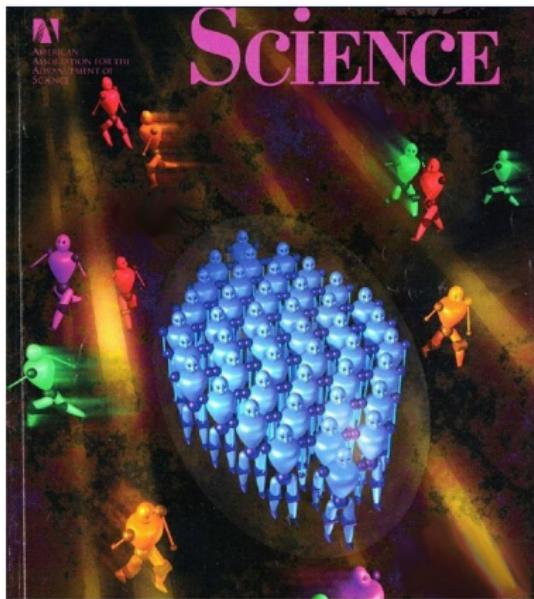


# Bose-Einstein-Kondensation



1. Einleitung
2. Thermodynamik
3. Dynamik
4. Ausblick

Markus Pater  
Universität Duisburg-Essen

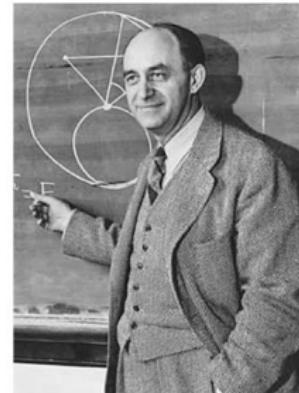


# 1.1. Geschichte der BEC

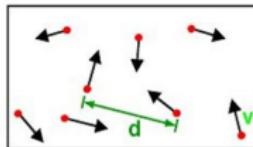
- **1911** Kammerling Onnes: Supraleitung von Hg unterhalb 4,2 K (Nobelpreis 1913)
- **1924** Bose: Plancksche Strahlungsformel (Photonen als Gas ununterscheidbarer Teilchen)
- **1924** Einstein: Erweiterung der Bose-Theorie auf massive Teilchen
- **1937** Kapiza: Suprafluides  $^4\text{He}$  im Experiment (Nobelpreis 1978)
- **1940er** Landau: Theorie zur Suprafluidität von  $^4\text{He}$  (Nobelpreis 1962)
- **1950er** Bardeen, Cooper, Schrieffer: Theorie der Supraleitung (Nobelpreis 1972)
- **1980er** Chu, Cohen-Tannoudji, Phillips: Laserkühlung (Nobelpreis 1997)
- **1995** Cornell, Ketterle, Wieman: BEC im Experiment (Nobelpreis 2001)

## 1.2. Bosonen - Fermionen

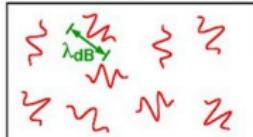
- Ganzzahliger Spin
- Symmetrische Wellenfunktion
- Halbzahliges Spin
- Antisymmetrische Wellenfunktion



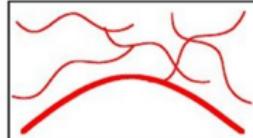
# 1.3. Kritische Temperatur



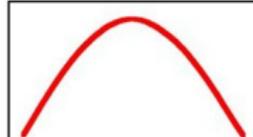
High Temperature T:  
thermal velocity  $v$   
density  $d^{-3}$   
"Billiard balls"



Low Temperature T:  
De Broglie wavelength  
 $\lambda_{dB} = h/mv \propto T^{-1/2}$   
"Wave packets"



$T=T_{\text{crit}}$ :  
Bose-Einstein  
Condensation  
 $\lambda_{dB} \approx d$   
"Matter wave overlap"



$T=0$ :  
Pure Bose  
condensate  
"Giant matter wave"

- $\lambda_{dB} = \frac{\hbar}{(2Mk_B T)^{1/2}}$

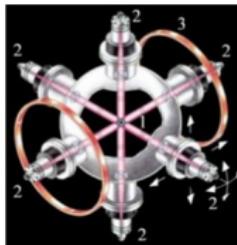
- $n = \frac{1}{d^3}$

- $\frac{\lambda_{dB}}{d} = \left( n \lambda_{dB}^3 \right)^{1/3} = \left[ \zeta(3/2) \right]^{1/3} \approx 1,38$

