mu \frac{V_{\mathbf{k}}}{V_0} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)}}. \quad (4.67)$$

Das Integral über k zusammen mit der Summe über ν kann mit den schon bekannten Methoden aus der Grundzustandsenergie und der Kondensatentleerung ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}
 n_{\perp/\parallel}(T, \mu) = & \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^8} \frac{\pi^{\frac{7}{2}}}{30} \left(\frac{\mu}{V_0} \right)^{-\frac{5}{2}} a^{-\frac{5}{2}} J_{\perp/\parallel} \left(\epsilon_{dd}, -\frac{5}{2} \right) \\
 & - \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^{12}} \frac{\pi^{\frac{11}{2}}}{48} \left(\frac{\mu}{V_0} \right)^{-\frac{9}{2}} a^{-\frac{9}{2}} J_{\perp/\parallel} \left(\epsilon_{dd}, -\frac{9}{2} \right) \\
 & + \eta \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^{16}} \frac{11\pi^{\frac{15}{2}}}{256} \left(\frac{\mu}{V_0} \right)^{-\frac{13}{2}} a^{-\frac{13}{2}} J_{\perp/\parallel} \left(\epsilon_{dd}, -\frac{13}{2} \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Die neu eingeführten Funktionen

$$J_{\perp}(\epsilon_{dd}, \alpha) = \int_0^1 du (1-u^2) [1 + \epsilon_{dd}(1-3u^2)]^{\alpha}, \tag{4.69}$$

$$J_{\parallel}(\epsilon_{dd}, \alpha) = 2 \int_0^1 du u^2 [1 + \epsilon_{dd}(1-3u^2)]^{\alpha} \tag{4.70}$$

ergeben sich aus der θ -Integration und können mit Hilfe der $I(\epsilon_{dd}, \alpha)$ -Funktionen aus (4.8) dargestellt werden:

$$J_{\perp}(\epsilon_{dd}, \alpha) = I(\epsilon_{dd}, \alpha) - \frac{1}{6\epsilon_{dd}(\alpha+1)} [(1+2\epsilon_{dd})^{\alpha+1} - I(\epsilon_{dd}, \alpha+1)], \tag{4.71}$$

$$J_{\parallel}(\epsilon_{dd}, \alpha) = \frac{1}{3\epsilon_{dd}(\alpha+1)} [(1+2\epsilon_{dd})^{\alpha+1} - I(\epsilon_{dd}, \alpha+1)]. \tag{4.72}$$

Aus Gleichung (4.68) ist wie schon bei (4.62) zu erkennen, dass die normalfluiden Dichten im Grenzfall $T = 0$ verschwinden:

$$\lim_{T \rightarrow 0} n_{\perp} = \lim_{T \rightarrow 0} n_{\parallel} = 0 \tag{4.73}$$

und, dass dann die gesamte Dichte superfluid ist:

$$n_s = n, \tag{4.74}$$

die sich skalar verhält.

5 Schallgeschwindigkeiten

Die Zustandsgrößen, die für tiefe Temperaturen im letzten Kapitel ausgerechnet wurden, können nun dazu verwendet werden, um weitere Eigenschaften des Systems zu bestimmen. Das Zwei-Flüssigkeiten-Modell legt hier eine Grundlage für eine hydrodynamische Behandlung von einem System, in dem eine superfluide neben einer normalfluiden Dichte existiert. Die Annahme, dass die superfluide Flüssigkeit keine Viskosität aufweist, führt schließlich auf die Landau-Khalatnikov-Gleichungen, die in der Bachelorarbeit [19] zusammenfassend dargestellt sind. Von Interesse sind insbesondere die ersten beiden Schallgeschwindigkeiten. Die erste kann als eine Druckwelle bezeichnet werden, die sich dadurch auszeichnet, dass die zwei Flüssigkeiten gleichphasig schwingen. Die zweite kann als eine Entropiewelle bezeichnet werden, bei der eine gegenphasige Schwingung stattfindet. Im Grenzfall $T = 0$ sind beide voneinander unabhängig. Wenn jedoch die Temperatur des Systems erhöht wird, entsteht ein Mischzustand zwischen beiden. Dieser Ansatz ist ursprünglich für das Helium-II entwickelt worden, das nur die isotope Kontaktwechselwirkung aufweist. In unserem Fall handelt es sich jedoch um ein anisotropes System mit der Dipol-Dipol-Wechselwirkung. Wird nämlich zwischen der x - y -Ebene und der z -Achse unterschieden, so entstehen zwei verschiedene normalfluide und superfluide Dichten (4.68). In diesem Kapitel können daher nicht die Ergebnisse aus der Bachelorarbeit [19] von C. Wille genutzt werden, da dort der Fall eines anisotropen Systems noch nicht diskutiert worden ist. Die ersten beiden Schallgeschwindigkeiten eines anisotropen Bose-Gases werden aber in [32] behandelt.

5.1 Ergebnisse des Zwei-Flüssigkeiten-Modells

Die ersten beiden Schallgeschwindigkeiten werden in [32] als Druckwelle und als Entropiewelle beschrieben und aus der entsprechenden Dispersionrelation eines anisotropen Systems

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\bar{s}} \mathbf{k}^2 + \frac{T \bar{s}^2}{c_\nu} (\rho_n^{-1})_{il} (\rho_s)_{lj} k_i k_j \right] + \left(\frac{T \bar{s}^2}{c_\nu} \right) (\rho_n^{-1})_{il} (\rho_s)_{lj} k_i k_j \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \mathbf{k}^2 = 0 \quad (5.1)$$

können diese berechnet werden. Die in dieser Gleichung verwendeten thermodynamischen Größen weichen ein wenig von den im Kapitel 4 berechneten Zustandsgrößen ab.

5 Schallgeschwindigkeiten

So ist

$$\rho = nm \quad (5.2)$$

die Massendichte, die der Teilchendichte multipliziert mit der Masse entspricht, und

$$\bar{s} = \frac{S}{V\rho} \quad (5.3)$$

die Entropiedichte, die auf das Produkt aus Volumen und Massendichte normiert wurde. Die in der Gleichung (5.1) enthaltenden Matrixmultiplikationen bedürfen einer näheren Erläuterung. Die Indizes i, j, l beschreiben im Allgemeinen die Richtungskomponenten im Fourier-Raum. Da aber eine Zylindersymmetrie vorliegt, können diese auf die senkrechte \perp und die parallele \parallel Komponente reduziert werden. So lässt sich der Vektor \mathbf{k} folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k^\perp \\ k^\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \sin \theta \\ k \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Die Matrixmultiplikation zwischen den normalfluiden und den superfluiden Dichten ergibt dann mit der Einstein'schen Summenkonvention:

$$(\rho_n^{-1})_{il} (\rho_s)_{lj} = \begin{pmatrix} (\rho_n^\perp)^{-1} \rho_s^\perp & 0 \\ 0 & (\rho_n^\parallel)^{-1} \rho_s^\parallel \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

wobei die diagonale Form der Dichten schon im Abschnitt 4.8 hergeleitet wurde. Aus den Gleichungen (5.4) und (5.5) wird die quartische Eigenwertgleichung (5.1) zu:

$$\begin{aligned} \omega^4 - \omega^2 k^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\bar{s}} + \frac{T\bar{s}^2}{c_\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^\perp \sin^2 \theta + \frac{T\bar{s}^2}{c_\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^\parallel \cos^2 \theta \right] \\ + k^4 \left[\frac{T\bar{s}^2}{c_\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^\perp \sin^2 \theta + \frac{T\bar{s}^2}{c_\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^\parallel \cos^2 \theta \right] \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

wobei diese wie eine quadratische Gleichung behandelt werden kann, so dass die Lösungen

$$\begin{aligned} \omega_{1/2}^2 = & -\frac{1}{2} k^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\bar{s}} + \frac{T\bar{s}^2}{c_\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^\perp \sin^2 \theta + \frac{T\bar{s}^2}{c_\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^\parallel \cos^2 \theta \right] \\ & \pm k^2 \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\bar{s}} + \frac{T\bar{s}^2}{c_\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^\perp \sin^2 \theta + \frac{T\bar{s}^2}{c_\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^\parallel \cos^2 \theta \right]^2 \right. \\ & \left. - \left[\frac{T\bar{s}^2}{c_\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^\perp \sin^2 \theta + \frac{T\bar{s}^2}{c_\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^\parallel \cos^2 \theta \right] \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

nur noch die angepassten Zustandsgrößen benötigen.

5.2 Zustandsgrößen für die Schallgeschwindigkeiten

Die Schallgeschwindigkeiten sollen hier bis zur zweiten Ordnung der Temperatur T entwickelt werden. Deswegen werden in diesem Abschnitt die für die Schallgeschwindigkeiten benötigten Zustandsgrößen in der entsprechenden Ordnung in T berechnet.

Aus dem Kapitel 4 ist der Druck in Abhängigkeit von der Temperatur T und dem chemischen Potential μ in (4.49) gegeben. Dieser soll bis zur zweiten Ordnung für T in Abhängigkeit von der Massendichte ρ aus (5.2) dargestellt werden. Die Gleichung (4.52) wird in Gleichung (4.49) eingesetzt und zusammen mit der Definition (5.2) ergibt sich in erster Ordnung in η :

$$p(T, \rho) = \frac{V_0}{2m^2} \rho^2 + \eta \frac{128\pi^{\frac{1}{2}}}{5} \hbar^2 m^{-\frac{7}{2}} \rho^{\frac{5}{2}} a^{\frac{5}{2}} I\left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2}\right) + \dots, \quad (5.8)$$

womit nun die Ableitung des Drucks nach der Massendichte bei konstanter Temperatur möglich ist:

$$\left(\frac{\partial p(T, \rho)}{\partial \rho}\right)_T(T, \rho) = \frac{V_0}{m^2} \rho + \eta 64\pi^{\frac{1}{2}} \hbar^2 m^{-\frac{7}{2}} \rho^{\frac{3}{2}} a^{\frac{5}{2}} I\left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2}\right) + \dots \quad (5.9)$$