- $T_C = \frac{\hbar^2}{2Mk_B} \left[ \frac{n}{\zeta(3/2)} \right]^{3/2}$

# 1.4. Laserkühlung

- Gas in MOT

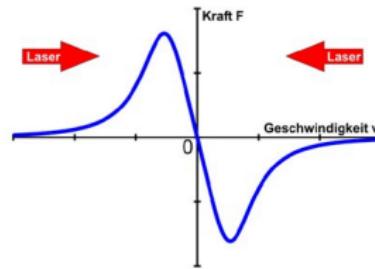


$$d = R$$
$$I_1 = -I_2$$

- Bremsen der Atome durch Absorption

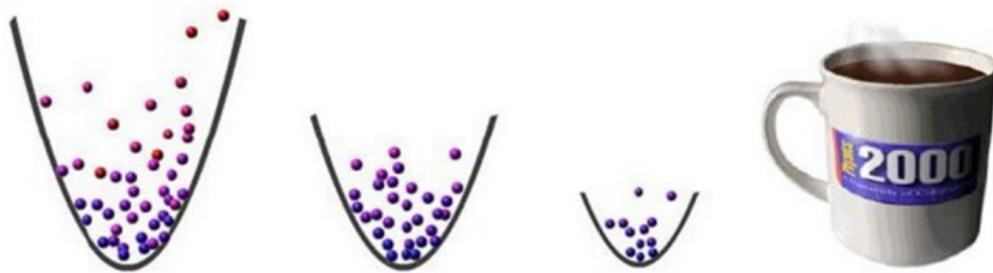


- Doppler-Verschiebung der genutzten Resonanzfrequenz
- geschwindigkeits-abhängige Kraft zweier gegenläufiger Laser

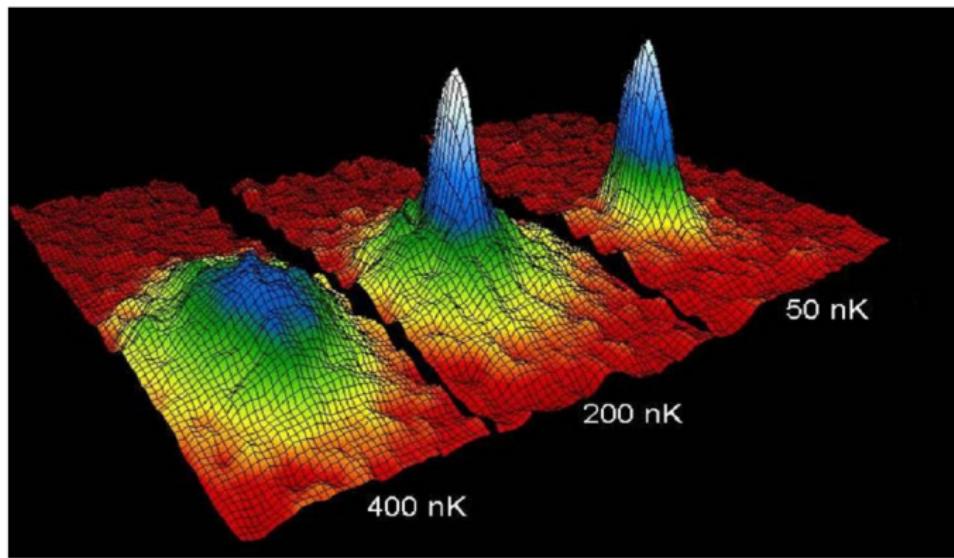


## 1.5. Evaporative Kühlung

- Atome im harmonischen Potential
- Absenkung der Potentialhöhe
- Atome in Zuständen großer Energie entweichen



# 1.6. Geschwindigkeitsverteilung



JILA (1995):  ${}^{87}\text{Rb}$ ,  $N = 20000$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 / \sqrt{8} = 2\pi \cdot 120\text{Hz}$