Weil keine Temperaturabhängigkeit gegeben ist, gilt auch:

$$\left(\frac{\partial p(T, \rho)}{\partial \rho}\right)_T = \left(\frac{\partial p(T, \rho)}{\partial \rho}\right)_{\bar{s}}. \quad (5.10)$$

So bleiben nur noch die Entropie und die Dichteverhältnisse auszurechnen. Zunächst soll die Entropie aus (4.46) in Abhängigkeit von der Massendichte ρ und mit der Normierung (5.3) angegeben werden:

$$\begin{aligned} \bar{s}(T, \rho) = & \eta \frac{k_B}{\lambda_{dB}^6} \frac{2\pi^{\frac{7}{2}}}{45} m^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{5}{2}} a^{-\frac{3}{2}} I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{3}{2}\right) \\ & - \eta \frac{k_B}{\lambda_{dB}^{10}} \frac{\pi^{\frac{11}{2}}}{84} m^{\frac{7}{2}} \rho^{-\frac{9}{2}} a^{-\frac{7}{2}} I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{7}{2}\right) + \dots, \end{aligned} \quad (5.11)$$

wobei hier die Entwicklung in der sechsten Ordnung in der Temperatur T durchgeführt wird. Weiterhin wird die spezifische Wärmekapazität c_ν benötigt, die folgendermaßen definiert ist [19, S. 18]:

$$c_\nu = T \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial T}\right)_\rho. \quad (5.12)$$

5 Schallgeschwindigkeiten

Zusammen mit (5.11) ergibt sich dann:

$$c_\nu(T, \rho) = \eta \frac{k_B}{\lambda_{\text{dB}}^6} \frac{2\pi^{\frac{7}{2}}}{15} m^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{5}{2}} a^{-\frac{3}{2}} I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{3}{2}\right) - \eta \frac{k_B}{\lambda_{\text{dB}}^{10}} \frac{5\pi^{\frac{11}{2}}}{84} m^{\frac{7}{2}} \rho^{-\frac{9}{2}} a^{-\frac{7}{2}} I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{7}{2}\right) + \dots \quad (5.13)$$

Das Verhältnis der superfluiden Dichte zu der normalfluiden Dichte erfordert eine genauere Betrachtung, denn die normalfluide Dichte, die explizit mit (4.68) gegeben ist, steht in dem Verhältnis im Nenner:

$$\left(\frac{\rho_s}{\rho_n}\right)^{\perp/\parallel} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^8} \frac{\pi^{\frac{7}{2}}}{30} m^{\frac{7}{2}} \rho^{-\frac{7}{2}} a^{-\frac{5}{2}} J_{\perp/\parallel}\left(\epsilon_{dd}, -\frac{5}{2}\right)} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^4} \frac{5\pi^2}{8} m^2 \rho^{-2} a^{-2} \frac{J_{\perp/\parallel}\left(\epsilon_{dd}, -\frac{9}{2}\right)}{J_{\perp/\parallel}\left(\epsilon_{dd}, -\frac{5}{2}\right)}}, \quad (5.14)$$

so dass eine Tieftemperaturentwicklung durchzuführen ist. Für kleine x gilt:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \dots \quad (5.15)$$

und der Ausdruck

$$\left(\frac{\rho_s}{\rho_n}\right)^{\perp/\parallel} = \lambda_{\text{dB}}^8 30\pi^{-\frac{7}{2}} m^{-\frac{7}{2}} \rho^{\frac{7}{2}} a^{\frac{5}{2}} \frac{1}{J_{\perp/\parallel}\left(\epsilon_{dd}, -\frac{5}{2}\right)} \times \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^4} \frac{5\pi^2}{8} m^2 \rho^{-2} a^{-2} \frac{J_{\perp/\parallel}\left(\epsilon_{dd}, -\frac{9}{2}\right)}{J_{\perp/\parallel}\left(\epsilon_{dd}, -\frac{5}{2}\right)} \right\} + \dots \quad (5.16)$$

kann für kleine Temperaturen gewonnen werden. Analog dazu wird auch das multiplikativ Inverse der Wärmekapazität entwickelt:

$$\frac{1}{c_\nu} = \frac{\lambda_{\text{dB}}^6}{\eta} \frac{1}{k_B} \frac{15}{2} \pi^{-\frac{7}{2}} m^{-\frac{3}{2}} \rho^{\frac{5}{2}} a^{\frac{3}{2}} \frac{1}{I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{3}{2}\right)} \times \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^4} \frac{25\pi^2}{56} m^2 \rho^{-2} a^{-2} \frac{I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{7}{2}\right)}{I\left(\epsilon_{dd}, -\frac{3}{2}\right)} \right\} + \dots \quad (5.17)$$

So lautet der benötigte Term in der T^2 -Entwicklung der Schallgeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} \frac{T\bar{s}^2}{c_\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^{\perp/\parallel} &= \eta \frac{gn}{m} \frac{2}{9} \frac{I(\epsilon_{dd}, -\frac{3}{2})}{J_{\perp/\parallel}(\epsilon_{dd}, -\frac{5}{2})} \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^4} \pi^2 m^2 \rho^{-2} a^{-2} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{5}{8} \frac{J_{\perp/\parallel}(\epsilon_{dd}, -\frac{9}{2})}{J_{\perp/\parallel}(\epsilon_{dd}, -\frac{5}{2})} - \frac{5}{56} \frac{I(\epsilon_{dd}, -\frac{7}{2})}{I(\epsilon_{dd}, -\frac{3}{2})} \right] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.3 Kopplung der ersten zwei Schallgeschwindigkeiten

Die Gleichung (5.7) für die ersten beiden Schallgeschwindigkeiten kann nun zusammen mit den entsprechenden Gleichungen (5.9) und (5.18) als Dispersionsrelationen angegeben werden. Da die Terme allerdings unübersichtlich sind, soll zunächst die Systematik dargestellt werden. Dafür werden die Gleichungen (5.9) und (5.18) in ihren Temperaturordnungen umbenannt:

$$\begin{aligned} A_0 &:= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{T \text{ oder } \bar{s}}, \\ B_0 + B_2 T^2 &:= \frac{T\bar{s}^2}{c_\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^{\perp} \sin^2 \theta + \frac{T\bar{s}^2}{c_\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^{\parallel} \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Die Lösungen der Schallgeschwindigkeiten sind in dieser Notation:

$$\begin{aligned} \omega_{1/2}^2 &= k^2 \frac{1}{2} (A_0 + B_0 + B_2 T^2) \pm k^2 \sqrt{\frac{1}{4} (A_0 + B_0 + B_2 T^2)^2 - A_0 (B_0 + B_2 T^2)} \\ &= k^2 \left[\frac{1}{2} (A_0 + B_0 + B_2 T^2) \pm \frac{1}{2} |A_0 - B_0| \sqrt{1 - \frac{2B_2 T^2}{|A_0 - B_0|}} \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Jetzt ist zu untersuchen, an welchen Stellen sich A_0 und B_0 schneiden. Aus den Gleichungen (5.9), (5.18) und (5.19) ist:

$$A_0(\epsilon_{dd}, \theta) = \frac{gn}{m} \left[1 - \epsilon_{dd} + 3\epsilon_{dd} \cos^2 \theta + \frac{16}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\gamma} I\left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2}\right) \right], \quad (5.21)$$

$$B_0(\epsilon_{dd}, \theta) = \frac{gn}{m} \frac{1}{3} [1 - \epsilon_{dd} + 3\epsilon_{dd} \cos^2 \theta], \quad (5.22)$$

wobei sich die θ -Abhängigkeit in A_0 aus (4.7) ergibt. Es ist erkennbar, dass für alle Werte für ϵ_{dd} sowie für γ -Werte in dem Gültigkeitsbereich, der in Abbildung 4.3 dargestellt ist, stets gilt:

$$A_0(\epsilon_{dd}, \theta) > B_0(\epsilon_{dd}, \theta). \quad (5.23)$$

5 Schallgeschwindigkeiten

Dadurch vereinfacht sich die Gleichung (5.20) und nach einer Tieftemperaturentwicklung der Wurzelfunktion ist

$$\begin{aligned}\omega_{1/2}^2 &= k^2 \left[\frac{1}{2}(A_0 + B_0 + B_2 T^2) \pm \frac{1}{2}(A_0 - B_0) \left(1 - \frac{B_2 T^2}{A_0 - B_0} + \dots \right) \right] \\ &= k^2 \left[\frac{1 \pm 1}{2} A_0 + \frac{1 \mp 1}{2} (B_0 + B_2 T^2) \right] + \dots\end{aligned}\quad (5.24)$$

Hier ist zu erkennen, dass keine Kopplung in einer Temperaturentwicklung bis zur zweiten Ordnung stattfindet. Denn die Lösungen der beiden Dispersionsrelationen $\omega_{1/2}^2$ ergeben:

$$\omega_1^2 = k^2 A_0, \quad (5.25)$$

$$\omega_2^2 = k^2 (B_0 + B_2 T^2) \quad (5.26)$$

und können wegen der Notation (5.19) auf eine reine Druckwelle und eine reine Entropiewelle zurückgeführt werden.