## 1.7. Periodensystem der kondensierten Elemente

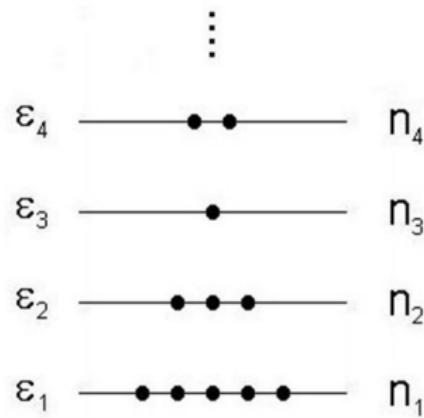
## 2.1. Großkanonische Gesamtheit

- Entropie: 
$$S = -k_B \sum_i \rho_i \ln \rho_i$$
- Nebenbedingungen: 
$$1 = \sum_i \rho_i \quad , \quad U = \sum_i \rho_i E_i \quad , \quad N = \sum_i \rho_i N_i$$
- Maximierung: 
$$\rho_i = Z^{-1} \cdot e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} \quad , \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$
$$Z = \sum_k e^{-\beta(E_k - \mu N_k)}$$
- Thermodynamische Relationen:  
$$F(T, V, \mu) = -\frac{\ln Z}{\beta}$$
$$S(T, V, \mu) = -\left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{V, \mu}$$
$$N(T, V, \mu) = -\left. \frac{\partial F}{\partial \mu} \right|_{T, V}$$

## 2.2. Besetzungszahldarstellung

- Fock-Raum:  $\bigoplus_{N=0}^{\infty} H_N$
- Basis:  $|N; n_1, n_2, \dots\rangle$   
 $\sum_m n_m = N \quad , \quad N = 0, 1, 2, \dots$
- Keine WW zwischen Atomen
- i-ter Mikrozustand:  
 $E_i = \sum_m n_m \varepsilon_m \quad , \quad N_i = \sum_m n_m$
- Zustandssumme:  
 $Z = \prod_m \sum_{n_m=0}^{\infty} e^{-\beta n_m (\varepsilon_m - \mu)}$
- Freie Energie:

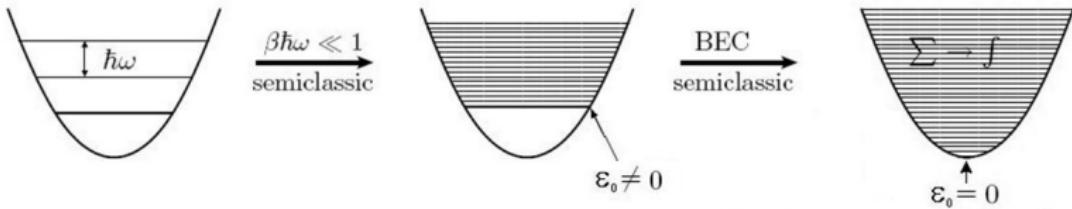
$$F = \frac{1}{\beta} \sum_m \ln [1 - e^{-\beta(\varepsilon_m - \mu)}]$$



=> Bose-Einstein-Verteilung:

$$N = -\frac{\partial F}{\partial \mu} = \sum_m \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_m - \mu)} - 1}$$

## 2.3. Semiklassische Näherung



- $N = N_0 + \sum_{m \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_m - \mu)} - 1} , \quad N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1}$
- $N = N_0 + \int \frac{d^3x d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{\beta[H(x,p) - \mu]} - 1}$

## 2.4. Ideales Bose-Gas in harmonischer Falle

- Einteilchen-Hamiltonian:  $H(x, p) = \frac{p^2}{2M} + \frac{M}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 x_i^2$
- Teilchenzahl in semiklassischer Näherung:

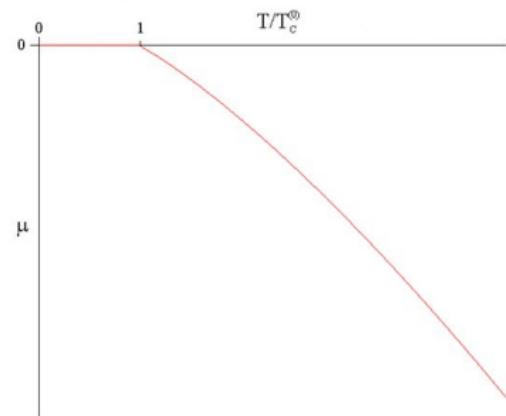
$$N = N_0 + \frac{\zeta_3(e^{\beta\mu})}{(\beta\hbar\tilde{\omega})^3}, \quad \zeta_v(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^v}, \quad \tilde{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$$

- $\mu_C = 0, N_0 = 0$ :

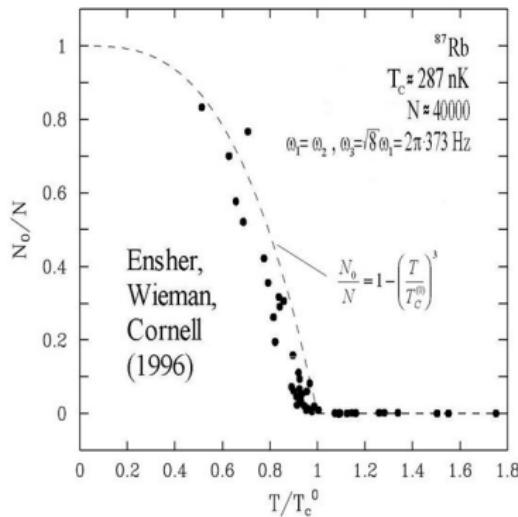
$$T_C^{(0)} = \frac{\hbar\tilde{\omega}}{k_B} \left[ \frac{N}{\zeta(3)} \right]^{1/3}$$

- Thermodynamischer Limes:

$$\hbar\tilde{\omega}\beta_C^{(0)} \propto \frac{1}{N^{1/3}}$$



## 2.5. Vergleich mit Experiment



- Abweichung der vorhergesagten  $T_c$  zur experimentell bestimmten
- Korrekturen nötig:
  - 1) Finite-Size
  - 2) Wechselwirkung zwischen Atomen

## 2.6. Korrekturen

### Finite-Size

- Euler-MacLaurin:

$$\sum_{a \leq k \leq b} f(k) = \int_a^b f(t) dt + \frac{1}{2} [f(a) + f(b)] + \dots$$

- Freie Energie:

$$N = N_0 + \frac{\zeta_3(e^{\beta\mu}) + \frac{3}{2}\hbar\bar{\omega}\beta\zeta_2(e^{\beta\mu})}{(\beta\hbar\bar{\omega})^3} + \dots$$

$$\bar{\omega} = (\omega_x + \omega_y + \omega_z)/3$$

- Kritische Temperatur:

$$T_C = T_C^{(0)} \left[ 1 - \frac{\zeta(2)\bar{\omega}}{2\zeta^{2/3}(3)\tilde{\omega}N^{1/3}} + \dots \right]$$

- Abweichung:

$$\frac{\Delta T_C}{T_C^{(0)}} = \frac{T_C - T_C^{(0)}}{T_C^{(0)}} = - \frac{\zeta(2)}{2\zeta^{2/3}(3)} \frac{\bar{\omega}}{\tilde{\omega}N^{1/3}} \approx -2,4\%$$

### Wechselwirkung

- WW-Potenzial:

$$V_{WW}(x - x') = g \cdot \delta(x - x')$$

$$g = \frac{4\pi \cdot \hbar^2}{M} a$$

- Idee: Veränderung von  $N(\mu)$  und  $\mu_C$  durch WW

- Vielteilchen-Störungstheorie

1. Ordnung:

$$\frac{\Delta T_C}{T_C^{(0)}} = -c \frac{a}{\lambda_{dB}^{(0)}} \approx -4,7\%$$

$$c \approx 3,426$$

$$a(^{87}Rb) = 90 \cdot 0,0529 \text{ nm}$$

# 3.1. Gross-Pitaevskii-Gleichung

- T=0
- $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(\mathbf{x}) + g|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{x}, t)$   
$$g = \frac{4\pi \cdot \hbar^2}{M} a$$
- **Normierung:**  $N = \int d^3x |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$
- **Separation:**  $\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi(\mathbf{x}) e^{-i\mu t/\hbar}$
- $\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(\mathbf{x}) - \mu + g|\Psi(\mathbf{x})|^2 \right] \Psi(\mathbf{x}) = 0$