Die Dispersionsrelationen (5.24) enthalten aber noch eine θ -Abhängigkeit, die sich aus dem Vektor (5.4) und der tensoriellen Schallgeschwindigkeit wie folgt ergibt:

$$\begin{aligned}\omega_{1/2}^2(\mathbf{k}) &= (k \sin \theta, \quad k \cos \theta) \begin{pmatrix} (u_{1/2}^\perp)^2 & 0 \\ 0 & (u_{1/2}^\parallel)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \sin \theta \\ k \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= k^2 \left\{ (u_{1/2}^\perp)^2 + \left[(u_{1/2}^\parallel)^2 - (u_{1/2}^\perp)^2 \right] \cos^2 \theta \right\}.\end{aligned}\quad (5.27)$$

An dieser Stelle ist noch zu beachten, dass die θ -Abhängigkeit in der Druckwelle ω_1^2 , wie oben beschrieben, aus der Wechselwirkung V_0 aus (4.7) entsteht. Dagegen bekommt die Entropiewelle ω_2^2 diese Abhängigkeit aus der im Abschnitt 4.8 beschriebenen richtungsabhängigen normalfluiden bzw. superfluiden Dichten.

Nach der Systematik (5.27) ergeben sich die Schallgeschwindigkeiten aus den Gleichungen (5.9) und (5.18). Werden die Funktionen $J_{\perp/\parallel}(\epsilon_{dd}, \alpha)$ aus (4.72) eingesetzt, gilt für die senkrechte und parallele Richtung:

$$\begin{aligned}(u_1^\perp)^2 &= \frac{gn}{m} \left[1 - \epsilon_{dd} + \frac{16}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\gamma} I \left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2} \right) \right], \\ (u_2^\perp)^2 &= \frac{gn}{m} \frac{1}{3} (1 - \epsilon_{dd}) \left[1 + \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^4} \frac{15\pi^2}{28} \gamma^{-2} a^4 \frac{1 + \frac{44}{15} \epsilon_{dd} + \frac{37}{15} \epsilon_{dd}^2}{(1 - \epsilon_{dd})^2 (1 + 2\epsilon_{dd})^2} \right], \\ (u_1^\parallel)^2 &= \frac{gn}{m} \left[1 + 2\epsilon_{dd} + \frac{16}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\gamma} I \left(\epsilon_{dd}, \frac{5}{2} \right) \right], \\ (u_2^\parallel)^2 &= \frac{gn}{m} \frac{1}{3} (1 + 2\epsilon_{dd}) \left[1 + \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^4} \frac{15\pi^2}{28} \gamma^{-2} a^4 \frac{1 + \frac{2}{15} \epsilon_{dd} + \frac{7}{15} \epsilon_{dd}^2}{(1 - \epsilon_{dd})^2 (1 + 2\epsilon_{dd})^2} \right].\end{aligned}\quad (5.28)$$

5.3 Kopplung der ersten zwei Schallgeschwindigkeiten

Eine ähnliche Darstellung der ersten Schallgeschwindigkeiten $(u_1^{\perp/\parallel})^2$ ist auch in [17] und [18] zu finden.

Da die Druckwellen hier noch keine Temperaturabhängigkeit besitzen, kann der richtungsabhängige Vergleich der Schallwellen nur im Grenzfall $T = 0$ stattfinden. In diesem Fall kann der Wertebereich des Gasparameters γ in Abhängigkeit von ϵ_{dd} aus der Gleichung (4.39) entnommen werden. So sind die ersten zwei Schallgeschwindigkeiten in senkrechter und paralleler Richtung graphisch dargestellt:

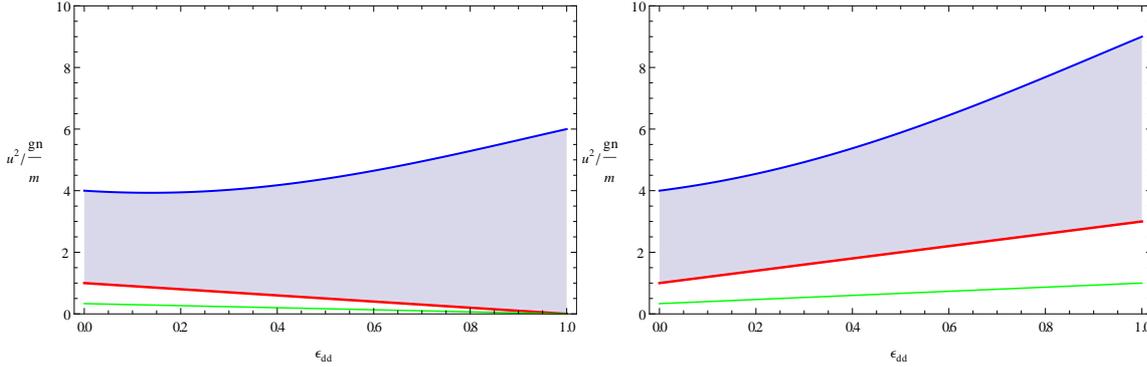


Abbildung 5.1: $(u_{1/2})^2$ -Funktionen aus (5.28) in Abhängigkeit von ϵ_{dd} bei $T = 0$, in senkrechter Richtung \perp (links) und paralleler Richtung \parallel (rechts), die Druckwelle (gefärbte Fläche) mit den γ -Werten aus (4.39) (rot bis blau) und die Entropiewelle (grün).

Aus den ersten zwei Schallgeschwindigkeiten ergeben sich vier, weil sich sowohl die Druckwelle als auch die Entropiewelle wegen der anisotropen Wechselwirkung jeweils in zwei Komponenten aufteilen. Sowohl an der Abbildung 5.1 als auch an den Gleichungen (5.28) ist erkennbar, dass die Entropiewelle bei $T = 0$ nicht von dem Gasparameter γ abhängt. Die Eigenwertgleichung (5.1) gibt jedoch keine Auskunft darüber, ob es sich hier um transversale oder longitudinale Wellen handelt. Hierfür werden die Eigenvektoren der vier Schallgeschwindigkeiten benötigt. Das Resultat aus [32] ist, dass alle vier Wellen longitudinal sind, d.h., dass die Aufteilung in die senkrechte \perp und parallele \parallel Komponente die Ausbreitungsrichtung der Welle bezogen auf die Vorzugsrichtung der Dipole darstellt.

Es ist noch zu beachten, dass in dem Grenzfall alleiniger Kontaktwechselwirkung ($\epsilon_{dd} = 0$) die Aufteilung verschwindet.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Bachelorarbeit ist ein homogenes Bose-Gas mit einer anisotropen Wechselwirkung diskutiert worden. Die Bogoliubov-Theorie ermöglichte eine mikroskopische Beschreibung des Systems mit Hilfe der Zweiten Quantisierung und führte über die Diagonalisierung des Hamilton-Operators zu einer detaillierten thermodynamischen Behandlung. Aus der Landau-Theorie über Phasenübergänge zweiter Ordnung, die aus phänomenologischen Betrachtungen folgt, konnten die entsprechenden Zustandsgrößen berechnet werden. Für die spezielle Anisotropie der dipolaren Wechselwirkung konnten dann im Kapitel 5 die Zustandsgrößen dazu verwendet werden, hydrodynamische Eigenschaften, die aus dem Zwei-Flüssigkeiten-Modell hervorgehen, zu beschreiben.

Die wichtigsten Annahmen für ein BEC wurden im Kapitel 2 zusammengestellt. Die Anzahl der Teilchen im Grundzustand dominiert das System gemäß (2.19), so dass die Interaktion zwischen zwei Teilchen in angeregten Zuständen unwahrscheinlich ist. Damit ergibt die Näherung des Wechselwirkungsterms im Hamilton-Operator (2.17) für diesen Fall nur noch sechs Terme, die dann genauer betrachtet werden müssen. In allen sechs Termen befinden sich die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren im Zustand $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ in quadratischer oder in quartischer Form, was auf eine weitere Annahme für das BEC führt. Denn da die Anzahl der Teilchen im Grundzustand dominiert, ist ein Verschwinden oder Entstehen eines einzigen Teilchens im Grundzustand für ein thermodynamisches System nicht mehr von Bedeutung, was sich in der c -Zahl-Näherung widerspiegelt. So dient der Grundzustand in der Bogoliubov-Theorie als ein Reservoir an Teilchen und durch die Wechselwirkung auch an Anregungen. Das Ergebnis dieser Annahmen ist ein Hamilton-Operator, der nicht mehr quartisch sondern nur noch quadratisch in den Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren $\hat{b}_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}}$ ist. In der weiteren Behandlung des Hamilton-Operators wird eine lineare Transformation der Operatoren $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ und $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ durchgeführt. Wegen der Linearität werden die physikalischen Eigenschaften, wie die Teilchenzahl, nicht mehr verändert, und doch kann der Hamilton-Operator durch die Transformation mit zwei frei wählbaren Parametern u und v diagonalisiert werden. Zum Schluss entsteht ein Hamilton-Operator, der einer Summe von harmonischen Oszillatoren gleicht, wodurch sich der Aufbau der großkanonischen Zustandssumme vereinfacht. Die Landau-Theorie wurde ursprünglich für Phasenübergänge zweiter Ordnung entwickelt, was hier genau zutrifft. Denn die $U(1)$ -Eichsymmetrie, die aus dem Kapitel 2 hervorgeht, impliziert, dass der Variationsparameter n_0 unabhängig von der Phase der Grundzustandswellenfunktion ist. Desweiteren wird hier die Bedingung eines Gleichgewichts verwendet, indem die Ableitung des effektiven Potentials V_{eff} nach der Kondensatdichte n_0 zu Null gesetzt wird. An dieser Stelle ist das Ergebniss von Gross-Pitaevskii schnell ersichtlich und die weiteren Terme können als zusätzliche Störung angesehen werden. Die Störung hat den Ursprung zum Einen im Wechselwirkungsterm aus der

6 Zusammenfassung und Ausblick

Bogoliubov-Theorie und zum Anderen im Übergang in das großkanonische Ensemble. Deswegen können diese Terme als Quantenfluktuationen und als thermische Fluktuationen bezeichnet werden. Aus diesem Grund kann der künstliche Kleinheitsparameter η eingeführt werden, der die Berechnung weiterer Zustandsgrößen störungstheoretisch ermöglicht.