## 3.2. Thomas-Fermi-Näherung I

- Kondensatausdehnung L
- Kinetische Energie:  $E_{kin}(L) = \frac{\hbar^2}{2ML^2}$
- Potentielle Energie:  $E_{pot}(L) = \frac{M}{2} \omega^2 L^2$
- Wechselwirkungsenergie:  $E_{WW}(L) = \frac{gN}{L^3}$
- $L \rightarrow \infty$ :  $E_{pot}(L) \gg E_{kin}(L)$ ,  $E_{WW}(L)$
- $L \rightarrow 0$ :  $E_{WW}(L) \gg E_{kin}(L)$ ,  $E_{pot}(L)$
- Vernachlässigung der kinetischen Energie

### 3.3. Thomas-Fermi-Näherung II

- $(V(x) - \mu + g|\Psi(x)|^2)\Psi(x) = 0 \Rightarrow |\Psi(x)|^2 = \frac{\mu - V(x)}{g}$

- $\mu - \sum_{i=1}^3 \frac{M}{2} \omega_i^2 x_i^2 \geq 0 \Rightarrow R_i = \sqrt{\frac{2\mu}{M\omega_i^2}} \Rightarrow \tilde{R} = \sqrt{\frac{2\mu}{M\tilde{\omega}^2}}$

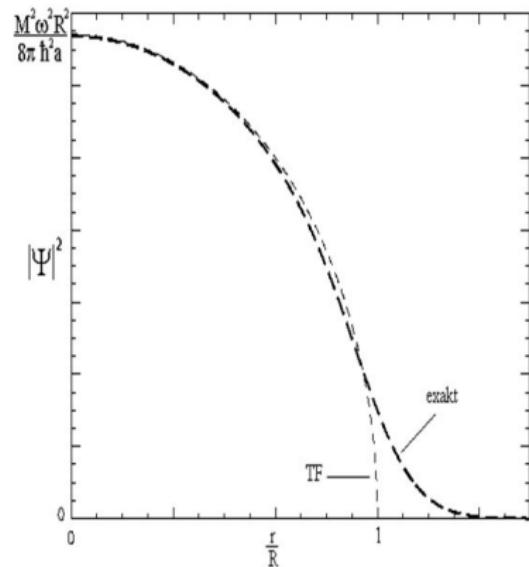
- $N = \frac{1}{g} \int d^3x \left[ \mu - \sum_{i=1}^3 \frac{M}{2} \omega_i^2 x_i^2 \right]$

- **TF-Radius:**

$$\tilde{R} = \left( 15 \cdot aN \sqrt{\frac{M\tilde{\omega}}{\hbar}} \right)^{1/5} \sqrt{\frac{\hbar}{M\tilde{\omega}}}$$

- **Isotrope Falle:**

$$|\Psi(x)|^2 = \frac{M^2 \omega^2 R^2}{8\pi\hbar^2 a} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$



## 3.4. Elementare Anregungen

- Isotrope Harmonische Falle:

$$\delta n_{nlm}(r, \vartheta, \varphi, t) = r^l {}_2F_1\left(-n, l+n+\frac{3}{2}; l+\frac{3}{2}; \frac{r^2}{R^2}\right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) e^{-i\Omega_{nl}t}$$

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{u^k}{k!}$$

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)$$

- TF-Anregungsfrequenzen:

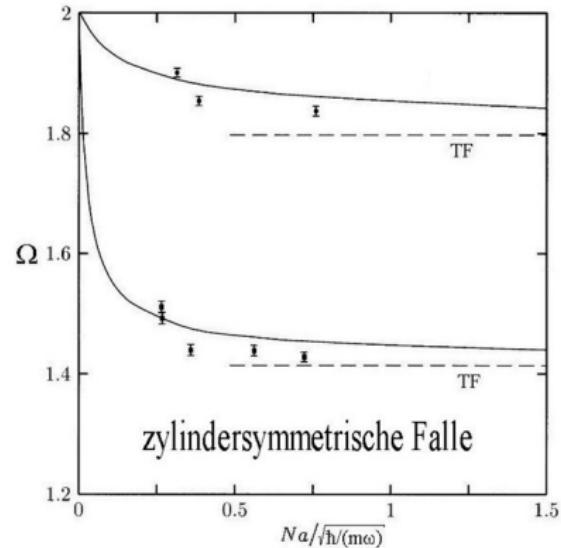
$$\Omega_{nl} = \omega \sqrt{2n^2 + 2nl + 3n + l}$$

$$n, l = 0, 1, 2, \dots$$

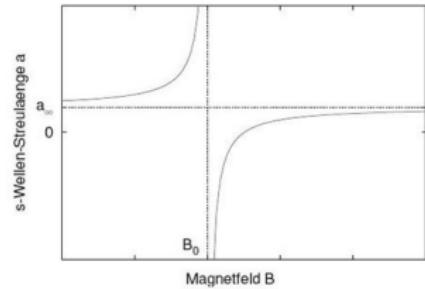
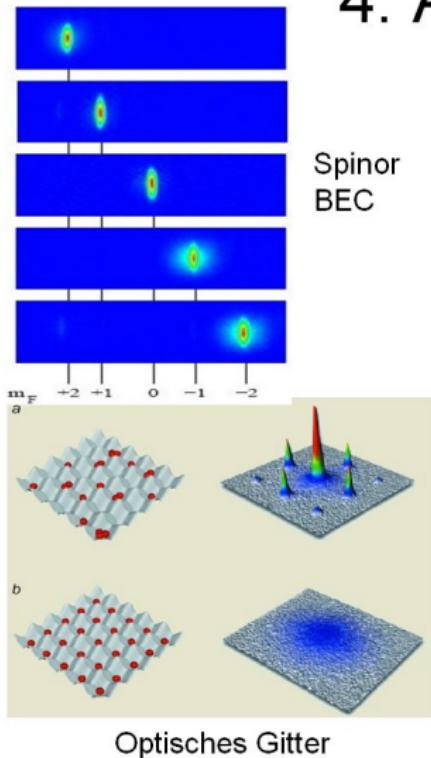
- Schrödinger-Theorie:

$$\Omega_{nl} = \omega(2n+l)$$

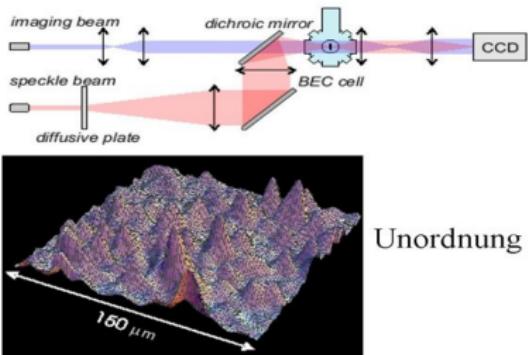
$$n, l = 0, 1, 2, \dots$$



# 4. Ausblick



BEC-BCS-Crossover



# E.1. Hydrodynamische Gleichungen

- Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0$$

$$n(\mathbf{x}, t) = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2Mi} [\Psi^*(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi^*(\mathbf{x}, t)]$$

- Geschwindigkeitsfeld:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = n(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2Mi} \frac{\Psi^*(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi^*(\mathbf{x}, t)}{\Psi^*(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t)}$$

- Phase:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{n(\mathbf{x}, t)} e^{i\varphi(\mathbf{x}, t)} \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{M} \nabla \varphi(\mathbf{x}, t)$$

- Euler-Gleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{M} \nabla \left[ V(\mathbf{x}, t) + gn(\mathbf{x}, t) - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\Delta \sqrt{n(\mathbf{x}, t)}}{\sqrt{n(\mathbf{x}, t)}} \right]$$



## E.2. Hydrodynamische Gleichungen in Thomas-Fermi-Näherung

- Euler-Gleichung in Thomas-Fermi-Näherung:

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{M} \nabla [V(\mathbf{x}, t) + gn(\mathbf{x}, t)]$$

- Gleichgewichtslösungen:

$$n_{eq}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu - V(\mathbf{x})}{g} , \quad \mathbf{v}_{eq}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$$

- Ansatz:  $n(\mathbf{x}, t) = n_{eq}(\mathbf{x}, t) + \delta n(\mathbf{x}, t)$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_{eq}(\mathbf{x}, t) + \delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

- Linearisierte Bewegungsgleichung:

$$M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n(\mathbf{x}, t) = [\mu - V(\mathbf{x})] \Delta \delta n(\mathbf{x}, t) - \nabla V(\mathbf{x}) \nabla \delta n(\mathbf{x}, t)$$