Die wichtigsten Ergebnisse der Kapitel 2 und 3 sind die freie Energie und die Kondensatentleerung. Die freie Energie ist ein thermodynamisches Potential, aus dem durch eine Legendre-Transformation andere thermodynamische Potentiale ausgerechnet werden können. Es ist auch möglich, Zusammenhänge zu weiteren Zustandsgrößen über die Maxwell-Relationen zu erhalten.

Die Kondensatentleerung spielt eine zentrale Rolle bei dem Phasenübergang zu einem BEC. Denn die Besetzung des quantenmechanischen Grundzustands von einer makroskopischen Anzahl an Teilchen ist eine Voraussetzung dieses Aggregatzustands. Anhand der hier berechneten Kondensatentleerung kann der Einfluss der Wechselwirkung auf das Kondensat angegeben werden. Nach dem Übergang zum thermodynamischen Limes konnte dann gerade anhand der Kondensatentleerung der Gültigkeitsbereich der Theorie untersucht werden.

Alle Resultate in den Kapiteln 2 und 3 sind mit einer allgemeinen Wechselwirkung versehen, wodurch die Möglichkeit besteht, beliebige Wechselwirkungsarten einzusetzen. Erst ab dem Kapitel 4 findet die Anwendung auf die dipolare Wechselwirkung statt, wobei die Kontaktwechselwirkung aus Stabilitätsgründen auch mitbetrachtet werden muss. Das Zusammenspiel zwischen den zwei Wechselwirkungsarten wird durch die relative Wechselwirkungsstärke ϵ_{dd} wiedergegeben, die wegen des Übergangs zum thermodynamischen Limes und durch den Wechsel in Kugelkoordinaten in den Funktionen $I(\epsilon_{dd}, \alpha)$ auftritt. Diese werden deswegen diskutiert und graphisch dargestellt. Es ist auffällig, dass die $I(\epsilon_{dd}, \alpha)$ -Funktionen für negative α -Werte, die im Abschnitt 4.2 ausgeführt sind, im Limes $\epsilon_{dd} \rightarrow 1$ divergieren. Diese Eigenschaft überträgt sich auf die Zustandsgrößen und ist in der Tieftemperaturentwicklung schon in den niedrigsten Termen in der Temperaturentwicklung zu finden.

Die Betrachtung der ersten zwei Schallgeschwindigkeiten schließt die Bachelorarbeit mit einer Anwendung der ausgerechneten Zustandsgrößen auf ein hydrodynamisches System ab. Dabei ist zu erkennen, dass die Entropiewelle bis zur sechsten Ordnung der Temperatur berechnet werden muss, um die Schallgeschwindigkeiten in quadratischer Ordnung anzugeben. So wäre auch die achte Ordnung nötig, um den quartischen Term auszurechnen, bei dem sich erst die Kopplung zwischen der Druck- und der Entropiewelle zeigen würde.

In einer Weiterführung dieser Theorie könnte also unmittelbar die vierte Ordnung in T bei den Schallgeschwindigkeiten ausgerechnet werden. Aus dem Zwei-Flüssigkeiten-Modell sind aber noch drei weitere Schallgeschwindigkeiten bekannt, deren Eigenschaften für das homogene anisotrope Bose-Gas ausgerechnet werden können, sowie verschiedene Antwortkoeffizienten, wie die Kompressibilität und der Ausdehnungskoeffizient. In allen diesen Größen ist der Einfluss der Anisotropie und die Entwicklung des Systems mit steigender Temperatur von besonderem Interesse. Zusätzlich ist ein wichtiges Problem die Fortsetzung der Bogoliubov-Theorie in der Nähe der kritischen Temperatur, also im

Bereich $T \approx T_c^{(0)}$, was mit nicht perturbativen Methoden der Referenz [33] möglich wäre. Ferner ist noch anzumerken, dass das homogene Bose-Gas experimentell nicht zu verwirklichen ist. Zum Einen muss sich das Gas immer in einer Falle befinden, so dass es sich um ein inhomogones Gas handelt. Zum Anderen finden die Experimente mit Bose-Einstein-Kondensaten mit vergleichbar wenigen Teilchen statt, so dass eine Homogenität in Teilen des Gesamtsystems schwer anzunehmen ist. Daher wäre es aus experimenteller Sicht notwendig, die hier durchgeführten Berechnungen für das homogene dipolare Bose-Gas auf eine harmonische Falle hin zu erweitern.

Literaturverzeichnis

- [1] S.N. Bose, *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, Z. Phys **26**, 178 (1924)
- [2] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*, Sitzungsbericht der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, p. 3 (1924)
- [3] P. Kapitza, *Viscosity of liquid helium below the λ -point*, Nature **141**, 74 (1938)
- [4] L. Tisza, *The theory of liquid helium*, Phys. Rev. **72**, 838 (1947)
- [5] L. Landau, *The Theory of Superfluidity of Helium II*, J. Phys. USSR **5**, 71 (1941)
- [6] F. London, *On the Bose-Einstein condensation*, Phys. Rev. **54**, 947 (1938)
- [7] N. Bogoliubov, *On the theory of superfluidity*, J. Phys. USSR **11**, 23 (1947)
- [8] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman und E.A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, Science **269**, 198 (1995)
- [9] K.B. Davis, M.O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn und W. Ketterle, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995)
- [10] D.G. Fried, T.C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S.C. Moss, D. Kleppner und T.J. Greytak, *Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3811 (1998)
- [11] C.C. Bradley, C.A. Sackett und R.G. Hulet, *Bose-Einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number*, Phys. Rev. Lett. **78**, 985 (1997)
- [12] G. Modugno, G. Ferrari, G. Roati, R.J. Brecha, A. Simoni und M. Inguscio, *Bose-Einstein condensation of potassium atoms by sympathetic cooling*, Science **294**, 1320 (2001)
- [13] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.C. Nagerl und R. Grimm, *Bose-Einstein Condensation of Cesium*, Science **299**, 232 (2003)
- [14] A. Griesmeier, J. Werner, S. Hensler, J. Stuhler und T. Pfau, *Bose-Einstein Condensation of Chromium*, Phys. Rev. Lett. **94**, 160401 (2005)

- [15] M. Lu, N.Q. Burdick, S.H. Youn und B.L. Lev, *A Strongly Dipolar Bose-Einstein Condensate of Dysprosium*, arXiv:1108.5993 (2011)
- [16] S. Ospelkaus, K.K. Ni, M.H.G. de Miranda, B. Neyenhuis, D. Wang, S. Kotochigova, P.S. Julienne, D.S. Jin und J. Ye, *Ultracold polar molecules near quantum degeneracy*, Faraday Discuss **142**, 351 (2009)
- [17] A.R.P. Lima, *Hydrodynamic Studies of Dipolar Quantum Gases*, Dissertation, Freie Universität Berlin, 2010;
<http://users.physik.fu-berlin.de/~pelster/Theses/lima.pdf>
- [18] A.R.P. Lima and A. Pelster, *Quantum Fluctuations in Dipolar Bose Gases*, Phys. Rev. A **84**, 041604(R) (2011)
- [19] C. Wille, *Hydrodynamic Theory of Ultracold Quantum Gases*, Bachelorarbeit, Freie Universität Berlin, 2011;
<http://users.physik.fu-berlin.de/~pelster/Bachelor/wille.pdf>
- [20] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 6*, Springer, 2007
- [21] W. Greiner und J. Reinhardt, *Feldquantisierung*, Verlag Harri Deutsch, 1993
- [22] F. Schwabl, *Quantenmechanik für Fortgeschrittene*, Springer, Berlin, Band 4, 2008
- [23] M. Ueda, *Fundamentals and new Frontiers of Bose-Einstein-Condensation*, World Scientific, Singapore, 2010
- [24] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, 15. Aufl., Teubner Verlagsgesellschaft, 1960
- [25] J.C. Toledano, *The Landau Theory of Phase Transitions*, 3. Aufl, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1987
- [26] M. Hayn, *Über die Dissipative Dynamik von ultrakalten Bosonen im optischen Gitter*, Diplomarbeit, Freie Universität Berlin, 2010;
<http://users.physik.fu-berlin.de/~pelster/Theses/hayn.pdf>
- [27] K. Goral, K. Rzazewski und T. Pfau, *Bose-Einstein condensation with magnetic dipol-dipol forces*, Phys. Rev. A **61**, 051601 (2000)
- [28] H. Bauer, *Maß- und Inegrationstheorie*, 2. Aufl., de Gruyter, 1992
- [29] E. Zeidler, *Quantum Field Theory II*, Springer, 2009
- [30] A.L. Fetter und J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, Dover, 1971
- [31] A. Pelster, *Bose-Einstein-Kondensation*, Vorlesungsskript, 2004;
http://www.theo-phys.uni-essen.de/tp/ags/pelster_dir/SS04/skript.pdf

- [32] C. Wille, *unveröffentlichte Rechnungen*
- [33] H. Kleinert, S. Schmidt und A. Pelster, *Quantum phase diagram for homogeneous Bose-Einstein condensate*, Ann. Phys. (Leipzig) **14**, 214 (2005)

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Tomasz Checinski, Bielefeld, den 27.10.2011